

# SÉMINAIRE HENRI CARTAN

PIERRE GRISVARD

## **L'indice des opérateurs de Calderon-Zygmund elliptiques**

*Séminaire Henri Cartan*, tome 16, n° 1 (1963-1964), exp. n° 13, p. 1-6

[http://www.numdam.org/item?id=SHC\\_1963-1964\\_\\_16\\_1\\_A13\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SHC_1963-1964__16_1_A13_0)

© Séminaire Henri Cartan  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1963-1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

L'INDICE DES OPÉRATEURS DE CALDERON-ZYGMUND ELLIPTIQUES

par Pierre GRISVARD

Dans cet exposé, on définit ce que l'on entend par opérateur de Calderon-Zygmund à indice ; on montre que seuls les opérateurs de Calderon elliptiques admettent un indice et que cet indice ne dépend que du symbole de l'opérateur.

Rappelons quelques notations :

$X$  désigne une variété réelle de classe  $C^\infty$  compacte de dimension  $n$ .

$E$  et  $F$  sont deux fibrés à fibre vectorielle de dimension finie, de classe  $C^\infty$  et de base  $X$  ;  $\underline{E}$  et  $\underline{F}$  désignent les fibrés images réciproques de  $E$  et  $F$  par rapport à l'application  $h : T^*(X) \rightarrow X$  qui, à tout covecteur tangent, fait correspondre son origine.

$\Gamma(X ; E, F ; \rho)$  est l'espace des opérateurs de Calderon-Zygmund d'ordre  $\rho$  opérant de  $E$  dans  $F$  ; l'espace des  $\rho$ -symboles correspondants est

$$\mathcal{E}(X, T^*(X) ; \mathcal{S}(\underline{E}, \underline{F}) ; \rho)$$

$\mathcal{A}(X ; E, F ; \rho)$  est l'ensemble des opérateurs  $\rho$ -améliorants opérant de  $E$  dans  $F$ .

Pour  $A \in \Gamma(X ; E, F ; \rho)$ , nous noterons  $A_s$  le prolongement à  $H^s(X ; E)$  ; c'est un opérateur linéaire continu de  $H^s(X ; E)$  dans  $H^{s-\rho}(X, F)$ .

Des résultats de compacité établis dans l'exposé précédent, on déduit que, pour  $A \in \mathcal{A}(X ; E, F ; \rho)$ ,  $A_s$  est un opérateur compact de  $H^s(X ; E)$  dans  $H^{s-\rho}(X ; F)$  pour tout  $s$  réel.

DÉFINITION 1. - Nous dirons que  $A \in \Gamma(X ; E, F ; \rho)$  admet un indice, si  $A_s$  est un opérateur à indice de  $H^s(X ; E)$  dans  $H^{s-\rho}(X ; F)$  pour tout  $s$  réel, et si l'indice est indépendant de  $s$ .

Pour commencer nous démontrons la proposition suivante :

PROPOSITION 1. - Soit  $A \in \Gamma(X ; E, F ; \rho)$  un opérateur  $\rho$ -elliptique, alors  $A$  est un opérateur à indice et enfin  $A$ , considéré comme opérateur de  $\mathcal{O}(X ; E)$  dans  $\mathcal{O}(X ; F)$ , admet un indice égal à la valeur commune  $\chi(A)$  aux  $\chi(A_s)$  pour  $s$  réel.

Démonstration. - Nous avons déjà vu qu'un opérateur de Calderon-Zygmund  $\rho$ -elliptique admet un inverse modulo les opérateurs améliorants, qui est un opérateur de Calderon-Zygmund d'ordre  $-\rho$  ; on en déduit que, pour tout  $s$ ,  $A_s$  est inversible modulo les compacts, comme opérateur de  $H^s(X; E)$  dans  $H^{s-\rho}(X; F)$ , ce qui prouve que  $A_s$  admet un indice  $\chi(A_s)$  (cf. le théorème 1 de l'exposé précédent).

Pour montrer que  $\chi(A_s)$  ne dépend pas de  $s$ , nous utilisons l'identité

$$\chi(A_s) = \dim \text{Ker } A_s - \dim \text{Ker } {}^t A_s .$$

Il suffit donc de vérifier que  $\text{Ker } A_s$  et  $\text{Ker } {}^t A_s$  ne dépendent pas de  $s$ . Grâce à l'hypoellipticité de  $A$

$$\text{Ker } A_s = \{ \varphi \in H^s(X; E) ; A_s \varphi = 0 \}$$

coïncide avec

$$\text{Ker } A = \{ \varphi \in \overset{\circ}{\mathcal{O}}(X; E) ; A\varphi = 0 \} ,$$

donc  $\text{Ker } A_s$  ne dépend pas de  $s$ . Pour vérifier que  $\text{Ker } {}^t A_s$  ne dépend pas non plus de  $s$ , on remarque que  ${}^t A_s = ({}^t A)_{\rho-s}$  et que  ${}^t A$  est aussi un opérateur de Calderon-Zygmund  $\rho$ -elliptique, donc  $\text{Ker } {}^t A_s$  coïncide avec

$$\text{Ker } {}^t A = \{ \varphi \in \overset{n}{\mathcal{O}}_t(X; F^*) ; {}^t A\varphi = 0 \} \quad (1)$$

et ne dépend pas de  $s$ .

Montrons que  $A$ , comme opérateur de  $\overset{\circ}{\mathcal{O}}(X; E)$  dans  $\overset{\circ}{\mathcal{O}}(X; F)$  admet un indice ; nous avons déjà vu que  $\text{Ker } A = \text{Ker } A_s$  pour tout  $s$ , c'est un espace de dimension finie puisque  $A_s$  admet un indice. Nous allons vérifier que

$$\text{Im } A = \bigcap_s \text{Im } A_s .$$

L'inclusion  $\text{Im } A \subset \bigcap_s \text{Im } A_s$  est évidente ; réciproquement soit  $f \in \bigcap_s \text{Im } A_s$  ; alors, pour tout  $s$  réel, il existe  $\varphi_s \in H^s(X; E)$  tel que  $A_s \varphi_s = f$ . Fixons  $s$ , et soit  $t > s$  ; de l'identité  $A_s(\varphi_s - \varphi_t) = 0$ , et de l'hypoellipticité de  $A$ , on déduit que  $\varphi_s - \varphi_t \in \overset{\circ}{\mathcal{O}}(X; E)$  pour tout  $t > s$ , donc

$$\varphi_s \in \bigcap_{t>s} H^t(X; E) = \overset{\circ}{\mathcal{O}}(X; E)$$

car  $X$  est compacte, et  $f \in \text{Im } A$ . On a donc aussi

$$\text{Im } A = \bigcap_s (\text{Im } A_s \cap \overset{\circ}{\mathcal{O}}(X; F)) ;$$

$\text{Im } A_s$  est fermé dans  $H^s(X; F)$  donc son intersection avec  $\overset{\circ}{\mathcal{O}}(X; F)$  est fermée

(1)  $\overset{n}{\mathcal{O}}_t(X; F^*)$  est l'espace des formes différentielles de degré  $n$ , d'espèce impaire sur  $X$  (non nécessairement orientable) à coefficients sections  $C^\infty$  de  $F^*$ .

dans cet espace et  $\text{Im } A$  est fermé. Il est alors bien de codimension finie, puisque c'est l'orthogonal de  $\text{Ker } {}^t A$ . On a alors

$$\text{Ker } A = \text{Ker } (A_s) , \quad \text{Ker } {}^t A = \text{Ker } {}^t A_s ,$$

donc

$$\chi(A) = \chi(A_s) .$$

C. Q. F. D.

Remarque. - La formule

$$\chi(A) = \dim \text{Ker } A - \dim \text{Ker } {}^t A$$

montre que les opérateurs de Calderon-Zygmund  $A$  et  ${}^t A$ , qui sont elliptiques en même temps, ont des indices opposés ; et de même  $A$  et  $A^*$ .

THÉORÈME 1. -  $A \in \Gamma(X ; E , F ; \rho)$  est un opérateur de Calderon-Zygmund à indice si et seulement s'il est  $\rho$ -elliptique.

Remarque. - Il ne suffit pas que  $A$  admette un indice comme opérateur de  $\mathcal{O}^0(X ; E)$  dans  $\mathcal{O}^0(X ; F)$  pour que  $A$  soit  $\rho$ -elliptique.  $\chi(A)$  ne dépend que de  $\sigma_\rho(A)$  (en effet si  $\sigma_\rho(A) = \sigma_\rho(B)$ ,  $A_s - B_s$  est compact pour tout  $s$ , donc  $\chi(A_s) = \chi(B_s)$ ).

Il nous reste seulement à démontrer la réciproque de la proposition 1. Pour démontrer qu'un opérateur  $A \in \Gamma(X ; E , F ; \rho)$ , qui est un opérateur de Calderon-Zygmund à indice, est  $\rho$ -elliptique nous utiliserons un lemme que nous admettrons provisoirement.

LEMME 1. - Il existe  $G_{-\rho} = G_{X;E,E;-\rho} \in \Gamma(X ; E , E ; -\rho)$  opérateur  $(-\rho)$ -elliptique.

$G_{-\rho}$  est un opérateur de Calderon-Zygmund à indice ; en substituant  $\Lambda \circ G_{-\rho}$  à  $\Lambda$ , on se ramène au cas où  $A \in \Gamma(X ; E , F ; 0)$ .

Dans ce cas nous allons pouvoir prouver le théorème par l'absurde. On suppose que  $A_0$  admet un indice et qu'il existe  $x_0 \in X$  et  $\xi_0 \in T^*(X)$  vecteur cotangent non nul d'origine  $x_0$ , tels que  $\sigma_0(A)(x_0, \xi_0)$  ne soit pas inversible ; il existe alors  $\vec{e} \in E_{x_0}$ ,  $\vec{e} \neq 0$ , tel que  $\sigma_0(A)(x_0, \xi_0) \vec{e} = 0$ .

Rappelons un lemme démontré dans l'exposé n° 9 : soient  $(a, b)$  un couple de points de  $\mathbb{R}^n$ ,  $b \neq 0$  et  $\tilde{U}$  un voisinage relativement compact de  $a$ , alors il existe une suite  $\{\varphi_j\}_{j=1,2,\dots} \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$  formée de fonctions à support dans  $\tilde{U}$  et telle que :

- (i)  $\|\varphi_j\|_0 = 1$ ,  $j = 1, 2, \dots$   
(ii)  $\varphi_j$  converge vers zéro dans  $H^0(\underline{\mathbb{R}}^n)$  faible pour  $j \rightarrow \infty$ .  
(iii) Pour  $L \in \Gamma(\underline{\mathbb{R}}^n; 0)$ ,  $L_0 \varphi_j - \sigma_0(L)(a, b) \rightarrow 0$  dans  $H^0(\underline{\mathbb{R}}^n)$  fort pour  $j \rightarrow +\infty$ .

Par cartes locales, on déduit facilement qu'il existe une suite de fonctions  $\{\psi_j\}_{j=1,2,\dots} \subset H^0(X; E)$  telle que

- (i)  $\|\psi_j\|_0 \geq C > 0$ ,  $j = 1, 2, \dots$   
(ii)  $\psi_j$  converge vers zéro faiblement dans  $H^0(X; E)$  pour  $j \rightarrow +\infty$ .  
(iii) Pour tout  $B \in \Gamma(X; E, F; 0)$ ,  $B_0 \psi_j - \sigma_0(B)(x_0, \xi_0) \psi_j \rightarrow 0$  dans  $H^0(X; F)$  fort pour  $j \rightarrow +\infty$ ;  $\psi_j(x_0)$  est proportionnelle à  $\vec{e}$ , si bien que  $A_0 \psi_j \rightarrow 0$  dans  $H^0(X; F)$  fort.

L'existence de cette suite mène à une contradiction : puisque  $A_0$  admet un indice, il existe un opérateur  $C$  linéaire continu de  $H^0(X; F)$  dans  $H^0(X; E)$  tel que  $CA_0 - 1$  soit compact ; de (ii), on déduit alors que  $CA_0 \psi_j - \psi_j \rightarrow 0$  dans  $H^0(X; E)$  fort, mais  $CA_0 \psi_j \rightarrow 0$  grâce à (iii), donc  $\psi_j \rightarrow 0$  dans  $H^0(X; E)$ , ce qui contredit (i).

Le théorème est démontré sous réserve de vérifier le lemme 1 ; ce lemme résulte du lemme suivant.

LEMME 2. - Si  $\sigma_\rho$  est un symbole relatif à  $E, E$ , et si, pour tout  $(x, \xi)$ ,  $\sigma_\rho(x, \xi)$  est un multiple réel de l'identité, les opérateurs l'ayant pour symbole ont l'indice 0 ; on peut en choisir un qui, pour tout  $s$ , soit un isomorphisme de  $H^s(X; E)$  sur  $H^{s-\rho}(X; E)$ .

Démonstration. - On construit pour commencer un opérateur  $G_\rho$ ,  $\rho$ -elliptique et d'indice nul (i. e.  $\chi((G_\rho)_s) = 0$  pour tout  $s$ ).

On fixe sur  $X$  une métrique riemannienne, c'est-à-dire une forme quadratique définie positive sur chaque fibre  $T_x^*(X)$  de  $T^*(X)$  dépendant  $C^\infty$  du point  $x$  de  $X$ . On en déduit un isomorphisme de  $\Omega = (\bigwedge^n T^*(X))_t$  <sup>(2)</sup> avec le fibré trivial de dimension un  $\Omega \simeq \underline{\mathbb{C}} \times X$ .

On fixe de même sur  $E$  une forme hermitienne définie positive, ce qui permet

---

(2) On déduit  $(\bigwedge^n T^*(X))_t$  de  $\bigwedge^n T^*(X)$  en tordant chaque fibre par l'ensemble des deux orientations possibles de l'espace tangent.

d'identifier  $E$  avec  $\overline{E}^*$ .

L'espace  $\mathring{\mathcal{O}}_t^n(X; \overline{E}^*)$  qui, par définition, est l'espace  $\mathring{\mathcal{O}}(X; \overline{E}^* \otimes_X \Omega)$  des sections  $C^\infty$  du fibré  $\overline{E}^* \otimes_X \Omega$ , peut alors être identifié à  $\mathring{\mathcal{O}}(X; E)$ . Pour  $A \in \Gamma(X; E, E; \rho)$ , l'adjoint  $A^*$  est défini,  $A^* \in \Gamma(X; E, E; \rho)$  et

$$\sigma_\rho(A^*)(x, \xi) = \sigma_\rho(A)^*(x, \xi).$$

Si  $\sigma_\rho(x, \xi)$  est, pour tout  $(x, \xi)$ , proportionnel à  $\underset{\sim x}{L_E}$  à facteur de proportionnalité réel, on a  $\sigma_\rho^* = \sigma_\rho$  (l'existence de tels  $\sigma_\rho$  est évidente; par exemple  $|\xi|^\rho \underset{\sim x}{L_E}$  répond à la question).

Si  $G_\rho$  est un opérateur de Calderon-Zygmund arbitraire de symbole  $\sigma_\rho$ ,  $G_\rho$  et  $G_\rho^*$  ont même symbole, donc même indice, mais aussi des indices opposés, donc un indice nul.

Pour achever la démonstration du lemme, on va modifier  $G_\rho$  par addition d'un opérateur améliorant  $A$  tel que  $(G_\rho + A)_s$  soit un isomorphisme de  $H^s(X; E)$  sur  $H^{s-\rho}(X; E)$  pour tout  $s$ : soit  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  une base de

$$\text{Ker } G_\rho = \{\varphi \in \mathring{\mathcal{O}}(X; E); G_\rho \varphi = 0\}$$

et soit  $\psi_1, \dots, \psi_n$  une base d'un supplémentaire topologique de  $\text{Im } G_\rho$  dans  $\mathring{\mathcal{O}}(X; E)$ . On considère des fonctions  $\eta_1, \dots, \eta_n$  de  $\mathring{\mathcal{O}}(X; \overline{E}^*)$  telles que  $\langle \eta_i, \psi_j \rangle = \delta_{i,j}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , et on prend pour  $A$  l'opérateur

$$\varphi \rightsquigarrow A\varphi = \sum_{i=1}^n \langle \eta_i, \varphi \rangle \psi_i.$$

$A$  est linéaire continu de  $\mathring{\mathcal{O}}(X; E)$  dans  $\mathring{\mathcal{O}}(X; E)$ , donc  $\rho$ -améliorant. On sait que  $\chi((G_\rho + A)_s) = \chi((G_\rho)_s) = 0$ , donc pour vérifier que  $(G_\rho + A)_s$  est un isomorphisme, il suffit de voir que  $\text{Ker } (G_\rho + A)_s = \text{Ker } (G_\rho + A) = 0$ ; ceci est évident <sup>(3)</sup>.

Nous avons vu que l'indice d'un opérateur de Calderon (lorsqu'il admet un indice) ne dépend que de son symbole; l'énoncé suivant précise cette propriété:

**THÉOREME 2.** - Soient  $A$  et  $B \in \Gamma(X; E, F; \rho)$  deux opérateurs  $\rho$ -elliptiques dont les symboles  $\sigma_\rho(A)$  et  $\sigma_\rho(B)$  sont homotopes dans l'ensemble des symboles

(3) En effet si  $(G_\rho + A)\varphi = 0$ , comme  $G_\rho \varphi$  et  $A\varphi$  sont dans deux sous-espaces supplémentaires, on a  $G_\rho \varphi = 0$  et  $A\varphi = 0$ . De  $G_\rho \varphi = 0$ , on tire  $\varphi = \sum C_i \varphi_i$ , et de  $A\varphi = \sum C_i \psi_i = 0$ , on tire  $C_i = 0$  pour tout  $i$ , donc  $\varphi = 0$ .

inversibles de  $\mathcal{E}(X, T^*(X); \mathcal{L}(E, F); \rho)$  ; alors  $\chi(A) = \chi(B)$  .

Démonstration. - Par composition avec un opérateur de symbole  $\sigma_\rho(B)^{-1}$  , on se ramène immédiatement au cas où  $E = F$  ,  $\rho = 0$  et où  $\sigma_0(A)$  est homotope au symbole  $(x, \xi) \rightsquigarrow I_{\underline{E}_x}$  .

Pour vérifier que  $\chi(A_s) = 0$  pour tout  $s$  , il suffit de montrer que  $A_s$  est homotope à l'identité dans l'ensemble des opérateurs à indice de l'espace  $H^s(X; E)$  dans lui-même ; ceci résulte de l'existence d'un certain relèvement de l'application symbole :

Nous avons vu (exposé n° 9) qu'il existe un opérateur

$$\theta \in \mathcal{L}(\mathcal{S}(\underline{\mathbb{R}}^n; \Xi; 0); \bigcap_s \mathcal{L}(H^s(\underline{\mathbb{R}}^n), H^s(\underline{\mathbb{R}}^n)))$$

( $\Xi$  dual de  $\underline{\mathbb{R}}^n$ ) tel que  $\theta(\varphi) \in \Gamma(\underline{\mathbb{R}}^n; 0)$  pour  $\varphi \in \mathcal{S}(\underline{\mathbb{R}}^n; \Xi; 0)$  , et que  $\sigma_0 \circ \theta = 1$  . Par tensorisation, cartes locales et partition de l'unité, on déduit un "relèvement" de l'application symbole sur  $X$  , c'est-à-dire un opérateur

$$\Theta \in \mathcal{L}(\mathcal{E}(X; T^*(X); \mathcal{L}(\underline{E}, \underline{E}); 0); \bigcap_s \mathcal{L}(H^s(X; E), H^s(X; E)))$$

tel que  $\Theta(\varphi) \in \Gamma(X; E, E; 0)$  et  $\sigma_0(\Theta(\varphi)) = \varphi$  pour toute  $\varphi$  .

C. Q. F. D.