LOUIS BOUTET DE MONVEL

Transformation des opérateurs de Calderon-Zygmund par difféomorphisme

Séminaire Henri Cartan, tome 16, n° 1 (1963-1964), exp. n° 10, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1963-1964__16_1_A10_0>

Séminaire CARTAN-SCHWARTZ
16e année, 1963/64, n° 10

13 et 20 janvier 1964

TRANSFORMATION DES OPÉRATEURS DE CALDERON-ZYGMUND PAR DIFFÉOMORPHISME

par Louis BOUTET de MONVEL

Cet exposé a pour but de montrer que les opérateurs de Calderon-Zygmund qui semblent faire intervenir la structure affine de l'espace sur lequels ils ont été définis, sont en fait invariants par difféomorphisme. Ceci permettra de définir un opérateur de Calderon-Zygmund sur une variété.

Dans cet exposé, nous nous placerons toujours sur $\underset{\sim}{R}^n$ ou sur un ouvert de $\underset{\sim}{R}^n$. Rappelons que les espaces H^s (et tous ceux qui interviendront dans cet exposé) sont des espaces de courants impairs de degré 0 ; mais comme dans les deux exposés précédents, nous les identifions aux espaces de distributions auxquels ils sont canoniquement isomorphes.

I. Transformation par difféomorphisme des espaces H^s.

Soit K un compact de $\underset{\sim}{R}^n$. H_K^s désigne l'espace des distributions $\varphi \in H_s$, à support dans K, muni de la norme induite par celle de l'espace H^s.

THÉORÈME 1. - Soit u un difféomorphisme C^∞ d'un voisinage ouvert Ω de K sur un ouvert de $\underset{\sim}{R}^n$. Pour tout s, l'extension de u à l'espace des distributions est un isomorphisme de H_K^s sur $H_{u(K)}^s$.

Démonstration. - C'est évident pour $s = 0$, car $H_K^0 = L_K^2$ (Bien entendu, u ne conserve pas la mesure de Lebesgue ; mais il la transforme en une mesure comprise sur K, entre c et C fois la mesure de Lebesgue, c et C constantes).

Nous allons le démontrer dans le cas $0 < s < 1$. Le théorème sera alors vrai pour $s > 0$, par récurrence sur s, car, pour $s \geqslant 1$, H_K^s est exactement l'espace des $\varphi \in L^2(K)$ telles que $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \in H_K^{s-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, et la norme de H_K^s est équivalente à la norme

$$\|\varphi\| = \|\varphi\|_{H^0} + \sum \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\|_{H^{s-1}} .$$

Enfin par dualité, il sera vrai pour $s \leqslant 0$ (alors H_K^s est l'espace des distributions à support dans K, qui sont des formes linéaires continues sur $\mathcal{D}(\underset{\sim}{R}^n)$ muni de la topologie induite par celle de H^{-s}).

Démonstration dans le cas $0 < s < 1$.

LEMME 1. - Si $0 < s < 1$, la norme N , définie par

$$N(\varphi) = \left(\int |\varphi(x)|^2 \, dx + \iint |\varphi(x) - \varphi(y)|^2 |x - y|^{-n-2s} \, dx \, dy \right)^{1/2}$$

est finie sur H^s , et équivalente à sa norme usuelle.

En effet, la deuxième intégrale vaut

$$\int |\varphi(x + y) - \varphi(y)|^2 \, |x|^{-n-2s} \, dx \, dy = \int |x|^{-n-2s} \, dx \int |\varphi(x + y) - \varphi(y)|^2 \, dy \ .$$

Désignons par $\hat{\varphi}(\xi)$ la transformée de Fourier de $\varphi \in H^s \subset L^2(\underset{\sim}{R}^n)$. La transformée de Fourier de $\varphi(x + y)$, considérée comme fonction de y seul, est $e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle}\hat{\varphi}(\xi)$. La formule de Plancherel montre que

$$\int |\varphi(x + y) - \varphi(y)|^2 \, dy = \int |e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle} - 1|^2 \, |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \, d\xi \ ,$$

de sorte que l'intégrale étudiée vaut

$$\int |x|^{-n-2} \, dx \int |e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle} - 1|^2 \, \hat{\varphi}(\xi) \, dx$$
$$= \int |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \, d\xi \int |e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle} - 1|^2 \, |x|^{-n-2s} \, dx$$

(remarquons que cette intégrale converge pour $0 < s < 1$).

Enfin

$$A(\xi) = \int |x|^{-n-2s} \, |e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle} - 1|^2 \, dx$$

est une fonction finie, positive, de ξ , invariante par rotation, et homogène de degré $2s$; donc $A(\xi) = a|\xi|^{2s}$ $(a > 0)$.

On voit finalement que

$$\iint |\varphi(x) - \varphi(y)|^2 \, |x - y|^{-n-2s} \, dx \, dy = \int |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \, a|\xi|^{2s} \, d\xi \ ;$$

et

$$N(\varphi) = \left(\int |\hat{\varphi}(\xi)|^2 (1 + a|\xi|^2) \, d\xi \right)^{1/2} .$$

Ce qui montre bien que $N(\varphi)$ est équivalente à la norme usuelle de H_s :

$$\|\varphi\|_{H_s} = \left(\int |\hat{\varphi}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s \, d\xi \right)^{1/2} .$$

COROLLAIRE. - La norme de H^s_K est équivalente à la norme

$$N_1(\varphi) = \left(\int_K |\varphi(x)|^2 \, dx + \iint_{K_1 \times K_1} |\varphi(x) - \varphi(y)|^2 \, |x - y|^{-n-2s} \, dx \, dy \right)^{1/2}$$

K_1 désignant un voisinage compact de K .

En effet, on vérifie sans peine que le terme négligé :

$$\iint_{C(K_1 \times K_1)} |\varphi(x) - \varphi(y)|^2 \, |x - y|^{-n-2s} \, dx \, dy$$

est uniformément dominé par $\|\varphi\|^2_{H^s} = \int_K |\varphi(x)|^2 \, dx$ quand $\operatorname{Supp} \varphi \subset K$.

Si u est un difféomorphisme C^∞ de $\Omega \supset K$ sur $\omega \subset \mathbb{R}^n$, on peut choisir $K_1 \subset \Omega$.

La différentielle de u et son inverse sont alors uniformément bornées sur K_1 ; par suite, la fonction $\dfrac{|x - y|}{|u(x) - u(y)|}$, et son inverse $\dfrac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|}$ sont bornées sur K_1 ; et la norme $N_1(\varphi)$ est encore équivalente à la norme $N_2(\varphi)$ définie par

$$N_2(\varphi) = \left(\int_K |\varphi(x)|^2 \, du(x) + \iint_{K_1 \times K_1} |\varphi(x) - \varphi(y)|^2 \, |u(x) - u(y)|^{-n-2s} \, du(x) \, du(y) \right)^{1/2}$$

($du(x)$ désignant l'image réciproque par u de la mesure de Lebesgue sur ω).

Ceci signifie exactement que l'extension de u à l'espace des fonctions définit un isomorphisme $H^s_K \to H^s_{u(K)}$.

C. Q. F. D.

II. Transformation par difféomorphisme des opérateurs de Calderon-Zygmund.

1. Enoncé du théorème.

Rappelons que le bisupport d'un opérateur $h : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est le plus petit fermé F tel que

1° $\operatorname{Supp} h\varphi \subset F$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}$;

2° $h\varphi = 0$ si $\operatorname{Supp} \varphi \cap F = \emptyset$

(F est aussi le plus petit fermé de $\mathbb{R}^n$ tel que $F \times F$ contienne le support du noyau-distribution définissant h).

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

DÉFINITION 1. – <u>On appelle opérateur de Calderon-Zygmund, à bisupport compact sur Ω , la restriction $\mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ d'un opérateur de Calderon-Zygmund sur $\mathbb{R}^n$, à bisupport compact inclus dans Ω .</u>

<u>Même définition pour les opérateurs de Calderon-Zygmund vectoriels.</u>

Le symbole d'un tel opérateur sera lui aussi défini par restriction. C'est une fonction numérique (resp. à valeurs dans un espace d'applications linéaires), définie sur $T_0^*\Omega$ (complémentaire de la section nulle du fibré cotangent à Ω), de classe C^∞ , et nulle au-dessus du complémentaire d'un compact de Ω .

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - Si u est un difféomorphisme C^∞ d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sur un autre : ω , et si h est un opérateur de Calderon-Zygmund d'ordre ρ , à bisupport compact, sur Ω ,

1° l'image $u(h)$ de h par u est un opérateur de Calderon-Zygmund d'ordre ρ à bisupport compact sur ω ,

2° le symbole de $u(h)$ est l'image par u du symbole de h .

Rappelons que $u(h)$ opère en fait de $\mathcal{D}(\omega)$ dans $\mathcal{D}(\omega)$ puisqu'il est à bisupport compact.

$u(h)$ est défini par

$$u(h).\varphi = [h(\varphi \circ u)] \bullet u^{-1} \quad \text{si} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\omega) .$$

L'image du symbole σ de h par u est la fonction $u(\sigma)$ sur $T_0^*\omega$, définie par

$$u(\sigma)(x , \xi) = \sigma(u^{-1}(x) , {}^t\!Du(u^{-1}(x)).\xi)$$

(ξ désignant un vecteur cotangent sur ω , x sa projection, et Du la différentielle de u).

Avant d'aborder la démonstration, nous allons faire quelques réductions.

Remarque 1. - Le théorème 2 est vrai pour les opérateurs différentiels (cf. exposés 1 et 2).

Remarque 2. - Le § I montre qu'il est vrai pour les opérateurs de Calderon-Zygmund d'ordre ρ , à bisupport compact, ρ-améliorants.

Remarque 3. - Si le théorème est vrai pour deux opérateurs h_1 et h_2 , il est vrai pour leur produit $h_1 \circ h_2$.

Nous allons démontrer le théorème pour les opérateurs d'ordre ρ , quand $-n<\rho<0$. Le théorème résultera alors des remarques 1, 2 et 3, et du lemme suivant :

LEMME 2. - Tout opérateur de Calderon-Zygmund d'ordre ρ , à bisupport compact sur Ω est égal, à un opérateur ρ-améliorant près, au produit d'un opérateur différentiel, et d'une suite d'opérateurs de Calderon-Zygmund $h_1 , h_2 , \dots , h_r$ d'ordres $\rho_1 , \rho_2 , \dots , \rho_r$, avec $-n < \rho_i < 0$, à bisupports compacts.

Démonstration. - Il suffit (d'après l'exposé n° 9) de montrer que si $\sigma(x, \xi)$ est un ρ-symbole nul pour $x \notin K$ (K compact $\subset \Omega$), on a

$$\sigma(x, \xi) = \sigma_0(x, \xi) \times \sigma_1(x, \xi) \times \dots \times \sigma_r(x, \xi),$$

où $\sigma_0(x, \xi)$ est le symbole d'un opérateur différentiel,

$\sigma_1(x, \xi), \dots, \sigma_r(x, \xi)$ des symboles d'ordre $\rho_1, \dots, \rho_r$, avec $-n<\rho_i<0$,

et $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_r$ sont tous nuls pour $x \notin K'$ (K' compact $\subset \Omega$).

En effet, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, égale à 1 sur K. Soit p un entier tel que $\rho - 2p < 0$. Et soit r un entier tel que $-n < \rho' = \frac{\rho - 2p}{r} < 0$.

On peut prendre

$$\sigma_0 = \varphi(x) . |\xi|^{2p} \qquad \text{(symbole d'un "laplacien" itéré)}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_{r-1} = \varphi(x) . |\xi|^{\rho'}$$

$$\sigma_r = \sigma(x, \xi) . |\xi|^{-2p-(r-1)\rho'} = \sigma(x, \xi) . |\xi|^{-\rho+\rho'}$$

2. Etude du noyau des opérateurs de Calderon-Zygmund d'ordre $\rho < 0$.

PROPOSITION 1. - Soit $\psi(x) \in \mathcal{S}(\underset{\sim}{R}^n)$, et soit

$$B(x, z) \in \mathcal{S}(\underset{\sim}{R}^n) \hat{\otimes} \mathcal{E}(\Sigma ; -n-\rho) \qquad (\rho < 0)$$

(espace des fonctions C^∞, homogènes de degré $-n-\rho$ en z, "à décroissance rapide" en x).

Alors $B(x, x-y)\, \psi(y)\, dy$ est le noyau d'un opérateur de Calderon-Zygmund d'ordre ρ, dont le symbole est

$$\sigma(x, \xi) = \psi(x)\, \mathcal{F}_z\, B(x, z)\, (\xi) .$$

Rappelons que si $N(x, y)$ est sommable, l'opérateur de noyau $N(x, y)\, dy$ est défini par

$$f(x) \rightsquigarrow g(x) = \int N(x, y)\, f(y)\, dy .$$

Nous rappelons le résultat suivant [GARDING (démontré dans l'exposé n° 8, § 4)] :

LEMME 3. - La transformation de Fourier est un isomorphisme de l'espace des distributions homogènes de degré $-n-\rho$, C^∞ en dehors de l'origine, sur l'espace des distributions homogènes de degré ρ, C^∞ en dehors de l'origine.

$\mathcal{F}_z\, B(x, z)\, (\xi)$ désigne la restriction au complémentaire de l'origine de la transformée de Fourier partielle par rapport à z de $B(x, z)$. C'est une fonction de x , ξ qui, d'après le lemme 3, appartient à

$$\mathcal{S}(\underset{\sim}{R}^n) \hat{\otimes} \mathcal{E}(\Sigma \,;\, -\rho) = \mathcal{S}(T_0^* \underset{\sim}{R}^n \,;\, \rho)$$

(espace des symboles d'ordre ρ).

<u>Démonstration de la proposition</u> 1.

1° <u>Cas où</u> $B(x\,,\,z) = \varphi(x)\, B(z)$ <u>avec</u> $\varphi \in \mathcal{S}(\underset{\sim}{R}^n)$, $B \in \mathcal{S}(\Sigma \,;\, -n-\rho)$.

Alors l'opérateur h de noyau $B(x\,,\,x-y)\,\psi(y)\,dy$ est le produit de trois opérateurs

$$h = (\varphi) \circ (B) \circ (\psi)$$

où (φ) (resp. (ψ)) désigne l'opérateur de multiplication par la fonction $\varphi \in \mathcal{S}$ (resp. $\psi \in \mathcal{S}$), et (B) désigne l'opérateur de convolution avec la distribution définie par B : si $f \in \mathcal{S}(\underset{\sim}{R}^n)$,

$$(B).f = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}B.\mathcal{F}f) .$$

D'après le lemme 3, $\mathcal{F}B$ est une distribution C^∞ , homogène de degré ρ en dehors d'un voisinage compact de l'origine.

La proposition 5 bis de l'exposé n° 9 montre alors que h est un opérateur de Calderon-Zygmund, qui a pour symbole

$$\sigma_h(x\,,\,\xi) = \varphi(x)\,\psi(x)\,\mathcal{F}B(\xi) = \psi(x)\,\mathcal{F}_z\,B(x\,,\,z)\,(\xi) .$$

2° <u>Le cas général se déduit du précédent par passage au produit tensoriel complété</u>.

En effet considérons les trois applications bilinéaires suivantes :

$$\mathcal{S}(\underset{\sim}{R}^n) \times \mathcal{E}(\Sigma \,;\, -n-\rho) \longrightarrow \bigcap \mathcal{L}(H^s\,,\,H^{s-\rho})$$

définie par $(\varphi\,,\,B) \rightsquigarrow h$ (h désignant l'opérateur de noyau $\varphi(x)B(x\,,\,x-y)\psi(y)dy$).

$$\mathcal{S}(\underset{\sim}{R}^n) \times \mathcal{E}(\Sigma \,;\, -n-\rho) \to \mathcal{S}(T_0^* \underset{\sim}{R}^n \,;\, \rho)$$

définie par $(\varphi\,,\,B) \rightsquigarrow \sigma_{(h)} = \psi(x)\,\mathcal{F}_z\,B(x\,,\,z)\,(\xi)$ (symbole de l'opérateur h ci-dessus)

$$\mathcal{S}(\underset{\sim}{R}^n) \times \mathcal{E}(\Sigma \,;\, -n-\rho) \to \bigcap \mathcal{L}(H^s\,,\,H^{s-\rho+1})$$

définie par $(\varphi\,,\,B) \rightsquigarrow h - \Theta(\sigma_{(h)})$ où $\Theta(\sigma_{(h)})$ désigne l'opérateur de Calderon-Zygmund canonique défini par le symbole $\sigma_{(h)}$ (exposé n° 9).

Ces trois applications sont continues, donc se prolongent à $\mathcal{S}(\underset{\sim}{R}^n) \hat{\otimes} \mathcal{E}(\Sigma\,;\,-n-\rho)$.

Ainsi, si h désigne l'opérateur de noyau $B(x\,,\,x-y)\,\psi(y)\,dy$ de la proposition 1, et $\sigma(h)$ la fonction $\psi(x)\,\mathcal{F}_z\,B(x\,,\,z)\,(\xi)$, $h - \Theta(\sigma_{(h)})$ est un opérateur

ρ-améliorant. Donc h est un opérateur de Calderon-Zygmund, d'ordre ρ, et a pour symbole $\sigma(h)$.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. - On suppose $-n < \rho < 0$.
Soit h un opérateur de Calderon-Zygmund d'ordre ρ, à bisupport compact K.

Il existe un opérateur h', différent de h par un opérateur ρ-améliorant, et ayant pour noyau

$$\varphi(x)\ B(x\ ,\ x-y)\ \psi(y)\ dy$$

où $B(x\ ,\ z)$ est C^∞ pour $z \neq 0$, homogène de degré $-n-\rho$ en z ; φ et ψ sont C^∞, à support dans un voisinage compact donné de K.

En effet, si ρ est compris entre $-n$ et 0, toute fonction C^∞, homogène de degré ρ pour $\xi \neq 0$, est sommable au voisinage de 0, et définit une distribution homogène de degré ρ. Comme il n'y a pas de distribution homogène de degré ρ à support ponctuel, le lemme 3 montre que la transformation de Fourier est un isomorphisme de $\mathcal{E}(\Sigma\ ;\ -n-\rho)$ sur $\mathcal{E}(\Sigma\ ;\ \rho)$. L'application

$$B(x\ ,\ z) \rightsquigarrow \mathcal{F}_z\, B(x\ ,\ z)\ (\xi)$$

est alors un isomorphisme de $\mathcal{S}(\underset{\sim}{R}^n)\ \hat{\otimes}\ \mathcal{E}(\Sigma\ ;\ -n-\rho)$ sur $\mathcal{S}(\underset{\sim}{R}^n)\ \hat{\otimes}\ \mathcal{E}(\Sigma\ ;\ \rho)$.

Soit $\sigma(x\ ,\ \xi)$ le symbole de h. On a $\sigma(x\ ,\ \xi) = \mathcal{F}_z\, B(x\ ,\ z)\ (\xi)$ pour une fonction $B(x\ ,\ z) \in \mathcal{S}(\underset{\sim}{R}^n)\ \hat{\otimes}\ \mathcal{E}(\Sigma\ ;\ -n-\rho)$ convenable.

Comme $\sigma(x\ ,\ \xi)$ est nul si $x \notin K$, on a $\sigma(x\ ,\ \xi) = \varphi(x)\ \psi(x)\ \mathcal{F}_z\, B(x\ ,\ z)\ (\xi)$ si φ et ψ (appartenant à $\mathcal{D}(\underset{\sim}{R}^n)$) sont égales à 1 au voisinage de K. On peut en outre supposer φ et ψ nulles en dehors d'un voisinage donné de K.

Alors l'opérateur h' de noyau $\varphi(x)\ B(x\ ,\ x-y)\ \psi(y)\ dy$ est un opérateur de Calderon-Zygmund d'ordre ρ, et a même symbole que h, d'après la proposition 1. Il diffère donc de h par un opérateur ρ-améliorant.

3. Démonstration du théorème 2 pour les opérateurs d'ordre ρ (quand $-n < \rho < 0$).

u désigne un difféomorphisme C^∞ : $\Omega \to \omega$, $v = u^{-1}$ désignera le difféomorphisme inverse.

Soit h un opérateur de Calderon-Zygmund, à bisupport compact, d'ordre ρ $(-n < \rho < 0)$ sur Ω. Le corollaire de la proposition 1, et la remarque 2 suivant l'énoncé du théorème permettent de supposer que h a pour noyau

$$\varphi(x)\ B(x\ ,\ x-y)\ \psi(y)\ dy$$

(avec $\varphi\ ,\ \psi \in \mathcal{D}(\underset{\sim}{R}^n)$; $B(x\ ,\ z)$ étant C^∞ , homogène de degré $-n+\alpha$ pour $z \neq 0$).

L'opérateur $u(h)$ est alors défini par :

$$u(h).f = g(x) = \int_\Omega \varphi(vx)\ B(vx,\ vx-y)\ \psi(y)\ f(uy)\ dy$$

$$= \int_\omega \varphi(vx) B(vx\ ,\ vx-vy)\ \psi(vy)\ f(y)\ J(y)\ dy$$

(avec $J(y) = |\det Dv(y)|$, Dv désignant la différentielle de v).

$u(h)$ <u>a donc pour noyau</u>

$$\varphi(vx)\ B(vx\ ,\ vx-vy)\ \psi(vy)\ J(y)\ dy\ .$$

Pour pouvoir appliquer la proposition 2, nous allons faire un développement de Taylor de v et de B :

$$v(x) - v(y) = Dv(x).(x-y) + \sum_{2\leqslant|k|\leqslant r} \frac{v^{(k)}}{k!}(x).(x-y)^k + \varepsilon(x\ ,\ y)$$

où $\varepsilon(x\ ,\ y)$ est une fonction C^∞ , dominée par $|x-y|^{r+1}$ sur tout compact.

$$B(X\ ,\ a+c) = B(X\ ,\ a) + \sum_{1\leqslant|\rho|\leqslant m} \frac{\partial^\rho}{\partial z^\rho} B(X\ ,\ a).c^\rho + \eta(X\ ,\ a\ ,\ c)$$

D'où en composant :

$$B(vx\ ,\ vx-vy) = B(vx\ ,\ Dv(x).(x-y)) + \ldots$$

Le premier terme est C^∞ pour $x \neq y$, homogène de degré $-n+\alpha = -n-\rho$ en $(x-y)$. L'opérateur h_1 qui lui correspond est, d'après la proposition 1, un opérateur de Calderon-Zygmund d'ordre ρ , qui a pour symbole

$$\sigma_{h_1}(x\ ,\ \xi) = \varphi(vx)\ \psi(ux)\ J(x)\ [\mathcal{F}_z\ B(vx\ ,\ Du(x).z)]\ (\xi)$$

$$= \varphi(ux)\ \psi(vx)\ [\mathcal{F}_z\ B(ux\ ,\ Du(x).z).|\det Dv(x)|]\ (\xi)$$

$$= \varphi(vx)\ \psi(ux)\ [\mathcal{F}_z\ B(vx\ ,\ z)]\ ({}^tDv^{-1}(\xi)) = u(\sigma_h)\ (x\ ,\ \xi)\ .$$

En examinant les autres termes du développement, nous allons montrer que $h - h_1$ est un opérateur ρ-améliorant .

Les autres termes se séparent en deux sortes :

1° Termes où ne figure aucun des restes (ε ou η). On vérifie qu'ils sont homogènes, de degré $\geqslant -n+\alpha+1$ en $(x-y)$. Les opérateurs qui leur correspondent sont donc ρ- améliorants d'après la proposition 1.

2° Termes où figure le reste du développement de Taylor de v ou de B .

Nous allons montrer que, pour s donné, les noyaux correspondant à ces termes opèrent continûment $H^s \to H^{s-\rho+1}$ si les développements ont été poussés assez loin. Pour cela, nous nous servirons du lemme suivant :

LEMME 4. - <u>Si</u> $N(x, y)$ <u>est de classe</u> C^{2k}, <u>à support compact, l'opérateur de noyau</u> $N(x, y)\,dy$ <u>opère continûment</u> $H^s \to H^k$ <u>pour</u> $|s| \leqslant k$.

L'hypothèse entraîne que $x \rightsquigarrow N_x$ $(N_x(y) = N(x, y))$ est une fonction k fois continûment différentiable : $\underset{\sim}{R}^n \to \mathcal{D}^k(\underset{\sim}{R}^n)$. Le noyau $N(x, y)\,dy$ opère donc continûment $\mathcal{D}'^k \to \mathcal{D}^k$, et a fortiori, il opère continûment $H^s \to H^k$ pour $|s| \leqslant k$.

Examinons d'abord le reste $\eta(x, y)$ provenant du développement de Taylor de B. Il est C^∞ pour $x \neq y$. Il s'agit d'étudier son comportement au voisinage de la diagonale.

Posons comme ci-dessus

$$\eta(X, a, c) = B(X, a + c) - B(X, a) - \sum_{1 \leqslant |\ell| \leqslant m} \frac{\partial^\ell}{\partial z^\ell} B(X, a) . c^\ell .$$

Sous forme intégrale, ce reste s'écrit

$$\eta(X, a, c) = \int_0^1 \left(\frac{d}{dt}\right)^{m+1} B(X ; a + tc) \frac{(t-1)^m}{m!}\,dt$$

(formule valable si $a + tc \neq 0$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$).

En se servant du fait que $B(x, z)$ est homogène de degré $-n-\rho$ en z, on montre sans difficulté qu'une dérivée d'ordre k par rapport à X, a, c de $\left(\frac{d}{dt}\right)^{m+1} B(X, a + tc)$ est dominée par

$$(|a| - |c|)^{(-n-\rho)-(m+1)-k} \, |c|^{(m+1)-k}$$

quand a et c tendent vers 0, avec $|c| \leqslant |a|$, uniformément quand $0 \leqslant t \leqslant 1$ et quand X parcourt un compact.

La même majoration vaut pour $\eta(X, a, c)$.

Enfin comme $X = vx$,

$$a = vx - vy = O(|x - y|) \quad \text{sur tout compact}$$

$$\text{et} \quad c = vx - vy - Dv(x).(x - y) = O(|x - y|^2)$$

sont des fonctions C^∞ de x et y, une dérivée d'ordre k de $\eta(x, y)$ est dominée sur tout compact par

$$|x - y|^{(-n-\rho)-(m+1)-k} \, |x - y|^{2(m+1)-2k} = |x - y|^{(-n-\rho-3k)+(m+1)} .$$

Par suite, si l'ordre m du développement de B est assez grand, $\eta(x , y)$ et ses dérivées d'ordre $\leqslant 2p$ tendent vers 0 quand $|x - y| \to 0$. $\eta(x , y)$ est de classe C^{2p}, et le noyau correspondant opère continûment $H^s \to H^{s-\rho+1}$ si on a choisi $p \geqslant |s|$, $|s - \rho + 1|$, d'après le lemme 3.

m étant choisi comme ci-dessus, montrons que les autres termes (où figure le reste $\varepsilon(x , y)$) sont eux aussi suffisamment différentiables, donc que les noyaux qui leur correspondent opèrent continûment $H^s \to H^{s-\rho+1}$ si l'ordre r du développement de v est assez grand. Cela résulte immédiatement de la remarque suivante : si $a(x , z)$ est C^∞, homogène de degré k en z, pour $z \neq 0$, et si $\varepsilon_1(x , z)$ est C^∞, dominée sur tout compact par $|z|^{\ell+1}$, le produit $a(x , x - y)\ \varepsilon_1(x, x - y)$ est de classe $C^{k+\ell}$. (Les termes où figure le reste du développement de v sont de cette forme, avec $k \geqslant - n - \rho - m$, $\ell \geqslant r$) Ainsi, si les développements ont été poussés assez loin, tous les noyaux correspondant aux restes opèrent continûment $H^s \to H^{s-\rho+1}$.

Si h_1 désigne comme ci-dessus l'opérateur de Calderon-Zygmund de noyau

$$\varphi(vx)\ B(vx , Dv(x).(x - y))\ \psi(vy)\ J(y)\ dy ,$$

on voit que $u(h) - h_1$ opère continûment $H^s \to H^{s-\rho+1}$. Comme ceci est vrai pour tout s, c'est un opérateur ρ-améliorant.

Par suite $u(h)$ est un opérateur de Calderon-Zygmund d'ordre ρ, et a même symbole que h_1 c'est-à-dire $u(\sigma_h)$

C. Q. F. D.

Ceci, avec les remarques qui suivent l'énoncé du théorème, en achève la démonstration.

COROLLAIRE 1. - L'énoncé du théorème 2 s'applique sans modification aux opérateurs de Calderon-Zygmund vectoriels.

COROLLAIRE 2. - Soient U , V deux isomorphismes de fibrés vectoriels C^∞
$U : \Omega \times E \to \omega \times E \quad ((x , e) \rightsquigarrow (u(x) , A(x).e))$
$V : \Omega \times F \to \omega \times F \quad ((x , f) \rightsquigarrow (u(x) , B(x).f))$
au-dessus du même difféomorphisme $u : \Omega \to \omega \subset \underset{\sim}{R}^n$. Soit h un opérateur de Calderon-Zygmund à bisupport compact, d'ordre ρ, sur Ω, de E dans F.

L'image de h par (U , V) est un opérateur de Calderon-Zygmund h_1 d'ordre ρ à bisupport compact, sur ω, de E dans F ; et le symbole de h_1 est

$$\sigma_{h_1}(x , \xi) = B(u^{-1} x)\ \sigma_h(u^{-1} x , {}^t Du(x).\xi)\ A^{-1}(u^{-1} x) .$$

<u>Démonstration</u>. - Le théorème 2 permet de supposer que u est l'identité. L'image h_1 de h est alors définie par

$$h_1(\varphi) = B(x)\ [h(A^{-1}(t)\ \varphi(t))]\ (x) \qquad \text{si} \quad \varphi \in \mathcal{D}_E(\Omega)\ .$$

Si $\lambda(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$ est égale à 1 sur un voisinage du bisupport de h, on a, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}_E(\Omega)$,

$$h_1(\varphi) = \lambda(x)\ B(x).[h.(\lambda(t)\ A^{-1}(t)\ \varphi(t))]\ (x)$$

or $\varphi \rightsquigarrow \lambda(t)\ A^{-1}(x)\ \varphi(x)$ (resp. $\psi \rightsquigarrow \lambda(x)\ B(x)\ \psi(x)$) est un opérateur de Calderon-Zygmund d'ordre 0 de E dans E (resp. F dans F) qui a pour symbole $\sigma(x\ ,\ \xi) = \lambda(x)\ A^{-1}(x)$ (resp. $\lambda(x)\ B(x)$). h_1 est donc un opérateur de Calderon-Zygmund, et a pour symbole

$$\lambda(x)\ B(x).\sigma_h(x\ ,\ \xi).\lambda(x)\ A^{-1}(x) = B(x)\ \sigma_h(x\ ,\ \xi)\ A^{-1}(x)\ .$$

Si on définit le symbole de h comme une section du fibré $T_0^*\Omega$ dans le fibré

$$\mathcal{L}(\Omega \times E\ ,\ \Omega \times F) \simeq \Omega \times \mathcal{L}(E\ ,\ F)\ ,$$

on voit que le symbole de l'image de h est l'image du symbole de h.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HÖRMANDER (Lars). - Linear partial differential operators. - Berlin, Springer-Verlag, 1963 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 116).

[2] SEELEY (R. T.). - Singular integrals on compact manifolds, Amer. J. of Math., t. 81, 1959, p. 658-690.