Jean Cerf

La nullité de $\pi_0(\mathrm{Diff}\, S^3)$. 2. Espaces fonctionnels liés aux décompositions d'une sphère plongée dans $\mathbb{R}^3$

Séminaire Henri Cartan, tome 15 (1962-1963), exp. n° 20, p. 1-29
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1962-1963__15__A8_0>

LA NULLITÉ DE $\pi_0(\text{Diff } S^3)$.

2. ESPACES FONCTIONNELS LIÉS AUX DÉCOMPOSITIONS D'UNE SPHÈRE PLONGÉE DANS $\underset{\sim}{R}^3$

par Jean CERF

1. Décompositions d'une sphère plongée dans $\underset{\sim}{R}^3$

1. Variétés avec arêtes rentrantes.

Dans cet exposé, et dans la suite, on élargit légèrement la notion de variété à bord anguleux définie en [4] ; on considère des variétés différentiables qui peuvent avoir sur leur bord, outre les singularités habituelles, des "arêtes rentrantes". Soit M une telle variété, de dimension n ; en un point d'une arête rentrante de M, il existe une carte locale dont le modèle soit le complémentaire de la partie $\{x_n > 0 \, , \; x_{n-1} > 0\}$ de $\underset{\sim}{R}^n$. La variété M s'identifie donc au voisinage de chacun de ses points soit à une variété à bord anguleux au sens de [4], soit à l'adhérence du complémentaire dans $\underset{\sim}{R}^n$ d'une telle variété. Il en résulte que le bord de M possède encore un "voisinage prismatique" ; on peut donc comme en [2] définir l'arrondie M' de M comme une sous-variété de M, et généraliser les autres résultats de [2], notamment la proposition 2 (resp. 2') d'après laquelle les groupes de difféomorphismes avec bord fixe (resp. les espaces de plongements) de M et M' ont même type d'homotopie.

Soit M une variété au sens ci-dessus. On suppose que l'arrondie M' de M est difféomorphe à D^n ; cela entraîne évidemment que M est homéomorphe à D^n. Un certain nombre de propriétés simples de D^n sont encore vraies pour M, en particulier le "théorème d'isotopie" :

Soit M une variété orientée dont l'arrondie soit difféomorphe à D^n ; soit V une variété connexe, orientée, de dimension n ; soient f et f' deux plongements de M dans $V - \partial V$ ayant même orientation ; il existe une isotopie γ de V, induisant l'identité sur ∂V, telle que $\gamma . f' = f$.

[En effet, l'espace des plongements de D^n dans $V - \partial V$ qui ont une orientation donnée, par exemple positive, est connexe (cf. [2], proposition 3) ; d'après la proposition 2' de [2], ce résultat est encore vrai si on remplace D par M. Le lemme en résulte, par un raisonnement classique utilisant le théorème 1 de [2].]

2. Plongements fidèles du bord d'une variété.

Soit F un compact de $\mathbf{R}^n$; on appelle enveloppe de F, et on note classiquement $\hat{F}$, l'adhérence de la réunion des composantes connexes non bornées de $\mathbf{R}^n - F$.

Soit M une variété au sens du n° 1 ; on suppose que M est compacte, connexe, de dimension n. Soit f une application continue du bord ∂M de M dans $\mathbf{R}^n$; on note F l'image de f. On dit que f est un plongement fidèle (sous-entendu : de classe C^∞) de ∂M dans $\mathbf{R}^n$ s'il existe un voisinage ouvert V de ∂M dans M tel que f puisse se prolonger en un difféomorphisme (de classe C^∞) de V sur un voisinage de F dans $\hat{F}$.

Notations. - Dans la suite, on sera amené à considérer certaines sous-variétés compactes, connexes, de $\mathbf{R}^3$; on les notera M_k, l'indice k pouvant prendre un certain nombre de valeurs entières. On notera :

$\mathcal{E}_k$ = espace des plongements de M_k dans $\mathbf{R}^3$, conservant l'orientation ;

$\mathcal{G}_k$ = groupe des difféomorphismes de M_k conservant l'orientation ;

$\mathcal{F}_k$ = espace des plongements fidèles de ∂M_k dans $\mathbf{R}^3$, conservant l'orientation ;

$\mathcal{H}_k$ = groupe des difféomorphismes de ∂M_k conservant l'orientation.

Comme précédemment dans le cas du disque D^3 (cf. [3], n° 2) on définit les espaces $\mathcal{E}_k/\mathcal{G}_k$, $\mathcal{F}_k/\mathcal{H}_k$, et on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_k \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{E}_k/\mathcal{G}_k \arrow[d] \\
\mathcal{F}_k \arrow[r] & \mathcal{F}_k/\mathcal{H}_k
\end{tikzcd} .$$

En particulier, le disque D^3 sera désormais désigné le plus souvent par M_0 ; de sorte que les espaces $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, etc. de [3] (p. 5) seront désormais notés $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{F}_0$, etc.

3. Décompositions d'un élément de $\mathcal{F}_0/\mathcal{H}_0$.

On note $\mathcal{D}(\mathcal{F}_0/\mathcal{H}_0)$ l'ensemble des couples (F , D) où $F \in \mathcal{F}_0/\mathcal{H}_0$, et où D est une sous-variété de $\underset{\sim}{R}^3$ difféomorphe à D^2 , telle que $F \cap D = \partial D$, et que F et D soient transversaux en tout point de ∂D .

Soient (F , D) et (F' , D') deux éléments de $\mathcal{D}(\mathcal{F}_0/\mathcal{H}_0)$; un difféomorphisme de (F , D) sur (F' , D') est une application $f : F \cup D \to F' \cup D'$, telle que $f|D$ soit un difféomorphisme de D sur D' , et $f|F$ un difféomorphisme de F sur F' ; on dit que f conserve l'orientation si $f|F$ est compatible avec l'orientation induite par $\underset{\sim}{R}^3$ sur F et F' . Quels que soient les éléments (F , D) et (F' , D') de $\mathcal{D}(\mathcal{F}_0/\mathcal{H}_0)$, il existe un difféomorphisme de (F , D) sur (F' , D') conservant l'orientation : car, d'après l'exactitude de la conjecture de Schönflies pour S^1 , il existe un difféomorphisme f , conservant l'orientation de $(F , \partial D)$ sur $(F' , \partial D')$; et d'après la nullité de Γ_2 , $f|\partial D$ se prolonge en un difféomorphisme de D sur D' .

On dit qu'un difféomorphisme f de (F , D) sur (F' , D') est fidèle s'il existe un voisinage ouvert V de $F \cup D$ dans $\widehat{F \cup D}$ tel que f puisse se prolonger en un difféomorphisme de V sur un voisinage de $F' \cup D'$ dans $\widehat{F' \cup D'}$. Si (F , D) et (F' , D') sont fidèlement difféomorphes, alors D' est ou n'est pas contenu dans $\hat{F'}$ suivant que D est ou n'est pas contenu dans $\hat{F}$. Réciproquement, supposons par exemple que $D \subset \hat{F}$ et $D' \subset \hat{F'}$; soit f un difféomorphisme arbitraire de (F , D) sur (F' , D') ; soient $\hat{F}_1$ et $\hat{F}_2$ les adhérences des deux composantes connexes de $\hat{F} - D$; on note (pour $i = 1 , 2$) $\partial\hat{F}_i = F_i$ et $f(F_i) = F'_i$; F_1 , F_2 , F'_1 , F'_2 ont chacun une arête saillante ; donc $f|F_1$ et $f|F_2$ sont fidèles, donc f est fidèle ; on a le même résultat lorsque $D \subset \underset{\sim}{R}^3 - \hat{F}$ et $D' \subset \underset{\sim}{R}^3 - \hat{F'}$; on en conclut :

L'ensemble $\mathcal{D}(\mathcal{F}_0/\mathcal{H}_0)$ se partage en deux classes pour la relation de difféomorphisme fidèle. En plus, si deux éléments sont fidèlement difféomorphes, il existe toujours un difféomorphisme fidèle de l'un sur l'autre qui conserve l'orientation.

Il est commode pour la suite de choisir un représentant dans chaque classe. On note D_0 l'équateur de M_0 , autrement dit le disque de centre 0 , de rayon 1 , du plan $\{z = 0\}$. On note d'autre part D_2 l'intersection de $\underset{\sim}{R}^3 - M_0$ avec la sphère $\{x^2 + y^2 + (z - 1)^2\} = 1$. On choisit comme représentants $(\partial M_0 , D_0)$ et $(\partial M_0 , D_2)$; un élément de $\mathcal{D}(\mathcal{F}_0/\mathcal{H}_0)$ sera dit du premier type ou du second type suivant qu'il est fidèlement difféomorphe à $(\partial M_0 , D_0)$ ou à $(\partial M_0 , D_2)$.

On note M_1 la partie $\{z \geq 0\}$ de M_o ; et on note $\widehat{M_o \cup D_2} = M_2$. Les variétés $\overline{M_o - M_1}$ et $\overline{M_2 - M_o}$ sont difféomorphes à M_1. Il en résulte qu'à tout élément (F , D) de $\mathcal{Q}(\mathcal{F}_o/\mathcal{H}_o)$ est associé :

- s'il est du premier type, un élément de $(\mathcal{F}_1/\mathcal{H}_1) \times (\mathcal{F}_1/\mathcal{H}_1)$ défini à l'ordre près ;
- s'il est du deuxième type, un élément de $(\mathcal{F}_2/\mathcal{H}_2) \times (\mathcal{F}_1/\mathcal{H}_1)$.

2. Démonstration de la conjecture de Schönflies pour S^2.

1. Cercles minimaux ; décompositions d'Alexander.

Soit $F \in \mathcal{F}_o/\mathcal{H}_o$; on note $\mathcal{P}(F)$ la famille des plans horizontaux non tangents à F. Soit $P \in \mathcal{P}(F)$; $P \cap F$ se compose d'un nombre fini de "cercles" (i. e. de sous-variétés difféomorphes à S^1) le long desquels F et P se coupent transversalement. Soit C un tel cercle, soit D l'enveloppe de C dans P ; D est difféomorphe au disque D^2.

DÉFINITION 1. - On dit que C est un <u>cercle minimal</u> de F si $\mathring{D} \cap F = \emptyset$.

Il suffit que $P \cap F$ soit non vide pour qu'il existe parmi les composantes connexes de $P \cap F$ un cercle minimal de F.

Soit C un cercle minimal de F ; soit D l'enveloppe de C dans son plan horizontal ; le couple (F , D) est un élément de l'espace $\mathcal{Q}(\mathcal{F}_o/\mathcal{H}_o)$ considéré au paragraphe précédent ; on dit que (F , D) est la <u>décomposition d'Alexander</u> de F définie par C.

<u>Cas où</u> $F \in (\mathcal{F}_o/\mathcal{H}_o)^o$; <u>espaces</u> $(\mathcal{F}_1/\mathcal{H}_1)^o$ <u>et</u> $(\mathcal{F}_2/\mathcal{H}_2)^o$. - On rappelle que l'espace $(\mathcal{F}_o/\mathcal{H}_o)^o$ (défini en [3], p. 25, avec la notation $(\mathcal{F}/\mathcal{H})^o$) est le sous-espace de $\mathcal{F}_o/\mathcal{H}_o$ formé des variétés "excellentes pour la cote z ". On va définir les espaces $(\mathcal{F}_k/\mathcal{H}_k)^o$ pour $k = 1 , 2$. Pour qu'un élément F de $\mathcal{F}_k/\mathcal{H}_k$ appartienne à $(\mathcal{F}_k/\mathcal{H}_k)^o$ il faut et il suffit que F ait une face horizontale, que le plan de cette face ne soit pas tangent à la seconde face, et que cette seconde face soit "excellente pour la cote".

Tout élément de $\mathcal{F}_k/\mathcal{H}_k$ associé à une décomposition d'Alexander d'un élément de $(\mathcal{F}_o/\mathcal{H}_o)^o$ est un élément de $(\mathcal{F}_k/\mathcal{H}_k)^o$. Inversement, tout élément de $(\mathcal{F}_k/\mathcal{H}_k)^o$ $(k = 1 , 2)$ peut être obtenu par ce procédé ; on va préciser ceci.

DÉFINITION 2. - Soit $F \in (\mathcal{F}_k/\mathcal{H}_k)^\circ$ $(k = 1, 2)$. On dit qu'un élément F_o de $(\mathcal{F}_o/\mathcal{H}_o)^\circ$ est un <u>bon arrondi</u> de F s'il existe une décomposition d'Alexander de F_o en deux éléments dont l'un soit F, et dont l'autre, noté F', ait les propriétés suivantes :

$F' \in (\mathcal{F}_1/\mathcal{H}_1)^\circ$;

F' a une seule singularité (nécessairement un sommet) ;

F' n'est rencontré par aucun plan horizontal tangent à F.

<u>Tout élément</u> F <u>de</u> $(\mathcal{F}_k/\mathcal{H}_k)^\circ$ <u>admet un bon arrondi</u> $(k = 1, 2)$. Soit en effet D la face horizontale de F ; soit C le bord de D. Supposons par exemple qu'au voisinage de D, F soit tout entier en-dessous du plan horizontal P de D. Il existe un élément F'' de $(\mathcal{F}_1/\mathcal{H}_1)^\circ$, situé au-dessus de P, contenu dans un voisinage arbitrairement petit V de D, ayant une seule singularité, et tel que $F'' \cap P = D$. D'après [1] (II, 2.4.4, p. 301), on peut apporter au théorème 1 de [2] la précision suivante : la fibration considérée dans ce théorème est localement <u>différentiablement</u> triviale ; de ceci on déduit facilement qu'il existe une isotopie γ de V, laissant la cote invariante, et telle que $\gamma(F'' - \mathring{D})$ se raccorde avec $F - \mathring{D}$ le long de C ; il suffit de choisir V assez petit pour que $(F' \cup F'') - \mathring{D}$ soit un bon arrondi de F.

2. Cercles essentiels ; complexité d'Alexander ; décompositions simplifiantes.

DÉFINITION 3. - Soit $F \in (\mathcal{F}_o/\mathcal{H}_o)^\circ$; soit $P \in \mathcal{P}(F)$ (cf. n° 1) et soit C une composante de $P \cap F$. On dit que C est un <u>cercle essentiel</u> de F si, sur chaque composante connexe de $F - C$, il y a au moins un col.

DÉFINITION 4. - Soit $F \in (\mathcal{F}_o/\mathcal{H}_o)^\circ$; on appelle <u>complexité</u> de F le couple (i, j), où i est le nombre de cols de F, et où j est défini comme suit : s'il existe sur F un cercle essentiel, alors

$$j = \inf_{\substack{C \text{ cercle essentiel de } F \\ D \text{ enveloppe de } C \text{ dans son plan}}} (\text{nombre de composantes connexes de } D \cap F) ;$$

et s'il n'existe sur F aucun cercle essentiel, $j = 0$.

Soit $F \in (\mathcal{F}_k/\mathcal{H}_k)^\circ$ $(k = 1, 2)$; la complexité d'un bon arrondi F_o de F est indépendante du choix particulier de F_o, ce qui justifie la définition suivante :

DÉFINITION 4'. - Soit $F \in (\mathcal{F}_k/\mathcal{H}_k)^o$ $(k = 1, 2)$; on appelle complexité de F la complexité d'un bon arrondi (arbitraire) de F.

Notations. - On note $(\mathcal{F}_k/\mathcal{H}_k)^o_{(i,j)}$ (resp. $(\mathcal{F}_k/\mathcal{H}_k)^o_{\leqslant(i,j)}$, resp. $(\mathcal{F}_k/\mathcal{H}_k)^o_{<(i,j)}$) la partie de $(\mathcal{F}_k/\mathcal{H}_k)^o$ formée des éléments de complexité égale (resp. inférieure ou égale, resp. strictement inférieure) à (i, j) (l'ordre considéré sur l'ensemble des complexités est l'ordre lexicographique).

REMARQUE 1. - Soit $F \in (\mathcal{F}_o/\mathcal{H}_o)^o_{(i,j)}$; soit C un cercle essentiel de F, soit D l'enveloppe de C dans son plan ; si $D \cap F$ a exactement j composantes connexes, alors aucune d'entre elles n'est essentielle. Il en résulte que j est inférieur au nombre de sommets de F (le mot sommet étant pris au sens généralisé suivant : point critique en lequel la forme quadratique des dérivées secondes est définie positive ou négative) ; d'où l'inégalité $j \leqslant i + 2$. Cette inégalité (qui peut d'ailleurs être renforcée) montre que, pour tout k et tout i, l'ensemble des j tels que $(\mathcal{F}_k/\mathcal{H}_k)^o_{(i,j)}$ soit non vide, est fini. Ce fait ne jouera d'ailleurs pas de rôle essentiel dans la suite.

REMARQUE 2. - Soit F un élément de $(\mathcal{F}_o/\mathcal{H}_o)^o_{(o,o)}$; toute décomposition de F est du premier type. Donc $(\mathcal{F}_2/\mathcal{H}_2)^o_{(o,o)}$ est vide.

DÉFINITION 5. - Soit $F \in (\mathcal{F}_o/\mathcal{H}_o)^o$; on dit qu'une décomposition d'Alexander de F est simplifiante si les deux variétés F' et F'' associées à cette décomposition sont l'une et l'autre de complexité strictement plus petite que celle de F (pour l'ordre lexicographique).

Si C est un cercle à la fois minimal et essentiel pour F ; ou si, F étant de complexité (i, j), C est un cercle minimal contenu dans l'enveloppe horizontale D' d'un cercle essentiel C', tel que $D' \cap F$ ait exactement j composantes connexes ; alors la décomposition de F définie par C est simplifiante; on peut donc énoncer :

Pour qu'un élément F de $(\mathcal{F}_o/\mathcal{H}_o)^o$ admette une décomposition simplifiante, il faut et il suffit qu'il existe sur F un cercle essentiel.

On va maintenant caractériser (à l'aide de la complexité) les éléments de $(\mathcal{F}_o/\mathcal{H}_o)^o$ sur lesquels il existe un cercle essentiel.

LEMME 1. - Soit $F \in \mathcal{F}_o/\mathcal{H}_o$ et soit $P \in \mathcal{P}(F)$; soient c et c' deux points de F situés de part et d'autre de P. Il existe au moins une composante connexe C de $P \cap F$ telle que c et c' soient dans des composantes connexes distinctes de $F - C$.

Démonstration. - Soit $(C_j)_{j\in J}$ la famille des composantes connexes de $P \cap F$; pour chaque j , $F - C_j$ a deux composantes connexes, dont on note les adhérences $D_{j;o}$ et $D_{j;1}$. Tout chemin continu joignant c à c' dans $\underset{\sim}{R}^3$ rencontre P ; donc tout chemin continu joignant c à c' dans F rencontre $P \cap F$; donc c et c' ne sont pas dans la même composante connexe de $F - (P \cap F)$; le lemme en résulte, si l'on peut montrer la propriété suivante :

Pour toute fonction $k : J \to \{0 , 1\}$, l'ensemble

$$H = \bigcap_{j\in J} \overset{\circ}{D}_{j;k(j)}$$

est connexe.

Démontrons cette propriété ; on a :

$$F - H = \bigcup_{j\in J} D_{j;1-k(j)} \qquad ;$$

les C_j étant disjoints, deux ensembles $D_{j;k}$ et $D_{j;k'}$ sont ou bien disjoints, ou bien emboités ; il existe donc un sous-ensemble J' de J tel que :

$$F - H = \bigcup_{j\in J'} D_{j;1-k(j)} \qquad ,$$

cette réunion étant en plus disjointe ; donc H est le complémentaire d'une réunion disjointe de disques, donc H est connexe.

LEMME 2. - Soit $F \in (\mathcal{F}_o/\mathcal{K}_o)^o_{(i,j)}$.

1° Soient F' et F'' les éléments d'une décomposition d'Alexander de F ; on note (i' , j') le complexité de F' , (i'' , j'') celle de F'' . On a toujours : $(i' , j') \leq (i , j)$ et $(i'' , j'') \leq (i , j)$. Si $(i' , j') = (i , j)$, alors F'' est un élément de $(\mathcal{F}_1/\mathcal{K}_1)^o_{(o,o)}$.

2° Pour qu'il existe une décomposition d'Alexander de F qui soit simplifiante, il faut et il suffit que $i \geq 2$.

Démonstration.

1° On a : $i' + i'' = i$; donc $i' \leq i$ et $i'' \leq i$. Supposons $i' = i$; alors $i'' = 0$, donc d'après la remarque 2 ci-dessus, $F'' \in (\mathcal{F}_1/\mathcal{K}_1)^o_{(o,o)}$; F'' a une seule singularité, qui est un sommet. Soit alors F'_o un bon arrondi de F' ; par définition de F'_o , F' est l'un des éléments d'une décomposition d'Alexander de F'_o , dont on désignera l'autre élément par F''' . La famille des cercles essentiels de F et celle des cercles essentiels de F'_o coïncident. On peut en plus choisir F'_o de façon que $\widehat{F'''} \subset \widehat{F''}$; pour tout cercle essentiel C de F , le nombre de composantes connexes de $D \cap F$ est alors supérieur ou égal à celui de $D \cap F'_o$, de sorte que la complexité de F est supérieure ou égale à celle de F'_o, laquelle est, par définition, celle de F'.

2° Il résulte du lemme 1 que la condition $i \geqslant 2$ est suffisante pour l'existence d'un cercle essentiel (donc d'une décomposition simplifiante) ; or elle est évidemment nécessaire.

3. Démonstration de la conjecture de Schönflies différentiable pour S^2.

Le but de ce numéro est de démontrer la conjecture de Schönflies différentiable faible pour S^2, c'est-à-dire la proposition suivante :

PROPOSITION 1. - L'application canonique $\mathcal{E}_o/\mathcal{G}_o \to \mathcal{F}_o/\mathcal{H}_o$ est surjective.

On a vu en [3], (p. 5) que l'image de $\mathcal{E}_o/\mathcal{G}_o$ par cette application est la composante connexe de e dans $\mathcal{F}_o/\mathcal{H}_o$. Comme $(\mathcal{F}_o/\mathcal{H}_o)^o$ est dense dans $\mathcal{F}_o/\mathcal{H}_o$ ([3], proposition 7, p. 25), il suffit de montrer que l'image de $\mathcal{E}_o/\mathcal{G}_o$ contient $(\mathcal{F}_o/\mathcal{H}_o)^o$; pour les besoins de la démonstration, le résultat qu'on établit est le suivant :

LEMME 3. - Pour $k = 0, 1, 2$, l'image de $\mathcal{E}_k/\mathcal{G}_k$ contient $(\mathcal{F}_k/\mathcal{H}_k)^o$.

La démonstration du lemme 3 utilise un certain nombre de lemmes

LEMME α. - L'image de $\mathcal{E}_1/\mathcal{G}_1$ contient $(\mathcal{F}_1/\mathcal{H}_1)^o_{(o,o)}$.

LEMME β. - L'image de $\mathcal{E}_o/\mathcal{G}_o$ contient $(\mathcal{F}_o/\mathcal{H}_o)^o_{(1,o)}$.

Les lemmes α et β seront démontrés dans l'exposé suivant.

LEMME γ. - Soit $F \in \mathcal{F}_o/\mathcal{H}_o$; soient F' et F'' les éléments associés à une décomposition (F, D) de F. Si deux des trois éléments F, F', F'' sont dans l'image de l'espace $\mathcal{E}_k/\mathcal{G}_k$ correspondant, il en est de même du troisième. En plus, si (F, D) est du 1er (resp. 2e) type, tout difféomorphisme fidèle de $(\partial M_o, D_o)$ (resp. $(\partial M_o, D_2)$) sur (F, D) peut se prolonger en un difféomorphisme de M_o sur $\hat{F}$ (resp. de M_2 sur $\widehat{F \cup D}$).

Démonstration. Il faut distinguer deux cas :

a. Le cas "additif", c'est-à-dire celui où les deux éléments pour lesquels l'hypothèse est supposée satisfaite sont contenus dans l'enveloppe du troisième. Dans ce cas (compte tenu du § 1, n° 3), le résultat est une conséquence immédiate du théorème d'isotopie locale.

b. Le cas "soustractif", c'est-à-dire celui où l'enveloppe de l'un des deux éléments pour lesquels l'hypothèse est supposée satisfaite, contient les deux autres éléments. Ce cas se subdivise lui-même :

- si (F , D) est du premier type, on utilise le théorème d'isotopie des plongements de M_1 dans M_o qui induisent l'identité sur $M_1 \cap \partial M_o$;

- si (F , D) est du deuxième type, on utilise suivant le cas, l'un des deux théorèmes suivants (analogues à celui utilisé pour le premier type, et qui s'en déduisent à l'aide de la proposition 2' de [2]) : "deux plongements de M_o (resp. $\overline{M_2 - M_o}$) dans M_2 qui induisent l'identité sur $M_o \cap \partial M_2$ (resp. D_2) sont isotopes".

Premier LEMME de récurrence. - Soit $(i , j) \geq (2 , 0)$. Si quel que soit $k \in \{0 , 1 , 2\}$ l'espace $(\mathcal{F}_k/\mathcal{H}_k)^o_{<(i,j)}$ est contenu dans l'image de $\mathcal{E}_k/\mathcal{G}_k$, alors $(\mathcal{F}_o/\mathcal{H}_o)^o_{(i,j)}$ est dans l'image de $\mathcal{E}_o/\mathcal{G}_o$.

Démonstration. - Soit $F \in (\mathcal{F}_o/\mathcal{H}_o)^o_{(i,j)}$; d'après le 2° du lemme 2, il existe une décomposition simplifiante de F ; il suffit donc d'appliquer le lemme γ.

Second LEMME de récurrence. - Soit $(i , j) \geq (0 , 0)$. Si $(\mathcal{F}_o/\mathcal{H}_o)^o_{(i,j)}$ est dans l'image de $\mathcal{E}_o/\mathcal{G}_o$, alors, pour $k = 1 , 2$, $(\mathcal{F}_k/\mathcal{H}_k)^o_{(i,j)}$ est dans l'image de $\mathcal{E}_k/\mathcal{G}_k$.

Démonstration. - Soit $F \in (\mathcal{F}_k/\mathcal{H}_k)^o_{(o,j)}$ $(k = 1$ ou $2)$. Soit F_o un bon arrondi de F ; il existe une décomposition d'Alexander de F_o en deux éléments dont l'un est F , et dont l'autre élément F' est dans $(\mathcal{F}_1/\mathcal{H}_1)^o_{(o,o)}$; donc d'après le lemme α, F' est dans l'image de $\mathcal{E}_1/\mathcal{G}_1$. La complexité de F_o est (i , j) , donc F_o est dans l'image de $\mathcal{E}_o/\mathcal{G}_o$; il suffit donc d'appliquer le lemme γ.

Démonstration du lemme 3. - La propriété "être dans l'image de l'espace $\mathcal{E}_k/\mathcal{G}_k$ correspondant" est vraie pour $(\mathcal{F}_1/\mathcal{H}_1)^o_{(o,o)}$ d'après le lemme α ; d'après le lemme γ, on en déduit qu'elle est vraie pour $(\mathcal{F}_o/\mathcal{H}_o)^o_{(o,o)}$; on rappelle (cf. n° 2, remarque 3) que $(\mathcal{F}_2/\mathcal{H}_2)^o_{(o,o)}$ est vide. D'après le lemme β, la propriété est vraie pour $(\mathcal{F}_o/\mathcal{H}_o)^o_{(1,o)}$; donc d'après le deuxième lemme de récurrence, elle est vraie pour $(\mathcal{F}_k/\mathcal{H}_k)^o_{(1,o)}$ quel que soit $k \in \{0 , 1 , 2\}$. D'après le premier lemme de récurrence, la propriété est donc vraie pour $(\mathcal{F}_o/\mathcal{H}_o)^o_{(2,o)}$; on applique ensuite le deuxième lemme de récurrence, puis de nouveau le premier, et ainsi de suite.

Conséquences immédiates de la proposition 1.

COROLLAIRE 1. - Soit M une variété (au sens du § 1, n° 1) ; on suppose que l'arrondie de M est difféomorphe à D^3 ; tout plongement fidèle de ∂M dans $\mathbb{R}^3$ peut alors se prolonger en un plongement de M dans $\mathbb{R}^3$.

Démonstration. - Le cas particulier où $M = D^3$ n'est autre que la conjecture de Schönflies différentiable forte pour S^2 ; on a vu en [3], § 2, qu'elle résultait de la conjecture faible.

Cas général. - Soit f un plongement fidèle de ∂M dans $\mathbb{R}^3$, on note F l'image de f ; f peut se prolonger en un plongement d'un voisinage V de ∂M dans M sur un voisinage de ∂F dans $\hat{F}$. Soit M' une arrondie de M telle que $\partial M' \subset V$; M' est difféomorphe à S^3, donc d'après le cas particulier ci-dessus, $f|\partial M'$ peut se prolonger en un difféomorphisme de M' sur $\widehat{f(\partial M')}$; d'après le théorème d'isotopie locale, on peut modifier ce difféomorphisme au voisinage de $\partial M'$ de façon qu'il se raccorde avec $f|\overline{M - M'}$.

COROLLAIRE 2. - Soit $F \in \mathcal{F}_\sigma/\mathcal{K}_o$; soit (F , D) une décomposition de F. Si F est du 1er (resp. 2e) type, il existe un difféomorphisme conservant l'orientation de (M_o , D_o) sur $(\hat{F} , D)$ (resp. de (M_2 , D_2) sur $(\widehat{F \cup D} , D)$).

Ceci est une conséquence immédiate du corollaire 1 et du lemme γ.

3. Classification et modèles pour les doubles décompositions d'une sphère plongée dans $\mathbb{R}^3$.

1. Classification des doubles décompositions des éléments de $\mathcal{F}_\sigma/\mathcal{K}_o$.

On note $\mathcal{D}_2(\mathcal{F}_\sigma/\mathcal{K}_o)$ l'ensemble des triples (F , D , D') tels que (F , D) et (F' , D') soient des éléments de $\mathcal{D}(\mathcal{F}_\sigma/\mathcal{K}_o)$, et que $D \cap D' = \emptyset$.

Comme au § 1, n° 3, on définit la notion de difféomorphisme (resp. de difféomorphisme conservant l'orientation d'un élément (F_1 , D_1 , D_1') de $\mathcal{D}_2(\mathcal{F}_\sigma/\mathcal{K}_o)$ sur un autre élément (F_2 , D_2 , D_2') ; en particulier, un tel difféomorphisme doit appliquer D_1 sur D_2 et D_1' sur D_2'. Quels que soient les éléments (F_1 , D_1 , D_1') et (F_2 , D_2 , D_2') de $\mathcal{D}_2(\mathcal{F}_\sigma/\mathcal{K}_o)$, il existe un difféomorphisme de l'un sur l'autre, conservant l'orientation : car, sur la sphère S^2, deux figures, chacune formée de deux sous-variétés disjointes difféomorphes à S^1, peuvent toujours se transformer l'une dans l'autre par un difféomorphisme conservant l'orientation.

Toujours comme au § 1, n° 3, on définit la notion de <u>difféomorphisme fidèle</u> entre deux éléments de $\mathcal{Q}_2(\mathcal{F}_0/\mathcal{H}_0)$. On va classifier les éléments de $\mathcal{Q}_2(\mathcal{F}_0/\mathcal{H}_0)$ pour la relation "difféomorphisme fidèle, à l'ordre des deux derniers éléments près". On remarque d'abord que si D_1 et D'_1 sont contenus dans $\widehat{F_1}$, la condition nécessaire et suffisante pour que (F_2, D_2, D'_2) soit fidèlement difféomorphe à (F_1, D_1, D'_1) est que D_2 et D'_2 soient contenus dans $\widehat{F_2}$. Supposons maintenant que l'un au moins des disques D_1 et D'_1 soit extérieur à $\widehat{F_1}$; alors l'un au moins appartient au bord de $\widehat{F_1 \cup D_1 \cup D'_1}$; supposons que ce soit D_1 ; on voit facilement que la classification est achevée par la considération des deux invariants suivants : D'_1 est ou n'est pas intérieur à $\widehat{F_1}$; $\partial D'_1$ est ou n'est pas dans le bord de $\widehat{F_1 \cup D_1}$. On trouve ainsi que $\mathcal{Q}_2(\mathcal{F}_0/\mathcal{H}_0)$ se partage en cinq classes pour la relation ci-dessus ; en plus, deux éléments d'une même classe se correspondent (à l'ordre près des deux derniers éléments) dans un difféomorphisme fidèle conservant l'orientation. Mais d'après le corollaire 1 de la proposition 1, tout difféomorphisme fidèle de (F_1, D_1, D'_1) sur $F_2, D_2, D'_2)$ peut se prolonger en un difféomorphisme de $\widehat{F_1 \cup D_1 \cup D'_1}$ sur $\widehat{F_2 \cup D_2 \cup D'_2}$; on peut donc énoncer :

$\mathcal{Q}_2(\mathcal{F}_0/\mathcal{H}_0)$ <u>se partage en cinq classes pour la relation suivante</u> : (F_1, D_1, D'_1) <u>et</u> (F_2, D_2, D'_2) <u>sont équivalents s'il existe un difféomorphisme conservant l'orientation de</u> $(\widehat{F_1 \cup D_1 \cup D'_1}, F_1, D_1, D'_1)$ <u>sur</u> $(\widehat{F_2 \cup D_2 \cup D'_2}, F_2, D_2, D'_2)$ ou sur $(\widehat{F_2 \cup D_2 \cup D'_2}, F_2, D'_2, D_2)$.

2. Choix de modèles.

Les notations M_0, D_0, D_2 sont celles de la fin du § 1. On note :

D_1 l'intersection de M_0 et de $\{z = \frac{1}{2}\}$;

D_3 le symétrique de D_2 par rapport au plan $\{z = 0\}$;

D_4 l'adhérence de la partie extérieure à M_0 de la sphère de centre $(0, 0, 1)$ coupant ∂M_0 suivant le cercle $\{z = 3/4\}$;

D_5 l'intersection de M_0 et de $\{z = 3/4\}$.

On pose :

$$\begin{array}{l|l} (\partial M_o , D_o , D_1) = \Delta_1 & (\partial M_o , D_2 , D_4) = \Delta_4 \\ (\partial M_o , D_o , D_2) = \Delta_2 & (\partial M_o , D_2 , D_5) = \Delta_5 \\ (\partial M_o , D_2 , D_3) = \Delta_3 & \end{array} .$$

Pour $\ell = 1 , 2 , 3 , 4 , 5$, on note A_ℓ , A'_ℓ , A''_ℓ , dans l'ordre indiqué par la figure 3, les adhérences des composantes connexes bornées du complémentaire dans $\underset{\sim}{R}^3$ du support de Δ_ℓ ; (le support de Δ_ℓ est la réunion des trois parties de $\underset{\sim}{R}^3$ qui composent Δ_ℓ).

Les notations M_o , M_1 , M_2 ont été définies à la fin du § 1 ; on pose (cf. figure 1) :

$$A'_1 = M_3 \; ; \qquad A_3 \cup A'_3 \cup A''_3 = M_4 \; ; \qquad A_2 \cup A'_2 = M_5 \qquad .$$

On pose d'autre part (cf. figure 2) :

$$\begin{array}{l|l} (M_o , A_1 \cup A'_1 , A''_1) = \Sigma_o & (M_2 , A_5 \cup A'_5 , A''_5) = \Sigma_4 \\ (M_2 , A_2 , A'_2 \cup A''_2) = \Sigma_1 & (M_2 , A_2 \cup A'_2 , A''_2) = \Sigma_5 \\ (M_1 , A_1 , A'_1) \qquad = \Sigma_2 & (M_4 , A_3 \cup A'_3 , A''_3) = \Sigma_6 \\ (M_5 , A_2 , A'_2) \qquad = \Sigma_3 & (M_2 , A_4 , A'_4 \cup A''_4) = \Sigma_7 \end{array} .$$

Pour $\alpha = 1 , \ldots , 7$, on note $\Sigma_{-\alpha}$ le triple obtenu en permutant les deux derniers éléments de Σ_α .

Chacune des variétés A_ℓ , A'_ℓ , A''_ℓ est difféomorphe à l'un des modèles M_k ($k \in \{0 , 1 , \ldots , 5\}$) ; chacun des triples $(A_\ell \cup A'_\ell , A_\ell , A'_\ell)$, $(A_\ell \cup A'_\ell \cup A''_\ell , A_\ell \cup A'_\ell , A''_\ell)$, $(A'_\ell \cup A''_\ell , A'_\ell , A''_\ell)$, $(A_\ell \cup A'_\ell \cup A''_\ell , A_\ell , A'_\ell \cup A''_\ell)$ est difféomorphe à l'un des modèles Σ_α ($\alpha \in \{-7 , \ldots , +7\}$). Le théorème de classification du numéro précédent peut maintenant s'interpréter comme suit :

PROPOSITION 2. - Soit (F , D , D') un élément de $\mathcal{D}_2(\mathcal{F}_o/\mathcal{H}_o)$; soient (A , A' , A'') les adhérences des composantes connexes bornées de $\underset{\sim}{R}^3 - (F \cup D \cup D')$, prises dans un ordre convenable. Il existe $\ell \in \{1 , \ldots , 5\}$, et un difféomorphisme conservant l'orientation, de $(A_\ell \cup A'_\ell \cup A''_\ell , A_\ell , A'_\ell , A''_\ell)$ sur $(A \cup A' \cup A'' , A , A' , A'')$.

Chacune des variétés A , A' , A'' est difféomorphe (avec conservation de l'orientation) à l'un des modèles M_k ($k \in \{0 , 1 , \ldots , 5\}$) .

Chacun des triples $(A \cup A' , A , A')$, $(A \cup A' \cup A'' , A \cup A' , A'')$, $(A' \cup A'' , A' , A'')$, $(A \cup A' \cup A'' , A , A' \cup A'')$ est difféomorphe (avec conservation de l'orientation) à l'un des modèles Σ_α ($\alpha \in \{-7 , \ldots , 7\}$) .

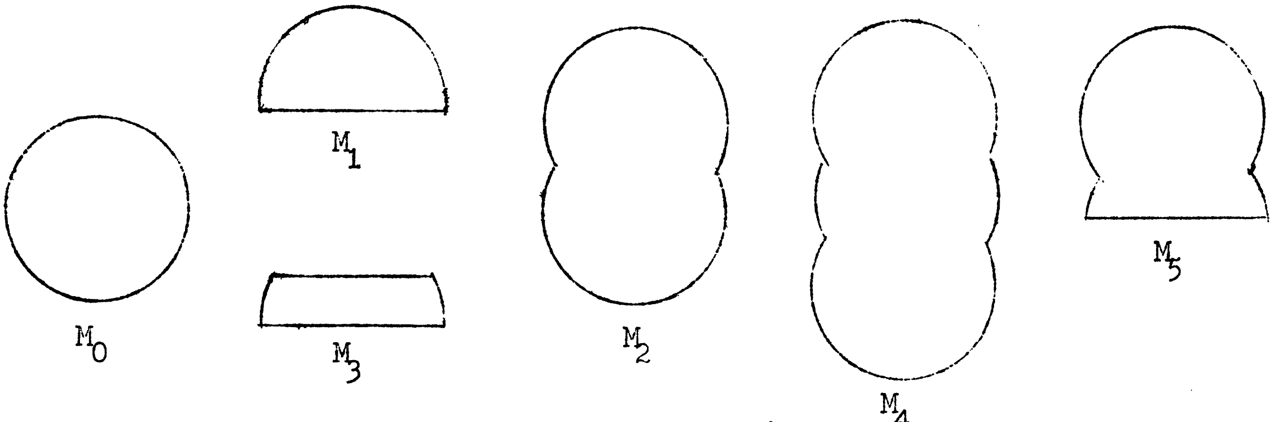

Figure 1 : Modèles

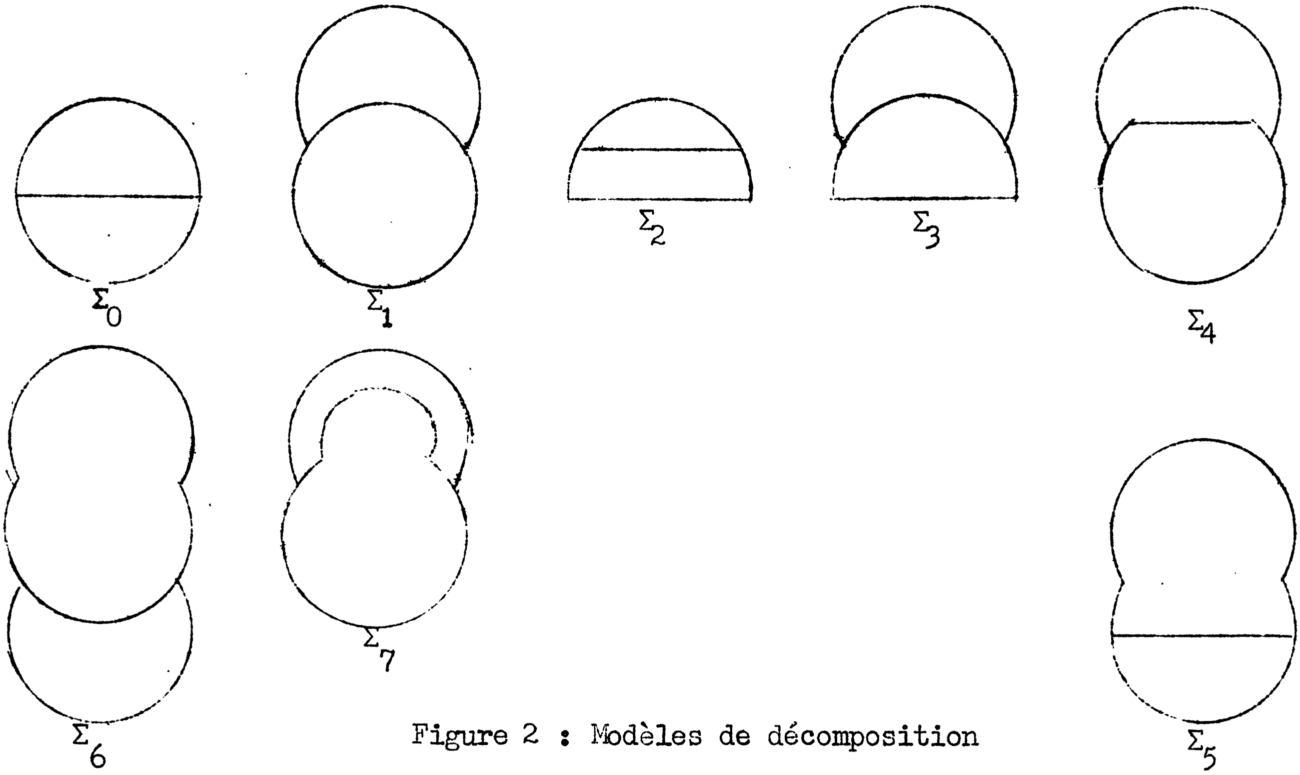

Figure 2 : Modèles de décomposition

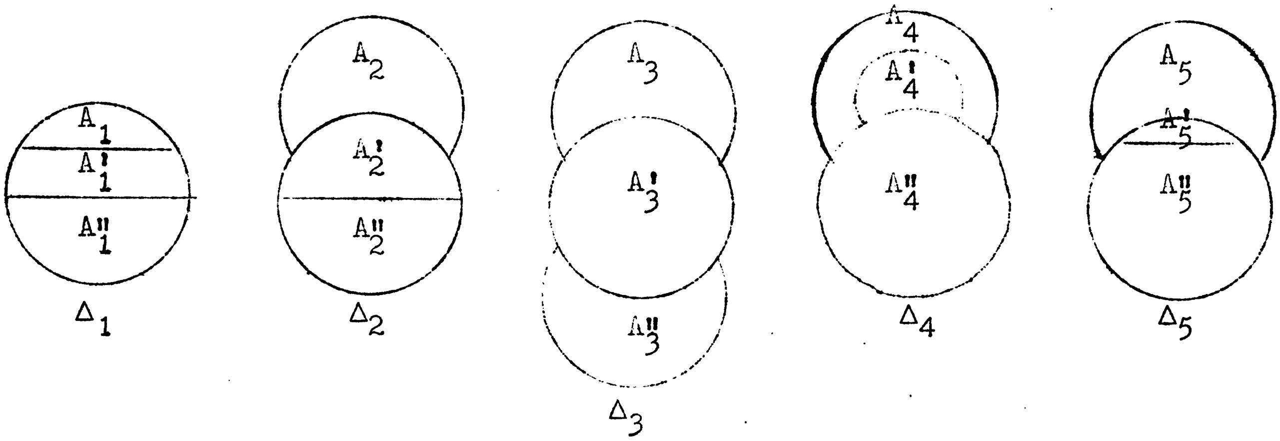

Figure 3 : Modèles de double décomposition

Remarque. On peut définir les ensembles $\mathcal{Q}(\mathcal{F}_k/\mathcal{H}_k)$ pour $k = 1 , 2$; la définition est analogue à celle de $\mathcal{Q}(\mathcal{F}_o/\mathcal{H}_o)$, à ceci près qu'il faut rajouter la condition : D ne doit pas rencontrer l'arête de F . Avec cette définition, on voit que le système (Σ_α) (pour $\alpha \in \{0 , 1 , \dots , 7\}$ définit un système complet de modèles pour les éléments de $\mathcal{Q}(\mathcal{F}_k/\mathcal{H}_k)$, avec $k = 0 , 1 , 2$; (Σ_α et $\Sigma_{-\alpha}$ définissent évidemment le même modèle de décomposition).

4. Espaces fonctionnels attachés aux modèles M_k . L'addition dans les espaces $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{R}$.

1. Les espaces $\tilde{\mathcal{S}}_k$ et $\mathcal{R}_k$.

Pour une variété M_k , compacte, connexe, de dimension 3 , on a défini au § 1, n° 2, les espaces $\mathcal{E}_k$, $\mathcal{S}_k$, $\mathcal{F}_k$, $\mathcal{H}_k$, $\mathcal{E}_k/\mathcal{S}_k$, $\mathcal{F}_k/\mathcal{H}_k$. On note en plus :

$\tilde{\mathcal{S}}_k$ le groupe des difféomorphismes de M_k conservant l'orientation et les relations d'incidence ;

$\mathcal{S}_{k;e}$ la composante connexe de l'élément neutre dans $\mathcal{S}_k$.

$\tilde{\mathcal{S}}_k$ et $\mathcal{S}_{k;e}$ sont des sous-groupes distingués de $\mathcal{S}_k$, et $\mathcal{S}_{k;e} \subset \tilde{\mathcal{S}}_k$.

Les modèles M_k $(k = 0 , 1 , \dots , 5)$ définis au § 3 ont les propriétés particulières suivantes :

PROPRIÉTÉ 1. - L'arrondie de M_k est difféomorphe à D^3 .

PROPRIÉTÉ 2. - Ou bien il existe un élément s_k de $\mathcal{S}_k$, d'ordre 2 , tel que le sous-groupe engendré par s_k (qu'on note $\mathcal{S}_k$) soit canoniquement isomorphe à $\mathcal{S}_k/\tilde{\mathcal{S}}_k$; ou bien $\tilde{\mathcal{S}}_k = \mathcal{S}_k$, on pose alors $\mathcal{S}_k = \{e\}$.

En effet, pour $k = 0$ et $k = 5$, $\tilde{\mathcal{S}}_k = \mathcal{S}_k$. Pour $k = 1$ et $k = 2$, on prend pour s_k un difféomorphisme arbitraire de M_k , conservant l'orientation et échangeant les faces. On note ρ la rotation d'angle π de M_o autour de la droite $\{y = z = 0\}$, et on prend pour s_3 la restriction à M_3 de $\rho \circ \Theta^{-1}$ (Θ étant le difféomorphisme de M_o défini ci-dessous au n° 5). Enfin on prend pour s_4 la rotation d'angle π de M_4 autour de la droite $\{y = z = 0\}$.

PROPRIÉTÉ 3. - L'application cancnique :

$$\pi_o(\mathrm{Diff}(M_k ; J^\infty_{\partial M_k})) \to \pi_o(\widetilde{\mathcal{S}}_k)$$

est un isomorphisme.

En effet, le cas particulier de la proposition 1 de [2] donne un isomorphisme :

(1) $$\pi_o(\mathrm{Diff}(M_k ; J^\infty_{\partial M_k})) \overset{\cong}{\to} \pi_o(\mathrm{Diff}(M_k ; \partial M_k)) \qquad ;$$

soit d'autre part $\widetilde{\mathcal{H}}_k$ le groupe des difféomorphismes de ∂M_k conservant l'orientation et les relations d'incidence ; $\widetilde{\mathcal{S}}_k$ est fibré sur $\widetilde{\mathcal{H}}_k$, de fibre $\mathrm{Diff}(M_k ; \partial M_k)$, de sorte qu'on a une suite exacte :

$$\dots \pi_1(\widetilde{\mathcal{S}}_k) \to \pi_1(\widetilde{\mathcal{H}}_k) \to \pi_o(\mathrm{Diff}(M_k ; \partial M_k)) \to \pi_o(\widetilde{\mathcal{S}}_k) \to \pi_o(\widetilde{\mathcal{H}}_k) \to 0 \qquad ;$$

on montre sans difficulté à l'aide du théorème 4 de [2], et de son corollaire 2, que :

$$\pi_o(\widetilde{\mathcal{H}}_k) = 0 \text{ pour tout } k \qquad ;$$

et que :

$$\pi_1(\widetilde{\mathcal{H}}_k) \cong \begin{cases} 0 & \text{pour } k = 0 \\ \mathbb{Z} & \text{pour } k = 1, \dots, 5 \end{cases} .$$

Dans ce dernier cas, un générateur de $\pi_1(\widetilde{\mathcal{H}}_k)$ est donné par la rotation d'angle 2π autour de la droite Oz, de sorte que, dans tous les cas, l'homomorphisme $\pi_1(\widetilde{\mathcal{S}}_k) \to \pi_1(\widetilde{\mathcal{H}}_k)$ est surjectif. L'homomorphisme $\pi_o(\mathrm{Diff}(M_k ; \partial M_k)) \to \pi_o(\widetilde{\mathcal{S}}_k)$ est donc bijectif, ce qui, compte tenu de (1), achève la vérification de la propriété 3.

Une conséquence immédiate de la propriété 3 est la suivante :

Les groupes $\pi_o(\widetilde{\mathcal{S}}_k)$ (pour $k = 0, 1, \dots, 5$) sont canoniquement isomorphes au groupe $\pi_o(\mathrm{Diff}(D^3, J^\infty_{S^2}))$.

En effet, d'après [1] (p. 336, corollaire 3), il existe, du seul fait que M_k est compacte, connexe, et de dimension 3, un homomorphisme canonique

$$\pi_o(\mathrm{Diff}(D^3 ; J^\infty_{S^2})) \to \pi_o(\mathrm{Diff}(M_k ; J^\infty_{\partial M_k})) \qquad ;$$

d'après la proposition 2 de [2], la propriété 1 entraîne que cet homomorphisme est un isomorphisme ; il reste à composer cet isomorphisme avec celui de la propriété 3.

LEMME 4. - Soit M_k une variété vérifiant les propriétés 1, 2, 3 ci-dessus. Le groupe $\mathcal{G}_{k;e}.\mathcal{S}_k$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{G}_k$; le groupe quotient $\mathcal{G}_k/(\mathcal{G}_{k;e}.\mathcal{S}_k)$ est abélien et canoniquement isomorphe à $\pi_o(\tilde{\mathcal{G}}_k)$ (et par conséquent à $\pi_o(\mathrm{Diff}(D^3 ; J^\infty_{S^2}))$).

Démonstration. - Le lemme est une conséquence immédiate de la propriété suivante : "sous les hypothèses ci-dessus, le commutateur $gg'g^{-1}g'^{-1}$ de deux éléments quelconques de $\mathcal{G}_k$ est dans la composante connexe de l'élément neutre". On a vu en [3] (lemme 1), que cette propriété est vraie pour le groupe $\mathrm{Diff}\, S^n$ (quel que soit n) ; on montre exactement de la même façon qu'elle est vraie quel que soit n pour le groupe $\mathrm{Diff}(D^n ; J^\infty_{S^{n-1}})$; pour la démontrer dans le cas du groupe $\mathcal{G}_k$, on procède en deux temps (le second temps est inutile lorsque $\tilde{\mathcal{G}}_k = \mathcal{G}_k$, c'est-à-dire pour $k = 0$ ou 5).

a. On suppose que l'un des éléments g , g' , par exemple g , est dans $\tilde{\mathcal{G}}_k$. - Il suffit de montrer qu'il existe g^* isotope à g , tel que $g^* g'g^{*-1} g'^{-1}$ soit dans $\mathcal{G}_{k;e}$. D'après la propriété 3, on peut choisir g^* de manière qu'il soit dans $\mathrm{Diff}(M ; J^\infty_{\partial M})$. Soit V une variété difféomorphe à D^3 ; identifions M_k à une sous-variété de $V - \partial V$; soit $\bar{g}^*$ le difféomorphisme de V obtenu en prolongeant g^* par l'identité ; d'après le théorème d'isotopie pour les plongements des disques, généralisé au cas des variétés telles que M_k (cf. § 1, n° 1), il existe un difféomorphisme $\bar{g}'$ de V prolongeant g' ; le difféomorphisme $\bar{g}^* \bar{g}'\bar{g}^{*-1} \bar{g}'^{-1}$ de V induit l'identité sur $\overline{V - M}$; puisque V est difféomorphe à D^3 , il en résulte que $\bar{g}^* \bar{g}'\bar{g}^{*-1} \bar{g}'^{-1}$ est dans la composante connexe de e dans $\mathrm{Diff}(V ; J^\infty_{\partial V})$; donc, d'après la proposition 2 de [2], $g^* g'g^{*-1} g'^{-1}$ est dans $\mathcal{G}_{k;e}$.

b. On suppose que ni g , ni g' ne sont dans $\tilde{\mathcal{G}}_k$. - Il existe alors, d'après la propriété 2, h et h' dans $\tilde{\mathcal{G}}_k$ tels que $g = h.s_k$ et $g' = h.s_k$. On peut écrire :

$$gg'g^{-1}g'^{-1} = (hg')(s_k^{-1} h'^{-1} s_k h')(hg')^{-1} (hg'h^{-1} g'^{-1}) \quad ;$$

donc $gg'g^{-1} g'^{-1} \in \mathcal{G}_{k;e}$.

Définition des espaces $\mathcal{R}_k$. - Pour $k = 0 , 1 , \dots , 5$, on pose :

$$\mathcal{E}_k/(\mathcal{G}_{k;e}.\mathcal{S}_k) = \mathcal{R}_k \quad ;$$

$\mathcal{R}_k$ est un revêtement surjectif de $\mathcal{E}_k/\mathcal{G}_k$. D'après le lemme 4, $\mathcal{R}_k$ est muni naturellement d'une structure d'espace fibré principal, de base $\mathcal{E}_k/\mathcal{G}_k$, de fibre le groupe abélien discret $\pi_o(\mathrm{Diff}(D^3 ; J^\infty_{S^2}))$.

Précisons comment sont définies les opérations de $\pi_0(\mathrm{Diff}(D^3 ; J^\infty_{S^2}))$ dans $\mathcal{R}_k$. Soit $a \in \mathcal{R}_k$ et soit $\sigma \in \pi_0(\mathrm{Diff}(D^3 ; J^\infty_{S^2}))$; on choisit arbitrairement un représentant φ de a, un représentant g de σ, et un plongement ψ, d'orientation positive, de D^3 dans l'intérieur de M_k ; $\psi \circ g \circ \psi^{-1}$ est alors un difféomorphisme de $\psi(D^3)$, qui se prolonge (par l'identité sur $M - \psi(D^3)$) en un difféomorphisme de M_k qu'on note g_ψ ; $\varphi \circ g_\psi$ est un représentant de l'élément $a.\sigma$ de $\mathcal{R}_k$.

2. Les espaces $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{E}/\mathfrak{G}$, $\mathfrak{W}_\alpha$, $\mathfrak{W}$. L'addition dans $\mathfrak{E}/\mathfrak{G}$.

On note $\mathfrak{E}$ (resp. $\mathfrak{R}$, resp. $\mathfrak{E}/\mathfrak{G}$) l'espace somme topologique des espaces $\mathcal{E}_k$ (resp. $\mathcal{R}_k$, resp. $\mathcal{E}_k/\mathcal{G}_k$) pour $k = 0, 1, \dots, 5$. L'espace $\mathfrak{R}$ est un revêtement surjectif de $\mathfrak{E}/\mathfrak{G}$; c'est aussi d'après la fin du n° 1, un espace fibré principal de base $\mathfrak{E}/\mathfrak{G}$, de fibre $\pi_0(\mathrm{Diff}(D^3 ; J^\infty_{S^2}))$.

Pour tout modèle Σ_α $(\alpha \in \{-7, \dots, 7\})$ on note $\mathfrak{W}_\alpha$ la partie de $(\mathfrak{E}/\mathfrak{G}) \times (\mathfrak{E}/\mathfrak{G})$ formée des couples (A, A') tels qu'il existe un difféomorphisme conservant l'orientation de Σ_α sur le triple $(A \cup A', A, A')$. Les ensembles $\mathfrak{W}_\alpha$ sont disjoints. Pour tout α, les ensembles $\mathfrak{W}_\alpha$ et $\mathfrak{W}_{-\alpha}$ sont symétriques l'un de l'autre (i. e. ils correspondent l'un à l'autre par la symétrie de $(\mathfrak{E}/\mathfrak{G}) \times (\mathfrak{E}/\mathfrak{G})$). On note :

$$\bigcup_{\alpha \in \{-7,\dots,7\}} \mathfrak{W}_\alpha = \mathfrak{W} \quad .$$

D'après ce qui précède l'ensemble $\mathfrak{W}$ est symétrique ; il en est de même de l'ensemble $\mathfrak{W}_0$.

L'addition dans $\mathfrak{E}/\mathfrak{G}$. - Pour $(A, A') \in \mathfrak{W}$, on définit la somme de A et A' en posant :

$$A + A' = A \cup A' \quad ;$$

l'opération ainsi définie sur $\mathfrak{W}$ a les propriétés suivantes :

- elle est commutative ;

- elle est associative au sens suivant : pour tout (A, A', A'') tel que $(A + A') + A''$ et $A + (A' + A'')$ existent, ils sont égaux ;

- elle est régulière (i. e. $A + B = A + B'$ entraîne $B = B'$) ; ceci permet de définir (sur une partie convenable de $(\mathfrak{E}/\mathfrak{G}) \times (\mathfrak{E}/\mathfrak{G})$) une différence ; la différence de C et A, lorsqu'elle existe, est notée $C - A$; on prendra garde que l'ensemble correspondant à $C - A$ n'est pas l'ensemble différence de ceux qui correspondent à C et A, mais l'adhérence de celui-ci.

- elle est continue sur $\mathfrak{W}$.

3. Définition et premières propriétés d'une addition dans $\mathfrak{R}$.

Dans ce numéro, on va définir un relèvement dans $\mathfrak{R}$ de l'addition ci-dessus ; ce sera une opération définie sur la partie $\mathfrak{Y}$ de $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ située au-dessus de $\mathfrak{W}$. L'ensemble $\mathfrak{W}$ étant réunion disjointe des ensembles $\mathfrak{W}_\alpha$, $\mathfrak{Y}$ est réunion disjointe des ensembles correspondants $\mathfrak{Y}_\alpha$; on définit l'addition séparément sur chacun de ces ensembles $\mathfrak{Y}_\alpha$.

Soit $\alpha \in \{-7, \ldots, 7\}$; soient $M_{j(\alpha)}$, $M_{i(\alpha)}$, $M_{i'(\alpha)}$ les modèles respectifs des trois éléments de Σ_α ; on désigne les deux derniers éléments de Σ_α respectivement par A_α et A'_α. On note N_α l'intersection de A_α et de A'_α. On choisit deux plongements conservant l'orientation :

$$\varphi_\alpha : M_{i(\alpha)} \to M_{j(\alpha)}, \text{ d'image } A_\alpha \quad ;$$

$$\varphi'_\alpha : M_{i'(\alpha)} \to M_{j(\alpha)}, \text{ d'image } A'_\alpha \quad .$$

On note $\mathcal{U}_{\varphi_\alpha,\varphi'_\alpha}$ la partie de $\mathcal{E}_{i(\alpha)} \times \mathcal{E}_{i'(\alpha)}$ formée des couples (φ, φ') tels que le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & M_{i(\alpha)} \arrow[dl, "\varphi_\alpha"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
M_{j(\alpha)} \arrow[rr, "\chi"] & & \underset{\sim}{R}^3 \\
 & M_{i'(\alpha)} \arrow[ul, "\varphi'_\alpha"] \arrow[ur, "\varphi'"'] &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif. Puisque :

$$M_{j(\alpha)} = A_\alpha \cup A'_\alpha \quad ,$$

χ est <u>unique</u>, et l'image de χ dans $\underset{\sim}{R}^3$ est la réunion des images de φ et φ'. On pose :

$$\chi = \varphi \smile_{\varphi_\alpha,\varphi'_\alpha} \varphi' \quad ;$$

si on note A, A', B les projections respectives de φ, φ', χ dans $\mathfrak{E}/\mathfrak{G}$, on a :

(2) $$B = A + A' \quad .$$

La projection de $\mathcal{U}_{\varphi_\alpha, \varphi'_\alpha}$ sur $(\mathfrak{E}/\mathfrak{F}) \times (\mathfrak{E}/\mathfrak{G})$ est $\mathfrak{R}_\alpha$: car pour tout $(A , A') \in \mathfrak{R}_\alpha$ il existe par définition un difféomorphisme χ , conservant l'orientation, de $M_{j(\alpha)}$ sur $A \cup A'$, qui envoie A_α sur A et A'_α sur A' ; le couple $(\chi \circ \varphi_\alpha , \chi \circ \varphi'_\alpha)$ est un élément de $\mathcal{U}_{\varphi_\alpha, \varphi'_\alpha}$ situé au-dessus de (A , A').

LEMME 5. - Soient (φ , φ') et (ψ , ψ') deux éléments de $\mathcal{U}_{\varphi_\alpha, \varphi'_\alpha}$ ayant même projection dans $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$; $\varphi \sim_{\varphi_\alpha, \varphi'_\alpha} \varphi'$ et $\psi \sim_{\varphi_\alpha, \varphi'_\alpha} \psi'$ ont même projection dans $\mathfrak{R}$.

La démonstration du lemme 5 repose sur deux propriétés des modèles Σ_α , et sur un lemme préliminaire relatif aux espaces fibrés.

PROPRIÉTÉ I. - Pour tout $\alpha \in \{-7 , \dots , 7\}$, tout difféomorphisme de A_α (resp. A'_α) qui laisse stable N_α conserve les relations d'incidence.

Vérification. - On se borne à la partie de la condition portant sur A_α ; elle est trivialement vérifiée pour $i(\alpha) = 0$ ou 5 . Pour les autres valeurs de $i(\alpha)$, soient $F_{\alpha;0}$ et $F_{\alpha;1}$ les deux faces de $M_{i(\alpha),j(\alpha)}$ qui s'échangent par $\varphi_\alpha \circ s_{(\alpha)} \circ \varphi_\alpha^{-1}$; on constate qu'il existe toujours $h \in \{0 , 1\}$ tel que : ou bien $N_\alpha \subset F_{\alpha;h}$; ou bien $F_{\alpha;h} \subset N_\alpha$ et $F_{\alpha;1-h} \not\subset N_\alpha$.

PROPRIÉTÉ II. - Pour tout $\alpha \in \{-7 , \dots , 7\}$, les homomorphismes :

$$\pi_1(\widetilde{\mathfrak{S}}_{i(\alpha)}) \to \pi_1(\mathrm{Diff}\ N_\alpha)$$

$$\pi_1(\widetilde{\mathfrak{S}}_{i'(\alpha)}) \to \pi_1(\mathrm{Diff}\ N_\alpha)$$

respectivement définis par φ_α et φ'_α , sont surjectifs.

En effet, il résulte facilement du théorème 4 de [2] que, pour tout α , $\pi_1(\mathrm{Diff}\ N_\alpha) \approx \underset{\sim}{Z}$, la rotation d'angle 2π autour de Oz étant un générateur.

LEMME préliminaire. - Soit $p : E \to B$ une fibration localement triviale ; soit (a , b) un couple de points de E situés dans la même composante connexe par arcs. Si l'application : $\pi_1(E ; a) \to \pi_1(B ; p(a))$ définie par p est surjective, alors quel que soit le chemin γ , continu dans B , d'origine $p(a)$ et d'extrémité $p(b)$, il existe un relèvement δ de γ , continu dans E , d'origine a et d'extrémité b .

Démonstration du lemme 5. - Dans le cours de cette démonstration, on utilise les notations simplifiées i , i' , j au lieu de $i(\alpha)$, $i'(\alpha)$, $j(\alpha)$.

D'après la définition de $\mathfrak{R}$, il existe $g \in \mathcal{S}_{i;e}.\mathcal{S}_i$ tel que $\psi = \varphi \circ g$. Nécessairement g doit laisser stable N_{φ_α} ; donc, d'après la propriété I, g appartient à $\widetilde{\mathcal{S}}_i$; donc :

(3) $$g \in \mathcal{S}_{i;e} \quad .$$

De même, il existe $g' \in \mathcal{S}_{i';e}$ tel que $\psi' = \varphi' \circ g'$. On note g'' l'élément de $\mathcal{S}_j$ qui vérifie :

$$\psi \smile_{\varphi_\alpha,\varphi'_\alpha} \psi' = (\varphi \smile_{\varphi_\alpha,\varphi'_\alpha} \varphi') \circ g'' \quad ;$$

g'' est un élément du sous-groupe de $\widetilde{\mathcal{S}}_j$ formé des difféomorphismes qui laissent stable N_α (et par conséquent A_α et A'_α) ; on désignera ce groupe par $\widetilde{\mathcal{S}}(\alpha)$. Précisons les difféomorphismes induits par g'' sur A_α et A'_α :

$$g'' = \begin{cases} \varphi_\alpha \circ g \circ \varphi_\alpha^{-1} \text{ sur } A_\alpha & ; \\ \varphi'_\alpha \circ g' \circ \varphi_\alpha^{-1} \text{ sur } A'_\alpha & . \end{cases}$$

Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathcal{S}}(\alpha) \arrow[r, "\mu_\alpha"] \arrow[d] & \widetilde{\mathcal{S}}_i \arrow[d] \\
J^\infty_{N_\alpha} \widetilde{\mathcal{S}}(\alpha) \arrow[r, "\nu_\alpha"] \arrow[d] & J^\infty_{N_\alpha} \widetilde{\mathcal{S}}_i \arrow[dl, "\xi_\alpha"] \\
\mathrm{Diff}\ N_\alpha &
\end{tikzcd} \quad .$$

Dans ce diagramme, l'application μ_α est définie par

$$\mu_\alpha(\widetilde{g}) = \varphi_\alpha \circ (\widetilde{g}|A) \circ \varphi_\alpha^{-1} \text{ pour tout } \widetilde{g} \in \widetilde{\mathcal{S}}(\alpha) \quad ;$$

l'application ν_α est un homéomorphisme de $J^\infty_{N_\alpha} \widetilde{\mathcal{S}}(\alpha)$ sur une partie de $J^\infty_{N_\alpha} \widetilde{\mathcal{S}}_i$; les applications ξ_α et $\xi_\alpha \circ \nu_\alpha$ sont des fibrations dont les fibres respectives sont contractiles, il en résulte notamment :

(4) $$\pi_1(J^\infty_{N_\alpha} \widetilde{\mathcal{S}}_i , \nu_\alpha(J^\infty_{N_\alpha} \widetilde{\mathcal{S}}(\alpha))) = 0 \quad ;$$

(5) l'application canonique : $\pi_1(J^\infty_{N_\alpha} \widetilde{\mathcal{S}}(\alpha)) \to \pi_1(\mathrm{Diff}\ N_\alpha)$ est un isomorphisme.

Soit J" (resp. J) l'image de g" dans $J^\infty_{N_\alpha}\ \widetilde{\mathcal{G}}(\alpha)$ (resp. dans $J^\infty_{N_\alpha}\ \widetilde{\mathcal{G}}_i$). D'après (3), J peut être joint au jet e de l'élément neutre par un chemin continu de $J^\infty_{N_\alpha}\ \widetilde{\mathcal{G}}_i$; donc, d'après (4), il existe un tel chemin, noté γ , qui soit dans l'image de ν_α ; γ est alors l'image par ν_α d'un chemin, noté $\gamma"$, joignant e à J" dans $J^\infty_{N_\alpha}\ \widetilde{\mathcal{G}}(\alpha)$. D'après (5) et la propriété II, la fibration: $\widetilde{\mathcal{G}}_i \to J^\infty_{N_\alpha}\ \widetilde{\mathcal{G}}_i$ vérifie les conditions du lemme préliminaire. Il résulte donc de ce lemme que le chemin γ peut se relever en un chemin δ , continu dans $\widetilde{\mathcal{G}}_i$, d'origine e et d'extrémité $\varphi_\alpha \circ g \circ \varphi_\alpha^{-1}$.

Ce qui précède peut se répéter en remplaçant i par i' , φ par φ' , ψ par ψ' , etc. On note γ' l'image de $\gamma"$ dans $J^\infty_{N_\alpha}\ \widetilde{\mathcal{G}}_{i'}$; on obtient un relèvement δ' de γ' , continu dans $\widetilde{\mathcal{G}}_{i'}$, d'origine e et d'extrémité $\varphi'_\alpha \circ g' \circ \varphi'^{-1}_\alpha$. Le couple (δ , δ') définit un chemin continu dans $\widetilde{\mathcal{G}}(\alpha)$, joignant g" à e ; et ceci achève la démonstration du lemme 5 .

Le lemme 5 montre que l'opération $\smile_{\varphi_\alpha,\varphi'_\alpha}$ est compatible avec la projection $\mathfrak{E} \to \mathfrak{R}$; elle passe donc au quotient, et définit sur une partie de $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ (qui est la projection de $\mathcal{U}_{\varphi_\alpha,\varphi'_\alpha}$) une opération, à valeurs dans $\mathfrak{R}$, qu'on note $+_{\varphi_\alpha,\varphi'_\alpha}$. On va en premier lieu étudier le comportement de cette opération vis-à-vis des opérations de $\pi_o(\mathrm{Diff}(D^3 ; J^\infty_{S^2}))$ dans l'espace principal $\mathfrak{R}$. Soit (a , a') tel que $a +_{\varphi_\alpha,\varphi'_\alpha} a'$ existe, et soit (φ , φ') un élément de $\mathcal{U}_{\varphi_\alpha,\varphi'_\alpha}$ situé au-dessus de (a , a') . Soit $\sigma \in \pi_o(\mathrm{Diff}(D^3 ; J^\infty_{S^2}))$ et soit g un représentant de σ ; soit ψ un plongement d'orientation positive de D^3 dans l'intérieur de $M_{i(\alpha)}$. La notation g_ψ étant celle définie à la fin du n° 1, $(\varphi \circ g_\psi , \varphi')$ est encore un élément de $\mathcal{U}_{\varphi_\alpha,\varphi'_\alpha}$, et on a :

$$(6) \qquad (\varphi \circ g_\psi) \smile_{\varphi_\alpha,\varphi'_\alpha} \varphi' = (\varphi \smile_{\varphi_\alpha,\varphi'_\alpha} \varphi') \circ g_{\varphi_\alpha \circ \psi} \quad .$$

De ceci il résulte en particulier que la partie de $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ sur laquelle est définie l'opération $+_{\varphi_\alpha,\varphi'_\alpha}$ est <u>saturée</u> pour les opérations du groupe

$$\pi_o(\mathrm{Diff}(D^3 ; J^\infty_{S^2})) \times \pi_o(\mathrm{Diff}(D^3 ; J^\infty_{S^2})) \quad ;$$

or la projection de cette partie sur $(\mathfrak{E}/\mathfrak{G}) \times (\mathfrak{E}/\mathfrak{G})$ coïncide avec celle de $\mathcal{U}_{\varphi_\alpha,\varphi'_\alpha}$, c'est-à-dire $\mathcal{W}_\alpha$; donc <u>l'opération</u> $+_{\varphi_\alpha,\varphi'_\alpha}$ <u>est définie sur l'image</u>

réciproque $\mathcal{V}_\alpha$ de $\mathcal{W}_\alpha$ par la projection de $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ sur $(\mathfrak{E}/\mathfrak{G}) \times (\mathfrak{E}/\mathfrak{G})$; en plus on a d'après la formule (6) :

$$(a.\sigma) +_{\varphi_\alpha, \varphi'_\alpha} a' = a +_{\varphi_\alpha, \varphi'_\alpha} (a'.\sigma) = (a +_{\varphi_\alpha, \varphi'_\alpha} a').\sigma$$

pour tout $(a , a') \in \mathcal{V}_\alpha$ et tout $\sigma \in \pi_0(\mathrm{Diff}(D^3 ; J^\infty_{S^2}))$.

Soit Φ un système de couples de difféomorphismes $(\varphi_\alpha , \varphi'_\alpha)$ (pour $\alpha \in \{-7 , \ldots , 7\}$). On appelle addition associée à Φ et on note $+_\Phi$ l'opération définie sur $\mathcal{V}$ de la façon suivante : si $(a , a') \in \mathcal{V}_\alpha$, on pose : $a +_{\varphi_\alpha, \varphi'_\alpha} a' = a +_\Phi a'$. On verra au numéro suivant que pour un choix convenable du système Φ , cette "addition" est bien commutative. Il résulte de ce qui précède que, pour tout système Φ , l'addition $+_\Phi$ a les propriétés suivantes

(i) La projection $\mathfrak{R} \to \mathfrak{E}/\mathfrak{G}$ est additive ; de façon plus précise, soient a et a' deux éléments de $\mathfrak{R}$, soient A et A' leurs projections respectives dans $\mathfrak{E}/\mathfrak{G}$; pour que $a +_\Phi a'$ existe, il faut et il suffit que $A + A'$ existe ; $A + A'$ est alors la projection de $a +_\Phi a'$.

(ii) Si $a +_\Phi a'$ existe, alors $(a.\sigma) +_\Phi a'$ et $a +_\Phi (a'.\sigma)$ existent pour tout $\sigma \in \pi_0(\mathrm{Diff}(D^3 ; J^\infty_{S^2}))$, et on a :

(7) $$(a.\sigma) +_\Phi a' = a +_\Phi (a'.\sigma) = (a +_\Phi a').\sigma \quad .$$

(iii) L'opération $+_\Phi$ est régulière, autrement dit : $a +_\Phi b = a +_\Phi b'$ entraîne $b = b'$; et $a +_\Phi b = a' +_\Phi b$ entraîne $a = a'$. En plus, pour qu'il existe a (resp. b) tel que $a + b = c$, il faut et il suffit que $C - B$ (resp. $C - A$) existe ; (A , B , C désignant les projections respectives de a , b , c dans $\mathfrak{E}/\mathfrak{G}$).

(En effet, $a +_\Phi b = a +_\Phi b'$ entraîne d'après (i) : $A + B = A + B'$; donc, d'après la régularité de l'addition dans $\mathfrak{E}/\mathfrak{G}$, $B = B'$; donc il existe $\sigma \in \pi_0(\mathrm{Diff}(D^3 ; J^\infty_{S^2}))$ tel que $b' = b.\sigma$; d'après (ii), il en résulte : $a +_\Phi b = (a +_\Phi b).\sigma$; donc $\sigma = e$, donc $b = b'$.

Supposons d'autre part que $C - B$ existe, et posons : $C - B = A$; soit a' au-dessus de A ; puisque $A + B = C$, il résulte de (i) que $a' + b$ est au-dessus de C , donc de la forme $c.\sigma$; donc d'après (ii) on a $(a'.\sigma^{-1}) + b = c$).

(iiii) L'opération $+_\Phi$ est continue sur $\mathcal{W}$.

(En effet, elle a été obtenue par passage au quotient à partir des applications continues $\smile_{\varphi_\alpha, \varphi'_\alpha}$).

4. Condition de commutativité d'une addition dans $\mathfrak{R}$.

On va maintenant particulariser le système Φ comme suit ; soit ρ la rotation d'angle π de M_0 autour de la droite $\{y = z = 0\}$. On choisit :

$$(8) \qquad \begin{cases} \varphi_0 = \text{injection de } M_\Gamma \text{ dans } M_0 \; ; \\ \varphi'_0 = \rho \circ \varphi_0 \; . \end{cases}$$

D'autre part, on suppose que, pour tout $\alpha \neq 0$, on a :

$$(9) \qquad (\varphi_{-\alpha} \, , \, \varphi'_{-\alpha}) = (\varphi'_\alpha \, , \, \varphi_\alpha) \; .$$

On va montrer que, pour tout système Φ vérifiant les conditions ci-dessus, l'opération $+_\Phi$ est commutative.

En effet, pour tout α , les ensembles $\mathcal{U}_{\varphi_\alpha, \varphi'_\alpha}$ et $\mathcal{U}_{\varphi'_\alpha, \varphi_\alpha}$ sont symétriques dans $\mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$, et on a, pour tout $(\varphi \, , \, \varphi') \in \mathcal{U}_{\varphi_\alpha, \varphi'_\alpha}$:

$$(10) \qquad \varphi' \smile_{\varphi'_\alpha, \varphi_\alpha} \varphi = \varphi \smile_{\varphi_\alpha, \varphi'_\alpha} \varphi' \; .$$

Il résulte immédiatement de (9) et (10) que, pour $\alpha \neq 0$, on a :

$$a' +_{\varphi_{-\alpha}, \varphi'_{-\alpha}} a = a' +_{\varphi'_\alpha, \varphi_\alpha} a = a +_{\varphi_\alpha, \varphi'_\alpha} a' \; .$$

Il ne reste donc plus à montrer que la commutativité de l'opération $+_{\varphi_0, \varphi'_0}$. On utilise pour cela le lemme suivant (qu'on utilisera également au n° 5) :

LEMME 6. - Soit $\alpha \in \{-7 \, , \, \dots \, , \, 7\}$. Soient $(\varphi_\alpha \, , \, \varphi'_\alpha)$ et $(\tilde{\varphi}_\alpha \, , \, \tilde{\varphi}'_\alpha)$ deux couples de difféomorphismes vérifiant les conditions du début du n° 3. On suppose que ces couples sont "équivalents" au sens suivant : il existe des éléments g , g' , g'' situés respectivement dans $\mathcal{G}_{i(\alpha);e} \cdot \mathcal{S}_{i(\alpha)}$, $\mathcal{G}_{i'(\alpha);e} \cdot \mathcal{S}_{i'(\alpha)}$, $\tilde{\mathcal{G}}_{j(\alpha);e} \cdot \mathcal{S}_{j(\alpha)}$ tels que :

$$\tilde{\varphi}_\alpha = g'' \circ \varphi_\alpha \circ g \; ;$$
$$\tilde{\varphi}'_\alpha = g'' \circ \varphi'_\alpha \circ g' \; ;$$

alors les opérations $+_{\varphi_\alpha, \varphi'_\alpha}$ et $+_{\tilde{\varphi}_\alpha, \tilde{\varphi}'_\alpha}$ coïncident.

Démonstration du lemme 6. - Soit $(\varphi \, , \, \varphi') \in \mathcal{U}_{\varphi_\alpha, \varphi'_\alpha}$; soit $\chi = \varphi \smile_{\varphi_\alpha, \varphi'_\alpha} \varphi'$. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
& M_{i(\alpha)} \arrow[dl, "\varphi_\alpha"'] \arrow[dr, "g^{-1}"] & & \\
& & M_{i(\alpha)} \arrow[dl, "\tilde{\varphi}_\alpha"'] \arrow[dr, "\varphi \circ g"] & \\
M_{j(\alpha)} \arrow[r, "g''"] & M_{j(\alpha)} \arrow[rr, "\chi \circ g''^{-1}"] & & \underset{\sim}{R}^3 \\
& & M_{i'(\alpha)} \arrow[ul, "\tilde{\varphi}'_\alpha"] \arrow[ur, "\varphi' \circ g'"'] & \\
& M_{i'(\alpha)} \arrow[uul, "\varphi'_\alpha"] \arrow[ur, "g'^{-1}"'] & &
\end{tikzcd}$$

.

Il résulte de ce diagramme que $(\varphi \circ g , \varphi \circ g') \in \mathcal{U}_{\tilde{\varphi}_\alpha, \tilde{\varphi}'_\alpha}$, et que :

$$(\varphi \circ g) \underset{\tilde{\varphi}_\alpha, \tilde{\varphi}'_\alpha}{\smile} (\varphi' \circ g') = \chi \circ g''^{-1} \quad ;$$

le lemme en résulte par passage au quotient.

<u>Application du lemme 6</u>. - Soit $(a , a') \in \mathcal{V}_o$. D'après (10) on a :

$$a +_{\varphi_o, \varphi'_o} a' = a' +_{\varphi'_o, \varphi_o} a \quad .$$

D'après (8) et le lemme 6 :

$$a' +_{\varphi'_o, \varphi_o} a = a' +_{\varphi_o, \varphi'_o} a \quad ;$$

ce qui achève la démonstration de la commutativité de $+_\Phi$.

<u>Notion de différence</u>. - La commutativité de $+_\Phi$ et la propriété (iii) justifient la définition suivante : soient a et c deux éléments de $\mathfrak{R}$; s'il existe $b \in \mathfrak{R}$ tel que $a + b = c$, cet élément est unique ; il est appelé <u>différence de</u> c <u>et</u> a , et noté $c - a$. Soient A et C les projections respectives de a et c dans $\mathfrak{C}/\mathfrak{G}$; <u>pour que</u> $c - a$ <u>existe, il faut et il suffit que</u> $C - A$ <u>existe</u>.

5. Construction d'une addition associative et commutative dans $\mathfrak{R}$.

<u>Définition</u>. - Soient A , A' , A'' trois éléments de $\mathfrak{C}/\mathfrak{G}$; on dit que (A , A' , A'') est un <u>modèle d'associativité</u> pour une addition $+_\Phi$ s'il existe dans $\mathfrak{R}$ trois éléments a , a' , a'' , de projections respectives A , A' , A'' , tels que

$$(11) \qquad (a +_\Phi a') +_\Phi a'' = a +_\Phi (a' +_\Phi a'')$$

(ce qui **implique**, bien entendu, que ces sommes existent).

Propriétés des modèles d'associativité. - Soit (A , A' , A'') un modèle d'associativité.

1° Quels que soient les éléments $(\tilde{a} , \tilde{a}' , \tilde{a}'')$ de $\mathfrak{R}$, de projections respectives A , A' , A'', on a :

$$(12) \qquad (\tilde{a} +_\Phi \tilde{a}') +_\Phi \tilde{a}'' = \tilde{a} +_\Phi (\tilde{a} +_\Phi \tilde{a}'') \quad .$$

En effet, il existe trois éléments $\sigma , \sigma' , \sigma''$ de $\pi_0(\mathrm{Diff}(D^3 ; J^\infty_{S^2}))$ tels que :

$$\tilde{a} = a.\sigma \ ; \qquad \tilde{a}' = a'.\sigma' \ ; \qquad \tilde{a}'' = a''.\sigma'' \quad .$$

D'après (7) :

$$(\tilde{a} +_\Phi \tilde{a}') +_\Phi \tilde{a}'' = [(a +_\Phi a') +_\Phi a''].(\sigma + \sigma' + \sigma'')$$

et

$$\tilde{a} +_\Phi (\tilde{a}' +_\Phi \tilde{a}'') = [a +_\Phi (a' + a'')].(\sigma + \sigma' + \sigma'') \quad ;$$

(12) résulte par conséquent de (11).

2° Soient (B , B' , B'') trois éléments de $\mathfrak{E}/\mathfrak{G}$; s'il existe un difféomorphisme f de $(A \cup A' \cup A'' , A , A' , A'')$ sur $(B \cup B' \cup B'' , B , B' , B'')$, alors (B , B' , B'') est aussi un modèle d'associativité.

En effet, on peut supposer que f conserve l'orientation ; f associe alors canoniquement à tout élément a de $\mathfrak{R}$, de projection A, un élément, noté $f.a$, dont le support est B ; on a :

$$\begin{aligned}(f.a +_\Phi f.a') +_\Phi f.a'' &= f.((a +_\Phi a') +_\Phi a'') \\ &= f.a +_\Phi (f.a' +_\Phi f.a'') \quad .\end{aligned}$$

Définition explicite d'un système Φ particulier. - On rappelle que ρ désigne la rotation d'angle π de M_0 autour de la droite $\{y = z = 0\}$. On désigne par Θ un difféomorphisme de M_0 ayant les propriétés suivantes :

(a) $\qquad \Theta \in \mathfrak{S}_{0;e}$;

(b) $\qquad \Theta$ applique D_0 sur D_1 ;

(c) $\qquad \rho \circ \Theta^{-1} = \Theta \circ \rho$.

[Il existe un tel difféomorphisme ; on peut par exemple construire Θ^{-1} comme suit. On définit d'abord Θ^{-1} sur M_1, de manière que, sur $M_1 \cap \{z \leq \frac{1}{2} + \varepsilon\}$, Θ^{-1} induise une "translation", c'est-à-dire envoie tout point de cote λ au point où le méridien de ce point perce la plan $\{z = \lambda - \frac{1}{2}\}$, puis on prolonge la définition de Θ^{-1} à l'aide de la formule (c).]

Soit h un plongement, conservant l'orientation, de M_5 dans lui-même, appliquant M_1 sur A_5, A_2' sur A_5', D_1 sur D_4. Soit g un élément de $\mathcal{S}_{0;e}$ tel que la restriction de g à M_1 coïncide avec celle de $h \circ h$.

On définit φ_0 et φ_0' par les formules (8) ci-dessus.

On pose :

$$\begin{aligned}
\varphi_1' &= \text{injection de } M_0 \text{ dans } M_2 \quad ; \\
\varphi_2' &= \text{injection de } M_3 \text{ dans } M_1 \quad ; \\
\varphi_3' &= \text{injection de } M_1 \text{ dans } M_5 \quad ; \\
\varphi_5 &= \text{injection de } M_5 \text{ dans } M_2 \quad ; \\
\varphi_6 &= \text{injection de } M_2 \text{ dans } M_4 \quad .
\end{aligned}$$

Puis on définit comme suit les autres éléments du système Φ :

$\varphi_1 = \varphi_5 \circ h \circ \varphi_3'$;

φ_2 est l'application de M_1 dans M_1 définie par Θ (autrement dit, φ_2 est défini par : $\varphi_0 \circ \varphi_2 = \Theta \circ \varphi_0$) ;

$\varphi_3 = h \circ \varphi_3'$;

$\varphi_4 = \varphi_5 \circ h$; $\varphi_4' = \varphi_1' \circ g \circ \varphi_0'$;

$\varphi_5' = \varphi_1' \circ \varphi_0'$;

$\varphi_6' = s_4 \circ \varphi_6 \circ \varphi_5 \circ h \circ \varphi_3'$; [s_4 est défini au n° 1] ;

$\varphi_7 = \varphi_5 \circ h \circ \varphi_3' \circ \varphi_2'$; φ_7' est défini comme suit : la restriction de φ_7' à A_2 est définie par :

$$\varphi_7' \circ \varphi_1 = \varphi_1 \circ \varphi_2 \quad ;$$

et la restriction de φ_7' à M_0 s'identifie à un élément de $\mathcal{S}_{0;e}$ qu'on note g'.

Enfin, on définit φ_α et φ_α' pour $\alpha = -7, \ldots, -1$, à l'aide de la formule (9).

Définition. - On dit qu'une addition $+_\Phi$ est associative si, pour $\ell = 1, 2, 3, 4, 5$, les modèles $(A_\ell , A'_\ell , A''_\ell)$ sont des modèles d'associativité pour $+_\Phi$.

PROPOSITION 3. - L'addition relative au système Φ défini ci-dessus est associative et commutative.

Cette addition est la seule qu'on utilisera dans la suite ; on la désignera simplement par $+$. Elle est commutative en vertu du n° 4.

La démonstration de la proposition 3 repose sur le critère suivant, donnant une condition suffisante pour qu'un triple soit un modèle d'associativité.

S'il existe des indices $i , j , k , \ell , m , n \in \{0 , 1 , \dots , 5\}$, des indices $\alpha , \beta , \gamma , \delta \in \{-7 , \dots , +7\}$, et des systèmes de difféomorphismes $(\widetilde{\varphi}_\alpha , \widetilde{\varphi}'_\alpha)$, $(\widetilde{\varphi}_\beta , \widetilde{\varphi}'_\beta)$, $(\widetilde{\varphi}_\gamma , \widetilde{\varphi}'_\gamma)$, $(\widetilde{\varphi}_\delta , \widetilde{\varphi}'_\delta)$ respectivement équivalents (au sens du lemme 6) aux systèmes $(\varphi_\alpha , \varphi'_\alpha)$, etc., définissant l'addition, tels que le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & & M_i \arrow[dl, "\widetilde{\varphi}_\alpha"'] \arrow[ddrr, "\widetilde{\varphi}_\delta"] & & \\
 & M_\ell \arrow[dl, "\widetilde{\varphi}_\beta"'] & & & \\
M_n & & M_j \arrow[ul, "\widetilde{\varphi}'_\alpha"'] \arrow[dr, "\widetilde{\varphi}_\gamma"] & & M_n \\
 & & & M_m \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}'_\delta"] & \\
 & & M_k \arrow[uull, "\widetilde{\varphi}'_\beta"] \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}'_\gamma"'] & &
\end{tikzcd}$$

ait la propriété suivante : "l'application Λ de M_n dans lui-même définie par les formules :

$$\Lambda|(\widetilde{\varphi}_\beta \circ \widetilde{\varphi}_\alpha \cdot M_i) = \widetilde{\varphi}_\delta \circ \widetilde{\varphi}_\alpha^{-1} \circ \widetilde{\varphi}_\beta^{-1} \quad ;$$
$$\Lambda|(\widetilde{\varphi}_\beta \circ \widetilde{\varphi}'_\alpha \cdot M_j) = \widetilde{\varphi}'_\delta \circ \widetilde{\varphi}_\gamma \circ \widetilde{\varphi}'^{-1}_\alpha \circ \widetilde{\varphi}_\beta^{-1} \quad ;$$
$$\Lambda|(\widetilde{\varphi}'_\beta \cdot M_k) = \widetilde{\varphi}'_\delta \circ \widetilde{\varphi}'_\gamma \circ \widetilde{\varphi}'^{-1}_\beta \quad ;$$

est un élément du groupe $\mathcal{G}_{n;e} \cdot \mathcal{S}_n$ ". Alors le triple $(\widetilde{\varphi}_\beta \circ \widetilde{\varphi}_\alpha \cdot M_i , \widetilde{\varphi}_\beta \circ \varphi'_\alpha \cdot M_j , \varphi'_\beta \cdot M_k)$ est un modèle d'associativité.

Pour démontrer que les cinq systèmes $(A_\ell , A'_\ell , A''_\ell)$ sont des modèles d'associativité, on applique cinq fois ce critère, avec les correspondances suivantes :

	$\widetilde{\varphi}_\alpha$	$\widetilde{\varphi}'_\alpha$	$\widetilde{\varphi}_\beta$	$\widetilde{\varphi}'_\beta$	$\widetilde{\varphi}_\gamma$	$\widetilde{\varphi}'_\gamma$	$\widetilde{\varphi}_\delta$	$\widetilde{\varphi}'_\delta$	Λ
$\ell = 1$	φ_2	φ'_2	φ_0	φ'_0	$\varphi'_2 \circ s_3$	φ_2	φ_0	φ'_0	Θ^{-1}
$\ell = 2$	φ_3	φ'_3	φ_5	φ'_5	φ_0	φ'_0	φ_1	φ'_1	e
$\ell = 3$	φ_1	φ'_1	φ_6	φ'_6	$\varphi'_1 \circ \rho$	φ_1	$s_4 \circ \varphi'_6$	$s_4 \circ \varphi_6$	e
$\ell = 4$	φ'_2	φ_2	φ_1	φ'_1	φ'_1	$\varphi'_1 \circ g'^{-1}$	φ_7	φ'_7	e
$\ell = 5$	φ'_3	φ_3	φ_4	φ'_4	φ_0	φ'_0	φ_1	$\varphi'_1 \circ g$	e

La forme pratique sous laquelle l'associativité de l'addition sera utilisée dans la suite est la suivante :

COROLLAIRE. - Soit $(A, B ; C)$ un modèle d'associativité. On note :

$$A + B = D \;; \qquad B + C = E \;; \qquad A + B + C = F \quad .$$

Soient a, b, c, d, e, f des éléments de $\mathfrak{R}$ situés respectivement au-dessus de A, B, C, D, E, F. Considérons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} a + b &= d \;; \\ b + c &= e \;; \\ a + e &= f \;; \\ d + c &= f \;. \end{aligned}$$

Si trois de ces relations sont vérifiées, la quatrième l'est aussi.

Démonstration du corollaire. - Les quatre cas possibles se ramènent aussitôt à deux :

1er cas. - On suppose qu'on a :

$$a + b = d \;; \qquad b + c = e \;; \qquad a + e = f \quad .$$

Alors : $\quad d + c = (a + b) + c = a + (b + c) = a + e = f \quad .$

2ème cas. - On suppose qu'on a :

$$a + b = d \;; \qquad a + e = f \;; \qquad d + c = f \quad .$$

Pour montrer $b + c = e$, il suffit d'après (iii) de montrer : $a + (b + c) = a + e$. Or on a bien :

$$a + (b + c) = (a + b) + c = d + c = f = a + e \quad .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] CERF (Jean). - Topologie de certains espaces de plongements, Bull. Soc. math. France, t. 89, 1961, p. 227-382.

[2] CERF (Jean). - Théorèmes de fibrations des espaces de plongements, Applications, Séminaire Cartan : Topologie différentielle, t. 15, 1962/63, n° 8, 13 p.

[3] CERF (Jean). - La nullité de $\pi_0(\text{Diff } S^3)$, 1 : Position du problème, Séminaire Cartan : Topologie différentielle, t. 15, 1962/63, n° 9, 27 p.

[4] DOUADY (Adrien). - Variétés à bord anguleux et voisinages tubulaires, Séminaire Cartan : Topologie différentielle, t. 14, 1961/62, n° 1, 11 p.