Claude Morlet

Classes fondamentales. Classes de Chern

Séminaire Henri Cartan, tome 16, nº 1 (1963-1964), exp. nº 4, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1963-1964__16_1_A4_0>

4 novembre 1963

[révisé en Juillet 1964]

CLASSES FONDAMENTALES. CLASSES DE CHERN

par Claude MORLET

(Rédigé par Max KAROUBI)

Nous supposons le lecteur familiarisé avec quelques techniques simples de topologie algébrique, [1] et [3], et plus particulièrement avec celles de la cohomologie singulière. Si (X , A) est une paire d'espaces topologiques $(A \subset X)$, G un groupe abélien et $p \in \underset{\sim}{Z}$, on note $H^p(X , A ; G)$ le p-ième groupe de cohomologie singulière de la paire (X , A) à coefficients dans G ($H^p(X , A ; G) = 0$ pour $p < 0$). $H^*(X , A ; G)$ est le groupe gradué somme directe $\bigoplus_p H^p(X , A , G)$. Dans le cas où G est muni d'une structure d'anneau, $H^*(X , A ; G)$ peut être muni d'une structure d'anneau par le cup-produit interne (Appendice 1). On écrira, pour simplifier les notations, $H^p(X , A)$ et $H^*(X , A)$ respectivement au lieu de $H^p(X , A ; \underset{\sim}{Z})$ et de $H^*(X , A ; \underset{\sim}{Z})$.

1. La classe fondamentale d'un espace vectoriel réel orienté.

Soit $\underset{\sim}{R}^{n*} = R^n - \{0\}$. Le groupe $H^p(\underset{\sim}{R}^n , \underset{\sim}{R}^{n*}) = 0$ pour $p \neq n$ et est isomorphe à $\underset{\sim}{Z}$ pour $p = n$ [3] . Choisissons une fois pour toutes un générateur α de $H^1(\underset{\sim}{R} , \underset{\sim}{R}^*)$; ce choix définit un isomorphisme de $H^1(\underset{\sim}{R} , \underset{\sim}{R}^*)$ sur $\underset{\sim}{Z}$; on voit aisément que l'involution de $(\underset{\sim}{R} , \underset{\sim}{R}^*)$ définie par $x \rightsquigarrow - x$ change α en $-\alpha$. Supposons $n > 0$; $\alpha^n = \underbrace{\alpha \smile \ldots \smile \alpha}_{n}$ (il s'agit du cup-produit externe ; cf. Appendice) est un générateur de $H^n(\underset{\sim}{R}^n , \underset{\sim}{R}^{n*})$ qui définit donc un isomorphisme de $H^n(\underset{\sim}{R}^n , \underset{\sim}{R}^{n*})$ sur $\underset{\sim}{Z}$.

Soit maintenant E un espace vectoriel réel de dimension $n > 0$; choisir une base dans cet espace, c'est se donner une application linéaire bijective $\varepsilon : \underset{\sim}{R}^n \to E$. Cette dernière induit un isomorphisme

$$\varepsilon^* : H^n(E , E^*) \to H^n(\underset{\sim}{R}^n , \underset{\sim}{R}^{n*}) = \underset{\sim}{Z} \quad (\text{avec } E^* = E - \{0\}) \quad .$$

Posons $\xi(\varepsilon) = \varepsilon^{*-1}(\alpha^n)$. Si ε_1 et ε_2 définissent la même orientation, elles sont homotopes sur $(\underset{\sim}{R}^n , \underset{\sim}{R}^{n*})$ et par suite $\xi(\varepsilon_1) = \xi(\varepsilon_2)$. Si ε_1 et ε_2 ne définissent pas la même orientation, soit $\varepsilon_3 = \varepsilon_{x_0} \varepsilon$, où $\varepsilon' : \underset{\sim}{R}^n \to \underset{\sim}{R}^n$ est définie par

$$\varepsilon'(x_1 , x_2 , \dots , x_n) = (-x_1 , x_2 , \dots , x_n) \quad ;$$

alors

$$\varepsilon'^*(\alpha^n) = (-\alpha) \smile \alpha \smile \dots \smile \alpha = -\alpha^n$$

d'où

$$\xi(\varepsilon_1) = -\xi(\varepsilon_2) \quad .$$

$\xi(\varepsilon)$ ne dépend donc que de l'orientation ω de la base ε et change de signe avec ω.

DEFINITION 1. - Si E est un espace vectoriel orienté de dimension n, la classe fondamentale de E, est la valeur commune $u_E \in H^n(E , E^*)$ des expressions $\xi(\varepsilon)$, où ε désigne une base orientée quelconque de E. Si $n = 0$, u_E désignera l'élément unité $1 \in H^0(E) = \underset{\sim}{E}$ (il n'y a qu'une façon d'"orienter" un espace vectoriel de dimension 0).

PROPOSITION 1. - Si E et F sont deux espaces vectoriels orientés, et f une application linéaire bijective de E sur F compatible avec les orientations, $f^*(u_F) = u_E$. Si l'espace vectoriel réel $E \oplus F$ est muni de l'orientation produit des orientations de E et de F,

$$u_{E\oplus F} = u_E \smile u_F \quad \text{(cup-produit externe)}.$$

2. La classe fondamentale et la classe d'Euler d'un espace fibré vectoriel réel orienté.

On définirait de la même manière que les espaces fibrés vectoriels complexes, les espaces fibrés vectoriels réels (la fibre est un espace vectoriel réel). Les résultats obtenus dans le cas complexe se transposent aisément au cas réel. En identifiant $\underset{\sim}{C}^n$ à $\underset{\sim}{R}^{2n}$ par

$$(x_1 + iy_1 , \dots , x_n + iy_n) \rightsquigarrow (x_1 , y_1 , x_2 , y_2 , \dots , x_n , y_n)$$

on voit que tout fibré vectoriel complexe a un fibré vectoriel réel sous-jacent.

2.1. Orientation d'un espace fibré vectoriel réel.

Soit $\{E , X , \pi\}$ un fibré vectoriel réel. Une orientation du fibré est la donnée, pour tout $x \in X$, d'une orientation ω_x de la fibre E_x "variant de façon continue avec x". Plus précisément, pour tout $x_0 \in X$, il existe un ouvert U contenant x_0 et une trivialisation du fibré au-dessus de U :

$$\begin{tikzcd} U \times \mathbb{R}^n \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] & & \pi^{-1}(U) \arrow[dl, "\pi"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

de telle sorte que $\forall\ y \in U$ l'orientation sur E_y définie par φ coïncide avec l'orientation ω_y .

Un fibré vectoriel réel est orientable s'il existe une orientation de ce fibré. Un fibré vectoriel réel muni d'une orientation est dit orienté. Si X est connexe et E orientable, il existe deux orientations de E .

Exemple d'espace fibré réel orienté. - Soient E un fibré vectoriel complexe et $E_{\mathbb{R}}$ le fibré vectoriel réel sous-jacent. $E_{\mathbb{R}}$ est orienté de la façon suivante ; définissons une orientation de chaque fibre de $E_{\mathbb{R}}$ comme étant celle induite par une carte quelconque du fibré ; ceci a bien un sens car les changements de carte sont, pour chaque point de la base, linéaires sur $\mathbb{C}$; ce sont donc des applications $\mathbb{R}$-linéaires de déterminant > 0 . Dans la suite le fibré vectoriel réel sous-jacent à un fibré vectoriel complexe sera toujours muni de cette orientation canonique.

2.2. Théorème d'isomorphisme de Thom-Gysin.

THÉORÈME 2.2. - Soit $\{E , X , \pi\}$ un espace fibré vectoriel réel orienté de dimension n (i. e. la dimension des fibres est constante et égale à n). Soit s_o la section nulle du fibré E , et soit $E^* = E - s_o(X)$.

a. Il existe un élément $u_E \in H^n(E , E^*)$ et un seul tel que l'on ait, pour tout $x \in X$,

$$i_x^*(u_E) = u_{E_x} \quad ,$$

où i_x désigne l'inclusion $(E_x , E_x^*) \subset (E , E^*)$. L'élément u_E s'appelle la classe fondamentale du fibré E .

b. L'application $\theta : H^*(E) \to H^*(E , E^*)$ définie par le cup-produit mixte $a \rightsquigarrow u_E . a$ est bijective (c'est un isomorphisme de $H(E)$-modules à droite, qui augmente le degré de n unités).

Pour une démonstration, voir par exemple [2] et [4].

L'application $s_o : X \to E$ permet d'identifier la base X à un sous-espace de E , rétracte par déformation de E , donc

$$\pi^* : H^*(X) \to H^*(E) \quad \text{et} \quad s_o^* : H^*(E) \to H^*(X)$$

sont des isomorphismes (d'algèbres graduées), récirpoques l'un de l'autre.

$$\varphi = \theta \circ \pi^* : H^*(X) \to H^*(E , E^*)$$

est un isomorphisme de $H^*(X)$-modules à droite, qui augmente le degré de n unités : c'est l'isomorphisme de Thom-Gysin.

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H^*(E) \arrow[r, "\theta"] & H^*(E , E^*) \arrow[d, "S_o^*"] \\ H^*(X) \arrow[u, "\pi^*"] \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "S_o^* \varphi"] & H^*(X) \end{tikzcd}$$

où S_o désigne la composition de s_o et de l'inclusion $(E , \emptyset) \subset (E , E^*)$. On a

$$S_o^* \varphi(x) = S_o^*(u_E . \pi^*(x)) = S_o^*(u_E)).x \quad \text{pour tout} \quad x \in H^*(X) \qquad .$$

Il s'introduit ainsi l'élément $S_o^*(u_E)$, qu'on notera $\chi_E \in H^n(X)$: c'est la classe d'Euler du fibré réel orienté E . Ainsi

$$S_o^* \varphi(x) = \chi_E . x \qquad .$$

La suite exacte de Gysin : considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \to H^i(E , E^*) \arrow[r, "j^*"] & H^i(E) \arrow[r, "i^*"] & H^i(E^*) \arrow[r, "\partial"] & H^{i+1}(E , E^*) \to \\ \to H^{i-n}(X) \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\alpha"] & H^i(X) \arrow[u, "\pi^*"] \arrow[r, "\pi^*"] & H^i(E^*) \arrow[u, "id."] \arrow[r, "\beta"] & H^{i-n+1}(X) \arrow[u, "\varphi"] \to \end{tikzcd}$$

où la première ligne est la suite exacte de cohomologie, et où α et β sont définis par

$$\alpha = S_o^* \varphi \ , \quad \beta = \varphi^{-1} \partial \qquad .$$

Puisque les flèches verticales sont des isomorphismes, la deuxième ligne est une suite exacte : c'est la "suite exacte de Gysin". Comme α est la multiplication (à gauche) par χ_E , on voit que le noyau de $\pi^* : H^*(X) \to H^*(E^*)$ est l'idéal de $H^*(X)$ engendré par la classe d'Euler χ_E .

Remarque. - Si $i < n - 1$, la suite exacte de Gysin montre que

$$\pi^* : H^i(X) \to H^i(E^*)$$

est un isomorphisme.

2.3. Propriétés de u , χ , θ , φ .

a. Fonctorialité. - De la proposition 1.1, on déduit aisément la fonctorialité de u , χ , θ , φ vis-à-vis des morphismes stricts de fibrés orientés. En d'autres termes, si

$$f : \{F , Y , \pi\} \to \{E , X , \pi'\}$$

est un morphisme de fibrés vectoriels qui induit, sur chaque fibre, un isomorphisme respectant les orientations, alors

$$f^*(u_E) = u_F , \qquad f^*(\chi_E) = \chi_F$$

et on a les diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd} H^*(E , E^*) \arrow[r, "f^*"] & H^*(F , F^*) \\ H^*(E) \arrow[u, "\theta"] \arrow[r, "f^*"] & H^*(F) \arrow[u, "\theta"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H^*(E , E^*) \arrow[r, "f^*"] & H^*(F , F^*) \\ H^*(X) \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\bar{f}^*"] & H^*(Y) \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

b. Somme externe et interne. - De la proposition 1.1 et du (a) du théorème de Thom-Gysin on déduit aisément les formules

$$u_{E\oplus F} = u_E \smile u_F , \qquad \chi_{E\oplus F} = \chi_E \smile \chi_F$$

où E et F sont des fibrés vectoriels réels orientés de bases X et Y respectivement, $E \oplus F$ étant orienté de manière évidente. Si en outre $X = Y$ et Δ est l'application diagonale $X \to X \times X$,

$$\Delta^*(E \oplus F) = E \oplus_X F$$

et par suite :

$$\chi_{E\oplus_X F} = \chi_E \cdot \chi_F \qquad .$$

c. Classe d'Euler d'un fibré trivial. - Soit E un fibré vectoriel orienté de dimension n ; E trivial équivaut au fait que $\forall \ x \in X$, il existe un morphisme strict

$$f : \{E , X , \pi\} \to \{E_x , \{x\} , \pi \mid E_x\} \qquad ,$$

d'où

$$\chi_E = f^*(\chi_{E_x}) = 0 \quad \text{pour} \quad n > 0 \text{ , et } = 1 \quad \text{pour} \quad n = 0 \qquad .$$

d. Autre définition de la classe d'Euler. - Soit E un fibré vectoriel réel orienté de dimension n.

$$\varphi(\chi_E) = u_E \cdot \chi_E = u_E \cdot S_o^*(u_E) = u_E \cdot u_E$$

d'où une deuxième définition possible

$$\chi_E = \varphi^{-1}(u_E \cdot u_E) \quad .$$

Conséquence : si n est impair, on a $2\chi_E = 0$. En effet

$$u_E \cdot u_E = - u_E \cdot u_E$$

(anticommutativité du cup-produit interne), donc

$$\chi_E = - \chi_E \quad .$$

En fait, pour $n = 1$, $\chi_E = 0$, car tout fibré orienté de dimension 1 est trivial, au moins si sa base est paracompacte.

3. Classe fondamentale (de cohomologie) d'une variété compacte connexe orientée.

3.1. - Soit X une variété topologique de dimension n, et soit $x \in X$;

$$H^n(X , X - \{x\}) \approx H^n(V , V - \{x\})$$

où V est un voisinage fermé quelconque de x (théorème d'excision en cohomologie) ; on peut choisir V homéomorphe (par une carte de la variété) à une boule de $\mathbb{R}^n$, de telle sorte que

$$H^n(X , X - \{x\}) \approx H^n(V , V - \{x\}) \approx H^n(\mathbb{R}^n , \mathbb{R}^{n*}) = \mathbb{Z} \quad .$$

Par définition une orientation de X est le choix d'un générateur ω_x de $H^n(X , X - \{x\})$ "variant de façon continue avec x" (on pourrait aussi définir l'orientation au moyen de cartes, les définitions sont équivalentes) ; de manière précise, pour tout $x_o \in X$, il existe une carte $\varphi : B \to V$, B étant une boule fermée de $\mathbb{R}^n$, V un voisinage fermé de x_o, de telle sorte que l'orientation de B soit image par φ^* de l'orientation de V (l'orientation de B étant celle qui consiste à choisir comme générateur de $H^n(B , B - \{b\})$, pour $b \in B$, celui qui correspond à α^n par la composition des deux isomorphismes :

$$H^n(\mathbb{R}^n , \mathbb{R}^n - \{0\}) \xrightarrow{(\text{Translation})^*} H^n(\mathbb{R}^n , \mathbb{R}^n - \{b\}) \xrightarrow{\text{Excision}} H^n(B , B - \{b\})) .$$

Dans ces conditions on a le théorème suivant (qu'on ne démontre pas ici) :

THÉORÈME 3.1. - Soit X une variété compacte, connexe, orientée, de dimension n ; alors $H^n(X) \approx \underset{\sim}{Z}$. Si i_x désigne l'inclusion $X \subset (X , X - \{x\})$, l'image de ω_x par

$$i_x^* : H^n(X , X - \{x\}) \to H^n(X)$$

est un générateur de $H^n(X)$ indépendant de x ; nous l'appellerons la <u>classe fondamentale</u>, notée $[\overline{X}]$, de la variété X ([5] et [6]).

Si on compose le projecteur $H^*(X) \to H^n(X)$ et l'isomorphisme $H^n(X) \to \underset{\sim}{Z}$ défini par l'orientation de X, on obtient un homomorphisme

$$\lambda : H^*(X) \to \underset{\sim}{Z} \quad ;$$

pour $a \in H^*(X)$, $\lambda(a)$ s'appelle la valeur de $a \in H^*(X)$ sur la classe fondamentale d'homologie $[X] \in H_n(X)$, et se note souvent $\langle a , [X] \rangle$. Cette terminologie et cette notation se justifient dans le cadre d'une théorie de l'homologie des variétés ; mais la définition de $\lambda(a)$ qu'on vient de donner évite cette théorie de l'homologie.

3.2. - Désignons encore par λ l'homomorphisme prolongé du précédent de $H^n(X ; \underset{\sim}{Q})$ dans $\underset{\sim}{Q}$. On a alors le théorème suivant (sans démonstration) :

THÉORÈME 3.2 (dualité de Poincaré). - Soit X une variété compacte, connexe, orientée, de dimension n. L'application composée :

$$H^i(X ; \underset{\sim}{Q}) \times H^{n-i}(X ; \underset{\sim}{Q}) \xrightarrow{\text{cup-produit interne}} H^n(X ; \underset{\sim}{Q}) \overset{\lambda}{\to} \underset{\sim}{Q}$$

est une forme bilinéaire non dégénérée sur le produit des espaces vectoriels $H^i(X ; \underset{\sim}{Q})$ et $H^{n-i}(X ; \underset{\sim}{Q})$ [5].

$H^i(X ; \underset{\sim}{Q})$ et $H^{n-i}(X ; \underset{\sim}{Q})$ sont donc des espaces vectoriels en dualité ; en particulier leurs dimensions (finies car X est compacte) sont égales ; en particulier, la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(X)$ $(= \Sigma(-1)^i \dim_{\underset{\sim}{Q}} H^i(X ; \underset{\sim}{Q}))$ de la variété X est nulle si n est impair.

3.3. - Revenons aux notations de 3.1, et supposons X différentiable de classe C^1. On voit aisément que le choix d'une orientation de X équivaut au choix d'une orientation du fibré tangent $T(X)$ (une carte définit un homéomorphisme d'un voisinage de 0 dans $T_x(X)$ sur un voisinage de x dans X, d'où une bijection $H^n(T_x(X) , T_x(X) - \{0\})$ sur $H^n(X , X - \{x\})$ qui ne change pas si on remplace la carte par une autre carte compatible avec l'orientation).

THÉORÈME 3.3. - Soit X une variété compacte, connexe, orientée de classe C^{∞} et de dimension n ; munissons le fibré tangent $T(X)$ de X de l'orientation induite par celle de X ; alors :

$$\chi_{T(X)} = \chi(X) \times [X] \qquad \text{(cf. [5])} \quad .$$

4. Classes de Chern.

4.1. - On se propose d'attacher à tout fibré vectoriel complexe E dont la base X est paracompacte (la dimension des fibres n'étant pas supposée nécessairement constante) des classes de cohomologie

$$c_i(X) \in H^{2i}(X ; \mathbb{Z})$$

jouissant des propriétés suivantes :

1° Fonctorialité vis-à-vis des morphismes stricts (si $f : E \to E'$ est un morphisme strict de fibrés, induisant une application $g : X \to X'$ de leurs bases, on a $c_i(E) = g^*(c_i(E'))$ pour tout i) ;

2° Si $E = F \oplus_X 1_{\mathbb{C}}$ (où $1_{\mathbb{C}}$ désigne le fibré trivial de dimension 1 , de base X), alors $c_i(E) = c_i(F)$ pour tout i ;

3° Si la dimension des fibres de E est constante et égale à n , alors

$$c_n(E) = \chi_{E_{\mathbb{R}}} \quad ,$$

classe d'Euler du fibré réel $E_{\mathbb{R}}$ sous-jacent à E , muni de l'orientation définie par la structure complexe des fibres.

THÉORÈME 4.1. - Le problème précédent admet une solution et une seule. Les $c_i(E)$ s'appellent les classes de Chern du fibré E . On a

$c_o(E) = 1$;

$c_i(E) = 0$ pour $i > 0$ si E est trivial ;

$c_i(E) = 0$ si toutes les fibres de E sont de dimension $< i$.

Pour la démonstration, voir Appendice 2.

On notera $c(E)$ la somme $\sum_{i\geq 0} c_i(E) \in H^*(X)$, tout au moins lorsque la dimension des fibres de E est bornée (si elle ne l'était pas, $c(E)$ serait un élément de

$$H^{**}(X) = \prod_{i\geq 0} H^i(X)) \quad .$$

4.2. Classes de Chern d'une somme directe externe ou interne.

THÉORÈME 4.2. - Si E et F sont des fibrés de base X et Y respectivement, on a

$$c(E \oplus F) = c(E) \cup c(F) \in H^*(X \times Y) \quad ; \tag{4.2.1}$$

si de plus $X = Y$, on a

$$c(E \oplus_X F) = c(E) . c(F) \quad . \tag{4.2.2}$$

Pour la démonstration voir Appendice 3.

Remarque d'ordre général à propos de cet exposé. - On pourrait rédiger cet exposé dans le cadre de la cohomologie de Čech, au lieu de la cohomologie singulière. Pour la cohomologie relative $H^*(X, A)$, on se borne au cas où A est ouvert, et au cas où A est fermé (en supposant X paracompact dans ce dernier cas). Le théorème d'isomorphisme de Thom-Gysin et la suite exacte de Gysin sont encore valables ; on a notamment une "classe d'Euler" en cohomologie de Čech. Bien entendu, pour une variété compacte, la cohomologie de Čech coïncide avec la cohomologie singulière. Enfin, la caractéristique axiomatique des classes de Chern (théorème 4.1) marche aussi bien en cohomologie de Čech.

Appendices

Appendice 1 : Cup-produits.

a. Cup-produit interne

Soient (X, A) une paire d'espaces topologiques et G un anneau commutatif ; on définit une application bilinéaire de :

$$H^p(X, A ; G) \times H^q(X, A ; G) \to H^{p+q}(X, A ; G)$$

appelée le cup-produit interne [1]. Si $a \in H^p(X, A ; G)$ et $b \in H^q(X, A ; G)$, on note $a.b$ le cup-produit interne de a et de b. Cette opération définit une multiplication dans $H^*(X, A ; G)$, appelée et notée de la même manière. Le cup-produit interne jouit des propriétés suivantes :

1. Fonctorialité. - Si $f : (X', A') \to (X, A)$, on a $\forall\ a \in H^*(X, A ; G)$; $\forall\ b \in H^*(X', A', G)$

$$f^*(a).f^*(b) = f^*(a.b) \quad ;$$

2. Associativité. - Si a, b, c sont trois éléments de $H^*(X, A ; G)$, on a

$$(a.b).c = a.(b.c) \quad ;$$

3. Anticommutativité. - Si $a \in H^p(X , A ; G)$ et $b \in H^q(X , A ; G)$, on a

$$b.a = (-1)^{pq}\, a.b \quad .$$

$H^*(X , A ; G)$ est muni, par le cup-produit interne, d'une structure d'anneau. Si G est unitaire et A vide,

$$H^*(X , A ; G) = H^*(X ; G)$$

est de plus un anneau avec élément unité $1 \in H^0(X ; G)$.

b. Cup-produit externe.

Soient (X , A) et (Y , B) deux paires d'espaces topologiques.

On définit une application bilinéaire

$$H^p(X , A ; G) \times H^q(Y , B ; G) \to H^{p+q}(X \times Y , (A \times Y) \cup (X \times B) ; G)$$

appelée le cup-produit externe. Si $a \in H^p(X , A ; G)$ et $b \in H^q(Y , B ; G)$, on note $a \smile b$ le cup-produit externe de a et de b . Cette opération s'étend aux H^* et jouit de propriétés analogues à celles du cup-produit interne. Les deux cup-produits sont liés par la propriété suivante : Supposons que le cup-produit externe de $a \in H^p(X , A ; G)$ et de $b \in H^q(X , A ; G)$ soit défini, et soit Δ l'application de $(X , A) \to (X \times X , (A \times X) \cup (X \times A))$ définie par $\Delta(x) = (x , x)$; alors

$$\Delta^*(a \smile b) = a.b \quad .$$

c. Cup-produit mixte.

Considérons le cup-produit externe

$$H^p(X , A) \times H^q(X) \to H^{p+q}(X \times X , A \times X) \quad ,$$

et soit Δ l'application diagonale de (X , A) dans $(X \times X , A \times X)$. Le cup-produit mixte de $a \in H^p(X , A)$ et de $b \in H^q(X)$ est l'élément, noté $a.b$, de $H^{p+q}(X , A)$ défini par $a.b = \Delta^*(a \smile b)$. Le cup-produit mixte s'étend aux H^* , et est fonctoriel. $H^*(X , A)$ est alors un $H^*(X)$-module à droite (on pourrait aussi définir sur $H^*(X , A)$ une structure de $H^*(X)$-module à gauche). De plus le cup-produit interne et le cup-produit mixte sont liés par les propriétés suivantes : soient i l'inclusion $X \subset (X , A)$, j l'inclusion $A \subset X$, et ∂ l'opérateur bord $H^*(A) \to H^*(X , A)$, on a alors les formules suivantes
$\forall \ a \in H^*(X , A)$, $b \in H^*(X)$, $c \in H^*(X , A)$,

$$i^*(ab) = i^*(a).b \ , \qquad a.i^* c = ac \ , \qquad \partial(a.j^* b) = \partial a.b \quad .$$

En d'autres termes ∂ et i^* sont des homomorphismes de $H^*(X)$-module à droite ($H^*(X)$ opérant sur $H^*(A)$ par l'intermédiaire de j^*). La deuxième propriété signifie qu'on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H^*(X, A) \times H^*(X, A) \arrow[r, "\text{cup-produit interne}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \times i^*"] & H^*(X, A) \\ H^*(X, A) \times H^*(X) \arrow[ur, "\text{cup-produit mixte}"'] & \end{tikzcd}$$

Appendice 2 : Unicité et existence des classes de Chern.

On se propose de démontrer le théorème 4.1. Il suffit de le prouver lorsque la dimension des fibres est constante ; en effet, dans le cas général, il existe une partition de la base X en ouverts X_n tels que la dimension des fibres au-dessus de X_n soit égale à n ; d'après l'axiome de fonctorialité, la classe $c_i(E)$ est alors l'unique élément de $H^{2i}(X)$ qui induit, dans $H^{2i}(X_n)$, la classe c_i du fibré restreint au-dessus de X_n .

Démonstration de l'unicité. Tout d'abord, on a $c_i(E) = 0$ si $i > n$, n désignant la dimension des fibres ; en effet, soit F le fibré trivial de base X , à fibres de dimension $i - n$; d'après l'axiome 2 (appliqué $i - n$ fois), on a

$$c_i(E) = c_i(E \oplus_X F) \quad ;$$

d'après l'axiome 3,

$$c_i(E \oplus_X F) = \chi_{E \oplus_X F} = \chi_E \cdot \chi_F \qquad \text{(cf. 2.3)} \quad ;$$

or $\chi_F = 0$ puisque F est trivial de dimension > 0 . D'où $c_i(E) = 0$ comme annoncé.

Si E est un fibré de dimension 0 , on a

$$c_o(E) = \chi_E = 1 \; ;$$

l'unicité des classes de Chern est donc prouvée pour les fibrés de dimension 0 . Procédons maintenant par récurrence sur la dimension n des fibres, en supposant qu'elle soit prouvée pour les fibrés de dimension $n - 1 \geqslant 0$, et que $c_o(F) = 1$ pour tout fibré F de dimension $n - 1$. Si $\{E , X , \pi\}$ est un fibré de dimension n , on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} E^* \times \underset{\sim}{C} & \xrightarrow{f} & p^*(E) & \longrightarrow & E \\ \downarrow{\scriptstyle \pi''} & & \downarrow{\scriptstyle \pi'} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ E^* & \xrightarrow{id} & E^* & \xrightarrow{p = \pi|E^*} & X \end{array}$$

où π'' et f sont définis par $\pi''(s , z) = s$, $f(s , z) = zs$ (multiplication par le scalaire z dans chaque fibre). L'application f est injective, et linéaire sur chaque fibre ; puisque la base X est paracompacte, le sous-fibré image de f admet un supplémentaire E' (de base E^* , à fibres de dimension $n - 1$). De plus on montre sans difficulté que l'espace E^* est aussi paracompact. D'où

$$c_i(E') = c_i(p^*(E)) = p^*(c_i(E))$$

en vertu des axiomes 2 et 1. Or

$$p^* : H^r(E^*) \to H^r(X)$$

est un isomorphisme pour $r \leqslant 2n - 2$, en vertu de la suite exacte de Gysin. On a donc nécessairement

$$c_i(E) = (p^*)^{-1} c_i(E') \quad \text{pour} \quad i \leqslant n - 1 \quad .$$

Ceci montre l'unicité des $c_i(E)$ pour $i < n$, et le fait que $c_o(E) = 1$. De plus, l'axiome 3 définit $c_n(E)$, et on a vu que $c_i(E) = 0$ pour $i > n$. L'unicité est donc prouvée.

Démonstration abrégée de l'existence. - La démonstration de l'unicité conduit à définir les $c_i(E)$ par récurrence sur la dimension des fibres de E . Il reste à vérifier que les $c_i(E)$ ainsi définis satisfont aux trois axiomes voulus. On laisse cette vérification au lecteur, à titre d'exercice.

Notons que la relation $c(E) = 1$ pour un fibré trivial E résulte de l'axiome 3 et du fait que $c(E) = 1$ pour un fibré de dimension 0 .

Remarque. - L'existence et l'unicité des classes de Chern se prouveraient même sans supposer la paracompacité de la base X , à condition de remplacer l'axiome 2 par l'axiome plus fort :

2'. Si on a une suite exacte de fibrés (de même base X) :

$$0 \to 1_{\underset{\sim}{C}} \to E \to F \to 0 \ , \quad ,$$

alors $c(E) = c(F)$.

Appendice 3 : Classe de Chern de la somme directe de deux fibrés.

On se propose de prouver le théorème 4.2 dans un cas particulier, celui où les algèbres de cohomologie $H^*(X ; \underset{\sim}{Z})$ et $H^*(Y ; \underset{\sim}{Z})$ des espaces de base sont des $\underset{\sim}{Z}$-modules libres, de type fini en chaque degré. Alors l'application

$$H^*(X) \otimes H^*(Y) \to H^*(X \times Y)$$

définie par le cup-produit est bijective. C'est même un isomorphisme d'algèbres graduées, à condition de définir sur $H^*(X) \otimes H^*(Y)$ la structure multiplicative que voici :

$$(a \otimes b).(a' \otimes b') = (-1)^{pq} (aa') \otimes (bb') ,$$

pour a' homogène de degré p, et b homogène de degré q.

Démonstration du théorème 4.2. - On va prouver les relations (4.2.1) et (4.2.2) par récurrence sur la somme des dimensions des fibres de E et de F ; si ces dimensions sont nulles, il n'y a rien à démontrer. Supposons les relations prouvées lorsque la somme des dimensions est $< N$, et soient E et F deux fibrés de dimensions n et p respectivement, avec $n + p = N$. On va prouver (4.2.1), d'où (4.2.2) résultera ensuite en observant que $E \oplus_X F$ est induit par $E \oplus F$ sur la diagonale X de $X \times X$.

Si $E = E' \oplus_X 1_{\underset{\sim}{C}}$ (E' de dimension $n - 1$), la formule (4.2.1) est évidente, car

$$c(E \oplus F) = c((E' \oplus_X 1_{\underset{\sim}{C}}) \oplus F) = c((E' \oplus F) \oplus_{X \times Y} 1_{\underset{\sim}{C}})$$

$$= c(E' \oplus F) = c(E') \cup c(F) = c(E) \cup c(F) \quad .$$

En général soit $E_1 \to E^*$ le fibré, image réciproque de $E \overset{\alpha}{\to} X$ par l'application $\alpha_1 : E^* \to X$ $(\alpha_1 = \alpha|E^*)$; on sait que E_1 se trivialise en $E' \oplus_{E^*} 1_{\underset{\sim}{C}}$, d'où

$$c(E_1 \oplus F) = c(E_1) \cup c(F) = \alpha_1^* c(E) \cup c(F)$$

$$= (\alpha_1 \times 1_Y)^* (c(E) \cup c(F)) \quad ,$$

où $\alpha_1 \times 1_Y : E^* \times Y \to X \times Y$. Mais le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E_1 \oplus F & \longrightarrow & E \oplus F \\ \downarrow & & \downarrow \\ E^* \times Y & \xrightarrow{\alpha_1 \times 1_Y} & X \times Y \end{array}$$

montre que

$$c(E_1 \oplus F) = (\alpha_1 \star 1_Y)^* \; c(E \oplus F) \quad .$$

Comparant les deux relations obtenues, on trouve

$$(\alpha_1 \times 1_Y)^* \; (c(E) \cup c(F)) = (\alpha_1 \times 1_Y)^* \; c(E \oplus F) \quad .$$

Soit

$$u = c(E \oplus F) - c(E) \cup c(F) \quad .$$

On vient de montrer que $(\alpha_1 \times 1_Y)^* \, u = 0$.

Considérons le fibré $E \times Y \xrightarrow{\alpha \times 1_Y} X \times Y$, fibré vectoriel de dimension n ; $E^* \times Y$ est le complémentaire de sa section nulle. La suite exacte de Gysin appliquée à ce fibré (cf. 2.2) et la relation $(\alpha_1 \times 1_Y)^* \, u = 0$ montrent que u est dans l'idéal de $H^*(X \times Y)$ engendré par la classe d'Euler $\chi_{E \times Y}$. Or le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E \times Y & \xrightarrow{pr_1} & E \\ {\scriptstyle \alpha \times 1_Y} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \alpha} \\ X \times Y & \xrightarrow{pr_1} & X \end{array}$$

montre que $\chi_{E \times Y} = pr_1^* \chi_E$. Ainsi u appartient à l'idéal de $H^*(X \times Y)$ engendré par l'image de $\chi_E \in H^n(X)$ par

$$pr_1^* : \; H^*(X) \to H^*(X \times Y) \quad .$$

De même, u appartient à l'idéal engendré par l'image de $\chi_F \in H^p(Y)$ par $pr_2^* : \; H^*(Y) \to H^*(X \times Y)$.

Si on identifie l'algèbre $H^*(X \times Y)$ à l'algèbre $H^*(X) \otimes H^*(Y)$, on voit que u appartient à

$$\Big(\bigoplus_{q\geq n} H^q(X)\Big) \otimes H^*(Y) \quad \text{et à} \quad H^*(X) \otimes \Big(\bigoplus_{n\geq p} H^r(Y)\Big) ,$$

donc à

$$\Big(\bigoplus_{q\geq n} H^q(X)\Big) \otimes \Big(\bigoplus_{r\geq p} H^p(Y)\Big) .$$

Par suite u est de degré $\geq n + p = N$. Or u est de degré $\leq N$, et sa composante de degré N est

$$\chi(E \oplus F) - \chi(E) \cup \chi(F) \quad .$$

qui est nulle (cf. 2.3). Donc $u = 0$.

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DIXMIER (J.) et CARTAN (H.). - Homologie et cohomologie singulières, Séminaire Cartan, t. 1, 1948/49 : Topologie algébrique, n° 5, 8 p.

[2] DOUADY (Adrien). - La suite spectrale des espaces fibrés : Applications de la suite spectrale des espaces fibrés, Séminaire Cartan, t. 11, 1958/59 : Invariant de Hopf et opérations cohomologiques secondaires, n° 2 et 3, 10 et 11 p.

[3] EILENBERG (S.) and STEENROD (N.). - Foundations of algebraic topology. - Princeton, Princeton University Press, 1952 (Princeton mathematical Series, 15).

[4] GODEMENT (Roger). - Topologie algébrique et théorie des faisceaux. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1252 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 13).

[5] MILNOR (John). - Lectures on characteristic classes. Notes by James Stasheff. - Princeton, Princeton University, 1957 (multigr.).

[6] STEENROD (Norman). - The topology of fibre bundles. - Princeton, Princeton University Press, 1951 (Princeton mathematical Series, 14).