JULIANE BOKOBZA

Opérateurs de Calderon-Sygmund sur les variétés

Séminaire Henri Cartan, tome 16, nº 1 (1963-1964), exp. nº 11, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1963-1964__16_1_A11_0>

Séminaire CARTAN-SCHWARTZ
16e année, 1963/64, n° 11

27 janvier 1964

OPÉRATEURS DE CALDERON-SYGMUND SUR LES VARIÉTÉS

par Mme Juliane BOKOBZA

Soit X une variété C^∞, de dimension n, dénombrable à l'infini.

On désignera par $(\varphi_i)_{i\in I}$ une partition C^∞ de l'unité subordonnée à un recouvrement dénombrable, localement fini, par des ouverts relativement compacts $\mathcal{U}_i$ qui sont des domaines de cartes sur X et de trivialisation de tous les fibrés mis en cause dans la suite.

1. Définition de certains espaces de sections-distributions : $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$, $\overset{\circ}{\mathcal{D}}'$, $\overset{\circ}{\mathcal{E}}$, $\overset{\circ}{\mathcal{E}}'$.

Soit E un espace fibré sur X à fibre vectorielle complexe de dimension finie constante, de fibre-type $\mathcal{E}$; soit E^* le fibré dual de E. On pose :

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}(X\ ;\ E) = C_0^\infty(X\ ;\ E)$$

espace des sections C^∞ à support compact de E,

$$\overset{n}{\mathcal{D}}_t(X\ ;\ E^*) = C_0^\infty(X\ ;\ E^* \otimes_X \Omega_t^n) = \overset{\circ}{\mathcal{D}}(X\ ;\ E^* \otimes_X \Omega_t^n)$$

(t est l'initiale de tordu ; Ω_t^n est l'espace fibré (sur X) des n covecteurs tangents complexes tordus).

Soit K_j une suite exhaustive de compacts de X : on introduit sur $\overset{\circ}{\mathcal{D}}(X\ ;\ E)$ la topologie limite inductive des topologies suivantes sur

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}_{K_j}(X\ ;\ E) = C_{K_j}^\infty(X\ ;\ E) \qquad ,$$

soit $(\varphi_i)_{i\in I_{K_j}}$ la famille finie des fonctions de la partition dont le support rencontre K_j ; φ variant dans $\overset{\circ}{\mathcal{D}}_{K_j}(X\ ;\ E)$, la topologie sur $\overset{\circ}{\mathcal{D}}_{K_j}(X\ ;\ E)$ est la topologie de la convergence uniforme des $\varphi_i\ \ \varphi$, ainsi que de toutes leurs dérivées, $i\in I_{K_j}$, les dérivées étant prises par rapport à un système de coordonnées sur un voisinage du support de φ_i.

Cette topologie sur $\overset{\circ}{\mathcal{D}}(X\ ;\ E)$ ne dépend ni de la partition $(\varphi_i)_{i\in I}$, ni de la suite K_j, ni des coordonnées choisies, les $\overset{\circ}{\mathcal{D}}_{K_j}(X\ ;\ E)$ sont des espaces de Fréchet fermés dans $\overset{\circ}{\mathcal{D}}(X\ ;\ E)$.

Par définition $\overset{\circ}{\mathcal{D}}'(X\,;\,E)$ est le dual fort de

$$\overset{n}{\mathcal{D}}_t(X\,;\,E^*) = \overset{\circ}{\mathcal{D}}(X\,;\,E^* \otimes_X \Omega_t^n)$$

c'est l'espace des sections-distributions de E. On note $\overset{n}{\mathcal{D}}{}'_t(X\,;\,E^*)$ le dual fort de $\overset{\circ}{\mathcal{D}}(X\,;\,E)$.

$\overset{\circ}{\mathcal{D}}(X\,;\,E)$ se plonge naturellement dans $\overset{\circ}{\mathcal{D}}'(X\,;\,E)$ de la façon suivante : soit $\alpha \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}(X\,;\,E)$; si $\beta \in \overset{n}{\mathcal{D}}_t(X\,;\,E^*) = \overset{\circ}{\mathcal{D}}(X\,;\,E^* \otimes_X \Omega_t^n)$, on peut associer naturellement à $(\alpha\,,\,\beta)$ une section C_0^∞ du produit tensoriel contracté de E par $E^* \otimes_X \Omega^n$, soit

$$\langle \alpha\,,\,\beta\rangle_{E,E^*} \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}(X\,;\,\underset{\sim}{C} \otimes_X \Omega_t^n) = \overset{\circ}{\mathcal{D}}(X\,;\,\Omega_t^n) = \overset{n}{\mathcal{D}}_t(X) \quad .$$

On définit alors $\langle \alpha\,,\,\beta\rangle = \int_X \langle \alpha\,,\,\beta\rangle_{E,E^*}$.

Par ailleurs $\overset{n}{\mathcal{D}}{}'_t(X\,;\,E^*)$ s'identifie canoniquement à $\overset{\circ}{\mathcal{D}}'(X\,;\,E^* \otimes_X \Omega_t^n)$.

$\overset{\circ}{\mathcal{D}}(X\,;\,E)$ et $\overset{\circ}{\mathcal{D}}'(X\,;\,E)$ sont réflexifs (ce sont des espaces de Montel).

On pose $\overset{\circ}{\mathcal{E}}(X\,;\,E) = C^\infty(X\,;\,E)$ espace de sections C^∞ de E

$$\overset{n}{\mathcal{E}}_t(X\,;\,E^*) = C^\infty(X\,;\,E^* \otimes_X \Omega_t^n) .$$

On munit $\overset{\circ}{\mathcal{E}}(X\,;\,E)$ de la topologie de la convergence uniforme des $\varphi_i\ \varphi$, et leurs dérivées, $i \subset I$, $\varphi \in \overset{\circ}{\mathcal{E}}(X\,;\,E)$: c'est une topologie de Fréchet. Par définition $\overset{\circ}{\mathcal{E}}'(X\,;\,E)$ est le dual fort de $\overset{n}{\mathcal{E}}_t(X\,;\,E^*)$, $\overset{n}{\mathcal{E}}{}'_t(X\,;\,E^*)$ est le dual fort de $\overset{\circ}{\mathcal{E}}(X\,;\,E)$.

2. Définition des espaces $H^s_{loc}(X\,;\,E)$ et $H^s_{comp}(X\,;\,E)$.

Soit $T \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}'(X\,;\,E)$ et soit $\varphi \in C_0(X\,;\,\underset{\sim}{R})$ à support compact contenu dans un domaine de coordonnées $\mathcal{U}$ $(\mathcal{U} \overset{\alpha}{\to} \tilde{\mathcal{U}} \subset \underset{\sim}{R}^n)$.

Alors $T\varphi$ définit par transport une forme linéaire continue $\widetilde{T\varphi}$ sur l'espace des sections C à support compact du fibré trivial $\tilde{\mathcal{U}} \times \mathcal{E}^*$, cet espace s'identifiant à $\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{U}}) \otimes \mathcal{E}^*$; $\widetilde{T\varphi}$ est donc un élément de $\mathcal{D}'(\tilde{\mathcal{U}}) \otimes \mathcal{E}$.

On dira que la section-distribution T appartient à $H^s_{loc}(X\,;\,E)$ si, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(X\,;\,\underset{\sim}{R})$ à support compact contenu dans un domaine de coordonnées $\mathcal{U}$, l'image de $T\varphi$ dans $\mathcal{D}'(\tilde{\mathcal{U}}) \otimes \mathcal{E}$ appartient en fait à $H^s(\tilde{\mathcal{U}}) \otimes \mathcal{E}$.

On désignera par $\|\varphi T\|_s$ la norme de l'image $\widetilde{\varphi T}$ de φT dans $H^s(\tilde{\mathcal{U}}) \otimes \mathcal{E}$.

On met sur $H^s_{loc}(X ; E)$ la topologie de Fréchet définie par les semi-normes $T \to \|\varphi T\|_s$ qui peut en fait être définie par le sous-ensemble des semi-normes $T \to \|\varphi_i T\|_s$.

Cette topologie ne dépend évidemment pas des coordonnées choisies, à cause de l'invariance locale des H^s par difféomorphismes (exposé n° 10).

$H^s_{comp}(X ; E)$ désigne le sous-espace des distributions à support compact de $H^s_{loc}(X ; E)$; cet espace sera muni de la topologie limite inductive des $H^s_{K_j}(X ; E)$ munis de la topologie induite par $H^s_{loc}(X ; E)$.

On a les inclusions topologiques strictes suivantes :

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}(X ; E) \subset H^s_{comp}(X ; E) \subset H^s_{loc}(X ; E) \subset \overset{\circ}{\mathcal{D}}'(X ; E) \quad .$$

En outre $\overset{\circ}{\mathcal{D}}(X ; E)$ est dense dans $H^s_{comp}(X ; E)$, $H^s_{loc}(X ; E)$, $\overset{\circ}{\mathcal{D}}'(X ; E)$ et $\overset{\circ}{\mathcal{E}}'(X ; E)$. La dualité entre $\overset{n}{\mathcal{D}}_t(X ; E^*)$ et $\overset{\circ}{\mathcal{D}}'(X ; E)$ d'une part, $\overset{\circ}{\mathcal{D}}(X ; E)$ et $\overset{n}{\mathcal{D}}'(X ; E^*)$ d'autre part, définit naturellement une dualité entre les ensembles $H^s_{loc}(X ; E)$ et $H^{-s}_{comp}(X ; E^* \otimes \Omega^n_t)$; alors $H^s_{loc}(X ; E)$ est le sous-espace de $\overset{\circ}{\mathcal{D}}'(X ; E)$ constitué des éléments qui, en tant que formes linéaires sur $\overset{n}{\mathcal{D}}_t(X , E^*)$, se prolongent continuement à $H^{-s}_{comp}(X ; E^* \otimes \Omega^n_t)$.

3. Définition de $\mathcal{A}_{loc}(X ; E , F ; \rho)$ espace des opérateurs ρ-améliorants :

Soient E et F deux fibrés vectoriels complexes sur X , de dimension finie constante, de fibre-type $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.

Les opérateurs ρ-améliorants de E dans F seront les opérateurs continus de $\overset{\circ}{\mathcal{D}}(X ; E)$ dans $\overset{\circ}{\mathcal{D}}'(X ; F)$ qui possèdent les propriétés suivantes :

(i). Ils se prolongent en opérateurs continus :

$\overset{\circ}{\mathcal{D}}'(X ; E) \to \overset{\circ}{\mathcal{D}}'(X ; F)$

$\overset{\circ}{\mathcal{E}}'(X ; E) \to \overset{\circ}{\mathcal{E}}'(X ; F)$

$H^s_{loc}(X ; E) \to H^{s-\rho+1}_{loc}(X , F)$ pour tout s réel ;

(ii). Ils n'augmentent pas le support singulier.

Conséquences. - Ils se prolongent :

$\mathring{\mathcal{D}}(X\ ;\ E) \to \mathring{\mathcal{D}}(X\ ;\ F)$

$\mathring{\mathcal{E}}(X\ ;\ E) \to \mathring{\mathcal{E}}(X\ ;\ F)$

$H^{s}_{\text{comp}}(X\ ;\ E) \to H^{s-\ +1}_{\text{comp}}(X\ ;\ F)$.

L'espace des "opérateurs de degré ρ " est

$$\mathcal{L}_{\text{loc}}(X\ ;\ E\ ,\ F\ ;\ \rho) = \mathcal{A}_{\text{loc}}(X\ ;\ E\ ,\ F\ ;\ \rho + 1) \quad .$$

4. Définition de $\Gamma_{\text{loc}}(X\ ;\ E\ ,\ F\ ;\ \rho)$ espace des opérateurs de Calderon-Zygmund d'ordre ρ de type local.

Soit A un opérateur continu de $\mathring{\mathcal{D}}(X\ ;\ E)$ dans $\mathring{\mathcal{D}}'(X\ ;\ F)$. On dira que $A \in \Gamma_{\text{loc}}(X\ ;\ E\ ,\ F\ ,\ \rho)$ si :

a. $T \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(X\ ;\ E\ ,\ F\ ;\ \rho)$

b. $\forall$ φ et ψ fonctions C^∞ à supports compacts dans un même domaine de coordonnées $\mathcal{U}$, l'opérateur $\widetilde{(\varphi)\ A(\psi)}$ de $\mathring{\mathcal{D}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \otimes \mathcal{E}$ dans $\mathring{\mathcal{D}}(\widetilde{\mathcal{U}}) \otimes \mathcal{F}$, défini par transport de $(\varphi)\ T(\psi)$, appartient à $\Gamma(\widetilde{\mathcal{U}}\ ,\ \rho) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{E}\ ,\ \mathcal{F})$ (condition locale).

D'après l'invariance par difféomorphisme (exposé 10), il suffit que ce soit vrai pour des $\mathcal{U}_i$ recouvrant X .

Remarques.

Si $\rho \geqslant \rho'$: $\mathcal{A}(X\ ;\ E\ ,\ F\ ;\ \rho) \supset \mathcal{A}(X\ ;\ E\ ,\ F\ ;\ \rho')$.

Si $\rho \geqslant \rho' + 1$: $\Gamma(X\ ;\ E\ ,\ F\ ;\ \rho) \supset \mathcal{A}(X\ ;\ E\ ,\ F\ ;\ \rho')$.

$\forall$ ρ : $\mathcal{A}_{\text{loc}}(X\ ;\ E\ ,\ F\ ;\ \rho) \subset \Gamma_{\text{loc}}(X\ ;\ E\ ,\ F\ ;\ \rho) \subset \mathcal{A}_{\text{loc}}(X\ ;\ E\ ,\ F\ ;\ \rho + 1)$.

5. Définition du ρ-symbole.

$T^*_\cdot(X)$ désigne l'espace cotangent de X privé de l'image de la section nulle. $\mathcal{S}(X\ ,\ T^*_\cdot(X)\ ,\ \mathcal{L}(E\ ,\ F)\ ,\ \rho)$ désignera l'espace des sections C^∞ de l'espace fibré sur $T^*_\cdot(X)$, image réciproque de $\mathcal{L}_X(E\ ;\ F)$ par la projection $T^*_\cdot(X) \to X$, dont, pour tout $x \in X$, la restriction à $T^*_\cdot(X)$ est une fonction positivement homogène de degré ρ , à valeurs dans $\mathcal{L}(E_x\ ,\ F_x)$.

Soit $A \in \Gamma_{\text{loc}}(X\ ;\ E\ ,\ F\ ;\ \rho)$ et soit $(x\ ,\ \xi) \in T^*_\cdot(X)$ soit φ une fonction C^∞ sur X telle que $\varphi(x) = 1$, à support compact dans un domaine de coordonnées $\mathcal{U}$:

Soient α la carte choisie, $\mathcal{U} \xrightarrow{\alpha} \widetilde{\mathcal{U}}$ et η et ζ les trivialisations choisies : $E_{|\mathcal{U}} \xrightarrow{\eta} \mathcal{E}$, $F_{|\mathcal{U}} \xrightarrow{\zeta} \mathcal{F}$. On note η_x et ζ_x les isomorphismes induits par η et ζ

sur E_x et F_x. Enfin ξ^α désignera le vecteur de $\underset{\sim}{R}^n$ représentant ξ dans la carte α. Alors le ρ-symbole $\sigma_\rho(A)$ de A sera l'élément de $\mathcal{E}(X , T^*_\bullet(X) , \mathcal{L}(E , F) , \rho)$ défini par :

$$\sigma_\rho(A)(x , \xi) = \zeta_x^{-1} \circ \sigma_\rho(\widetilde{\varphi A \varphi})(\alpha(x) , \xi^\alpha) \circ \eta_x \quad .$$

On sait que cette définition ne dépend pas des coordonnées choisies pour φ choisie (cela résulte du théorème fondamental d'invariance par difféomorphisme exposé n° 10). En outre elle ne dépend pas de φ, car on peut remplacer φ par $\varphi\psi$ dans la formule de définition, pour ψ fonction C^∞ à support compact dans un domaine de coordonnées $\mathcal{U}'$ avec $\psi(x) = 1$.

6. Opérateurs différentiels d'ordre ρ (ρ entier $\geqslant 0$).

Ce sont les opérateurs de $\overset{\circ}{\mathcal{D}}(X ; E)$ dans $\overset{\circ}{\mathcal{D}}'(X ; F)$ de caractère local (exposé 1 et 2) qui sont en outre améliorants d'ordre ρ (c'est-à-dire $\in \mathcal{L}_{loc}(X ; E , F;\rho)$). Il est évident qu'ils vérifient la condition locale (b) : ce sont des opérateurs de Calderon-Zygmund d'ordre ρ et leur ρ-symbole coïncide avec la restriction a^4 $T^*_\bullet(X)$ du ρ-symbole qui a été défini précédemment. On a donc défini une application

$$\sigma_\rho : \Gamma_{loc}(X ; E , F ; \rho) \to \varepsilon(X , T^*_\bullet(X) , \mathcal{L}(E , F) \rho) \quad .$$

Cette application est évidemment linéaire.

THÉORÈME. – σ_ρ est surjective et son noyau est $\mathcal{A}_{loc}(X ; E , F ; \rho)$:

$$0 \to \mathcal{A}_{loc}(X ; E , F ; \rho) \to \Gamma_{loc}(X ; E , F ; \rho) \xrightarrow{\sigma_\rho} \mathcal{E}(X , T^*_\bullet(X) , \mathcal{L}(E , F) , \rho) \to 0 .$$

Preuve.

1° Le noyau de σ_ρ est $\mathcal{A}_{loc}(X ; E , F ; \rho)$:

Tout opérateur ρ-améliorant a un ρ-symbole nul évidemment. Réciproquement soit $A \in \Gamma_{loc}(X ; E , F ; \rho)$ tel que $\sigma_\rho(A) = 0$; montrons qu'il opère algébriquement de $H^s_{loc}(X ; E)$ dans $H^{s-\rho+1}_{loc}(X ; F)$; soit $T \in H^s_{loc}(X ; E)$, soit φ fonction C^∞ à support compact dans $\mathcal{U}$ domaine de coordonnées et soit χ fonction C^∞ à support compact dans $\mathcal{U}$ qui est égale à 1 sur le support de φ :

$$\varphi AT = \varphi A\chi T + \varphi A(1 - \chi) T \quad ;$$

or $\varphi A(1 - \chi) T$ est C^∞ (car A n'augmente pas le support singulier) et $\varphi A\chi$ est ρ-améliorant parce que son transformé dans la carte a un ρ-symbole nul ; donc

$$\varphi AT \in H^{s-\rho+1}_{loc}(X ; F) \quad \text{et} \quad AT \in H^{s-\rho+1}_{loc}(X ; F) \quad .$$

Comme $H^s_{loc}(X ; E)$ est un espace de Fréchet, on en déduit que A opère continûment de $H^s_{loc}(X ; E)$ dans $H^{s-\rho+1}_{loc}(X ; F)$ (graphe fermé). Donc $A \in \mathcal{A}_{loc}(X ; E , F ; \rho)$.

2° σ_ρ <u>est surjectif</u> :

Soit $f \in \mathcal{E}(X ; T^*_\cdot(X) , \mathcal{L}(E , F) , \rho)$. $\varphi_i f$ est à support compact dans $\mathcal{U}_i$; donc $\widetilde{\varphi_i f}$ à support compact dans $\widetilde{\mathcal{U}}_i$ se prolonge en le symbole d'un opérateur de $\Gamma(\mathbb{R}^n , \mathcal{E} , \mathcal{F} , \rho)$ qu'on peut choisir à bisupport compact dans $\widetilde{\mathcal{U}}_i$ et définit donc un opérateur $\widetilde{A}_i$ de $\Gamma(\widetilde{\mathcal{U}}_i , \mathcal{E} , \mathcal{F} , \rho)$ qu'on peut relever en un opérateur $A_i \in \Gamma_{loc}(X , E , F , \rho)$ à bisupport compact dans $\mathcal{U}_i$.

De plus $\sigma_\rho(A_i) = \varphi_i f$. Définissons alors A :

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}(X ; E) \to \overset{\circ}{\mathcal{D}}'(X ; F) \quad \text{par} \quad A = \sum_i A_i \quad .$$

Montrons que $A \in \Gamma_{loc}(X ; E , F ; \rho)$ et que $\sigma_\rho(A) = f$:

(1) A se prolonge continûment de $\overset{\circ}{\mathcal{E}}'(X ; E)$ dans $\overset{\circ}{\mathcal{E}}'(X ; F)$.

(2) A se prolonge continûment de $\overset{\circ}{\mathcal{D}}'(X ; E)$ dans $\overset{\circ}{\mathcal{D}}'(X ; F)$.

(3) A se prolonge continûment de $H^s_{loc}(X ; E)$ dans $H^{s-\rho}_{loc}(X ; F)$.

En effet $\widetilde{A}_i$ envoie $H^s(\widetilde{\mathcal{U}}_i) \otimes \mathcal{E}$ dans $H^{s-\rho}(\widetilde{\mathcal{U}}_i) \otimes \mathcal{F}$, donc, par suite de l'invariance des H^s par difféomorphisme local, A_i envoie $H^s_{loc}(X ; E)$ dans $H^{s-\rho}_{loc}(X ; F)$, donc aussi A .

(4) A n'augmente pas le support singulier.

(5) La condition locale (b) est évidemment vérifiée.

(6) Le symbole $\sigma_\rho(A)(x) = \sigma_\rho(\varphi A \varphi)(x)$ si $\varphi(x) = 1$ et si φ est C^∞ à support compact (dans un domaine de coordonnées).

Or

$$\varphi A \varphi = \sum_{\overline{\text{supp } \varphi \cap \mathcal{U}_i \neq \emptyset}} \varphi A_i \varphi$$

d'où :

$$\sigma_\rho(A)(x) = \sum_{\overline{\text{supp } \varphi \cap \mathcal{U}_i \neq \emptyset}} \sigma_\rho(\varphi A_i \varphi)(x) = \sum_{\overline{\varphi_i(x) \neq 0}} \varphi_i(x) \; f(x) = f(x) \quad .$$

7. Transposé.

Soit $A \in \Gamma_{loc}(X\ ;\ E\ ,\ F\ ;\ \rho)$; alors ${}^tA$ opère de $\overset{\circ}{\mathcal{D}}(X\ ;\ F^* \otimes_X \Omega_t^n)$ dans $\overset{\circ}{\mathcal{D}}{}'(X\ ;\ E^* \otimes_X \Omega_t^n)$. On va montrer que

$$ {}^tA \in \Gamma_{loc}(X\ ;\ F^* \otimes \Omega_t^n\ ,\ E^* \otimes \Omega_t^n\ ;\ \rho) $$

et que

$$ \sigma_\rho({}^tA) = {}^t\check{\sigma}_\rho(A) $$

le symbole $\vee$ est le changement de ξ en $-\xi$ dans l'espace des co-vecteurs tangents à X :

$$ \check{f}(x\ ,\ \xi) = f(x\ ,\ -\xi)\ , \qquad x \in X\ ,\ \ \xi \in T^*_{\cdot x}(X) \qquad . $$

Il n'y a qu'à vérifier la condition locale ; or $\varphi\ {}^tA\psi = {}^t(\psi A\varphi)$ et l'image dans une carte conserve la transposition.

D'autre part $\sigma_\rho({}^tA)(x) = \sigma_\rho(\varphi\ {}^tA\varphi)(x)$ où $\varphi(x) = 1$ et où φ est C^∞ à support compact dans $\mathcal{U}$; on a aussi

$$ \sigma_\rho({}^tA)(x) = \sigma_\rho({}^t(\varphi A\varphi))(x) = {}^t\check{\sigma}_\rho(A)(x) \qquad , $$

(où $\mathcal{U}$ est un domaine de coordonnées).

8. Composition des opérateurs.

Soient $A_1 \in \Gamma_{loc}(X\ ;\ E\ ,\ F\ ;\ \rho_1)$ et $A_2 \in \Gamma_{loc}(X\ ;\ F\ ,\ G\ ;\ \rho_2)$.

THÉORÈME. - $A_2\ A_1 \in \Gamma_{loc}(X\ ;\ E\ ,\ G\ ;\ \rho_2 + \rho_1)$ <u>et</u> $\sigma_{\rho_2+\rho_1}(A_2\ A_1) = \sigma_{\rho_2}(A_2)\circ\sigma_{\rho_1}(A_1)$.

<u>Preuve.</u> - Evidemment $A_2\ A_1 \in \mathcal{L}_{loc}(X\ ;\ E\ ,\ G\ ;\ \rho_1 + \rho_2)$.

Vérifions la condition locale : soient φ et ψ à supports compacts dans un même domaine $\mathcal{U}$:

$$ \varphi A_2\ A_1\ \psi = \varphi A_2\ \chi\chi A_1\ \psi + \varphi A_2(1 - \chi^2)\ A_1\ \psi $$

où χ est C^∞ à support compact dans $\mathcal{U}$ et $\chi = 1$ dans un voisinage du support de φ , or $A_2(1 - \chi^2)\ A_1\ \psi T$ est C^∞ , donc

$$ \varphi A_2(1 - \chi^2)\ A_1\ \psi \in \mathcal{a}_{loc}(X\ ;\ E\ ,\ G\ ;\ \rho)\ ,\ \ \forall\ \ \rho $$

d'autre part :

$$\widetilde{\varphi A_2 \chi\chi A_1 \psi} = \widetilde{\varphi A_2 \chi}\ \widetilde{\chi A_1 \psi} \in \Gamma(\tilde{\mathcal{U}}\ ,\ \rho_2 + \rho_1) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{E}\ ,\ \mathcal{G}) \quad .$$

Montrons que

$$\sigma_{\rho_2+\rho_1}(A_2\ A_1) = \sigma_{\rho_2}(A_2) \circ \sigma_{\rho_1}(A_1) \quad ;$$

soit $x \in \mathcal{U}$ domaine de coordonnées et soit φ fonction C^∞ à support compact dans $\mathcal{U}$ avec $\varphi(x) = 1$:

$$\sigma_{\rho_2+\rho_1}(A_2\ A_1)(x\ ,\ \xi) = \zeta_x^{-1} \circ \sigma_{\rho_2+\rho_1}(\widetilde{\varphi A_2\ A_1\ \varphi})(\alpha(x)\ ,\ \xi^\alpha) \circ \eta_x$$

$$= \zeta_x^{-1} \circ \sigma_{\rho_2+\rho_1}(\widetilde{\varphi A_2\ \chi}\ \widetilde{\chi A_1\ \varphi})(\alpha(x)\ ,\ \xi^\alpha) \circ \eta_x$$

$$= \zeta_x^{-1} \circ \sigma_{\rho_2}(\widetilde{\varphi A_2\ \varphi})(\alpha(x)\ ,\ \xi^\alpha) \circ \sigma_{\rho_1}(\widetilde{\varphi A_1\ \varphi})(\alpha(x)\ ,\ \xi^\alpha) \circ \eta_x$$

$$= \zeta_x^{-1} \circ \sigma_{\rho_2}(\widetilde{\varphi A_2\ \varphi})(\alpha(x)\ ,\ \xi^\alpha) \circ \theta_x \circ \theta_x^{-1}\quad \sigma_{\rho_1}(\widetilde{\varphi A_1\ \varphi})(\alpha(x)\ ,\ \xi^\alpha) \circ \eta_x$$

$$= \sigma_{\rho_2}(A_2)(x\ ,\ \xi) \circ \sigma_{\rho_1}(A_1)(x\ ,\ \xi)$$

(où η , θ et ζ sont les trivialisations choisies sur $\mathcal{U}$ des fibrés E , F , G).

9. Opérateurs elliptiques.

$A \in \Gamma_{loc}(X\ ;\ E\ ,\ F\ ;\ \rho)$ est dit ρ-elliptique si son ρ-symbole est inversible.

THÉORÈME.

$A \in \Gamma_{loc}(X\ ;\ E\ ,\ F\ ;\ \rho)$ est ρ-elliptique $\Longleftrightarrow$ $\exists$ $A' \in \Gamma_{loc}(X\ ;\ F\ ,\ E\ ;\ -\rho)$ tel que

$$A'A = I_E + C \quad \text{où} \quad C \in \mathcal{a}_{loc}(X\ ;\ E\ ,\ E\ ;\ 0)$$

et

$$AA' = I_F + D \quad \text{où} \quad D \in \mathcal{a}_{loc}(X\ ;\ F\ ,\ F\ ;\ 0) \quad .$$

Preuve. - Soit I_E l'opérateur identique sur E : alors $\sigma_\bullet(I_E)$ est l'application de $T^*_\bullet(X)$ dans $\mathcal{L}(E\ ,\ E)$ qui, à tout $(x\ ,\ \xi) \in T^*_\bullet(X)$, fait correspondre l'identité de E_x .

$\sigma_\rho(A)$ est inversible signifie qu'il existe $f \in \varepsilon(X\ ,\ T^*_\bullet(X)\ ,\ \mathcal{L}(F\ ,\ E)\ ,\ -\rho)$ tel que

$$f \circ \sigma_\rho(T) = \sigma_0(I_E) \quad .$$

Alors f est le symbole d'un opérateur $A' \in \Gamma_{loc}(X\ ;\ F\ ,\ E\ ;\ -\rho)$,

$$\sigma_{-\rho}(A') = f \quad ,$$

d'où

$$\sigma_0(A'A) = \sigma_{-\rho}(A')\ \sigma_\rho(A) = \sigma_0(I_E) \quad ;$$

ceci exprime que

$$C = A'A - I_E \in \mathfrak{a}_{loc}(X\ ,\ E\ ,\ E\ ,\ 0) \quad .$$

(Même raisonnement pour D .)

10. Hypoellipticité.

Définition. - Soit $T \in \mathring{\mathcal{D}}'(X\ ;\ E)$ et soit Ω ouvert dans X ; on dira que T est H^s dans Ω si , $\forall\ \varphi$ fonction C^∞ à support compact dans Ω , $\varphi T \in H^s_{loc}(X\ ,\ E)$.

LEMME. - Soient $A \in \mathcal{E}_{loc}(X\ ;\ E\ ,\ F\ ;\ \rho)$ et T qui est H^s dans Ω . Alors AT est $H^{s-\rho}$ dans Ω .

Preuve. - Soit φ fonction C^∞ à support compact dans Ω :

$$\varphi AT = \varphi A\chi T + \varphi A(1 - \chi)\ T$$

avec χ fonction C^∞ à support compact dans Ω et égale à 1 dans un voisinage du support de φ : $\varphi A(1-\chi)\ T$ est C^∞ dans X , car A n'augmente pas le support singulier, d'autre part

$$\chi T \in H^s_{loc}(X\ ;\ E)\ , \quad \text{donc} \quad \varphi A\chi T \in H^{s-\rho}_{loc}(X\ ,\ F) \quad .$$

THÉORÈME. - Soit A , ρ-elliptique, $A \in \Gamma_{loc}(X\ ;\ E\ ,\ F\ ;\ \rho)$; soit $T \in \mathring{\mathcal{D}}'(X\ ;\ E)$ et soit Ω un ouvert où AT est $H^{s-\rho}$; alors T est H^s_{loc} dans Ω .

COROLLAIRE. - Tout opérateur A , ρ-elliptique, est hypo-elliptique :

$$AT \text{ est } C^\infty \text{ dans } \Omega \iff T \text{ est } C^\infty \text{ dans } \Omega \quad .$$

Preuve du théorème. - On peut supposer Ω relativement compact, alors T est d'ordre fini, soit $\in H^\lambda$ dans Ω . On peut supposer $\lambda - s$ entier.

Soit $A' \in \Gamma_{loc}(X ; F , E ; - \rho)$ et soit $C \in \mathcal{A}_{loc}(X ; E , E ; 0)$ tel que

$$A'A = I_E + C \quad .$$

Montrons par récurrence que T est H^s_{loc} dans Ω : si $\lambda \leqslant s - 1$: AT est $H^{s-\rho}_{loc}$ dans Ω, donc $A'AT$ est H^s_{loc} dans Ω et CT est $H^{\lambda+1}_{loc}$ dans Ω ; donc T est $H^{\lambda+1}_{loc}$ dans Ω. D'où T est H^s_{loc} dans Ω.

Remarque. - Il suffit, bien entendu, de supposer A elliptique dans Ω. Alors si A' est un symbole inverse de celui de A dans Ω, et si $\varphi \in \mathring{\mathcal{D}}(\Omega)$, $(\varphi)\, C$ a un symbole nul partout, donc appartient à

$$\mathcal{A}(X ; E , F ; 0) = \mathcal{L}(X ; E , F ; 1) \quad .$$

Alors si T est H^{λ}_{loc} dans Ω, le lemme montre quand même que φCT est $H^{\lambda+1}_{loc}$ dans Ω, donc aussi CT, d'où le résultat.