SÉMINAIRE HENRI CARTAN

ITIRO TAMURA

Classification des variétés différentiables, $(n-1)$-connexes, sans torsion, de dimension $2n+1$

Séminaire Henri Cartan, tome 15 (1962-1963), exp. nº 16-19, p. 1-27
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1962-1963__15__A7_0>

CLASSIFICATION DES VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES, $(n - 1)$-CONNEXES, SANS TORSION, DE DIMENSION $2n + 1$

par Itiro TAMURA (*)

1. Variétés différentiables W_{μ}.

Soit $n \geqslant 4$, et soit $\mu = (\mu', \mu'')$ un élément de la somme directe des groupes d'homotopie de groupes orthogonaux spéciaux $\pi_{n-1}(SO(n + 1)) = \pi_{n-1}(SO)$ (le groupe d'homotopie stable) et $\pi_n(SO(n))$:

$$\mu = (\mu', \mu'') \in \pi_{n-1}(SO(n + 1)) \oplus \pi_n(SO(n)) = \pi_{n-1}(SO) \oplus \pi_n(SO(n)) .$$

Désignons par $(A_{\mu'}, S^n, D^{n+1}, \overline{p})$ le fibré orienté de base S^n, fibre D^{n+1} (la $(n + 1)$-boule), projection $\overline{p}$, dont l'application caractéristique est μ'. Les structures différentiables (usuelles) orientées de S^n et de D^{n+1} donnent une structure différentiable orientée à $A_{\mu'}$. "Différentiable" signifie toujours indéfiniment différentiable. Le bord $\partial A_{\mu'}$ de $A_{\mu'}$ est un fibré de base S^n, fibre S^n, projection $p = \overline{p} | \partial A_{\mu'}$:

$$(\partial A_{\mu'}, S^n, S^n, p) .$$

On sait que l'application canonique

$$\pi_{n-1}(SO(n)) \to \pi_{n-1}(SO(n + 1)) = \pi_{n-1}(SO)$$

est surjective. Alors ce fibré a une section s. Donc, on a

$$\pi_q(\partial A_{\mu'}) = 0 , \qquad q = 0 , 1 , \ldots , n - 1 ,$$

$$\pi_n(\partial A_{\mu'}) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} .$$

Celui-ci est engendré par les classes représentées par s et $p^{-1}(x)$ $(x \in S^n)$.

Soit

$$W_{\mu} = A_{\mu'} \cup_{g} (D^{n+1} \times D^n)$$

la variété différentiable compacte orientée, avec bord, obtenue par recollement de $A_{\mu'}$ et de $D^{n+1} \times D^n$ (orientée) au moyen d'un plongement préservant les orientations :

$$g : \partial D^{n+1} \times D^n \to \partial A_{\mu'} ,$$

(*) Les rectifications, qui faisaient l'objet d'un erratum joint au tirage initial, ont été incorporées dans le texte du présent tirage.

les orientations de $\partial D^{n+1} \times D^n$ et de $\partial A_{\mu'}$ étant compatibles avec celles de $D^{n+1} \times D^n$ et de $A_{\mu'}$ respectivement, tel que

$$g(\partial D^{n+1} \times 0) = p^{-1}(x) \qquad (x \in S^n) \quad ,$$

$$(D^{n+1} \times 0) \underset{g|(\partial D^{n+1} \times 0)}{\cup} \overline{p}^{-1}(x) = S^{n+1} \qquad \text{(la } (n+1)\text{-sphère usuelle)} \quad ,$$

et que l'application caractéristique du fibré du voisinage tubulaire (fermé) de $D^{n+1} \times 0 \underset{g|(\partial D^{n+1} \times 0)}{\cup} \overline{p}^{-1}(x)$ dans W_μ soit μ''. W_μ est bien définie par μ et ne dépend pas du choix de g (cf. [14] (*)). W_μ est le "plombage" des deux fibrés $(A_{\mu'}, S^n, D^{n+1}, \overline{p})$ avec l'application caractéristique μ' et $(A_{\mu''}, S^{n+1}, D^n, \overline{p}')$ avec l'application caractéristique μ'', c'est-à-dire, W_μ est la variété différentiable compacte orientée obtenue à partir de $A_{\mu'}$ et de $A_{\mu''}$ en identifiant

$$\overline{p}^{-1}(D^n) = D^n \times D^{n+1} \quad \text{et} \quad \overline{p}'^{-1}(D^{n+1}) = D^{n+1} \times D^n \quad \text{par} \quad (x, y) = (y, x) \quad .$$

Evidemment on a

$$\pi_1(W_\mu) = 0 \quad ,$$
$$H_q(W_\mu) = 0 \qquad q \neq 0, n, n+1 \quad ,$$
$$H_o(W_\mu) = H_n(W_\mu) = H_{n+1}(W_\mu) = \underset{\sim}{Z} \quad .$$

Les groupes d'homologie et de cohomologie sont toujours à coefficients entiers, sauf mention explicite du contraire.

Le bord ∂W_μ est homéomorphe à S^{2n} (cf. [9]) :

$$\partial W_\mu \in \Theta^{2n} \quad ,$$

où Θ^q est le groupe des structures différentiables sur S^q (cf. [7], [10], [11]).

Si $\partial W_\mu = S^{2n}$, la variété différentiable $W_\mu \underset{\iota}{\cup} D^{2n+1}$ obtenue par recollement de W_μ et de D^{2n+1} au moyen d'un difféomorphisme $\iota : \partial W_\mu \to S^{2n} = \partial D^{2n+1}$ est $(n-1)$-connexe, et

$$H_n(W_\mu \underset{\iota}{\cup} D^{2n+1}) = H_{n+1}(W_\mu \underset{\iota}{\cup} D^{2n+1}) = Z \quad .$$

2. Présentation.

On va démontrer la proposition suivante :

(*) Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie.

PROPOSITION. - <u>Soit M^{2n+1} une variété différentiable compacte orientée, sans bord, $(n-1)$-connexe, sans torsion, de dimension $2n+1$, (n étant $\geqslant 4$), telle que</u>

$$\pi_1(M^{2n+1}) = 0$$

$$H_q(M^{2n+1}) = \begin{cases} \underset{\sim}{Z} & q = 0\ ,\ 2n+1\ , \\ \overset{r}{\bigoplus} \underset{\sim}{Z} \quad (r \geqslant 1) & q = n\ ,\ n+1\ , \\ 0 & \text{sinon}\ , \end{cases}$$

<u>où $\overset{r}{\bigoplus}\underset{\sim}{Z}$ désigne la somme directe de r groupes cycliques infinis. Alors M^{2n+1} est la variété différentiable obtenue par recollement de $\overset{r}{\underset{i=1}{\natural}} W_{\mu_i}$ et de la boule D^{2n+1} au moyen d'un difféomorphisme</u>

$$\iota : \partial(\overset{r}{\underset{i=1}{\natural}} W_{\mu_i}) \to \partial D^{2n+1} :$$

$$M^{2n+1} = (\overset{r}{\underset{i=1}{\natural}} W_{\mu_i}) \underset{\iota}{\cup} D^{2n+1} \quad ,$$

<u>où $\natural$ désigne la somme connexe à bord ("boundary-connected sum") et $\overset{r}{\underset{i=1}{\natural}} W_{\mu_i}$ désigne la somme connexe à bord de W_{μ_1}, W_{μ_2}, ..., W_{μ_r}</u> [7], [13].

<u>Démonstration.</u> - D'après un théorème de SMALE [3], [15], il existe une fonction différentiable $f : M^{2n+1} \to [0\ ,\ 2n+1]$ qui a précisément $2r+2$ points critiques non-dégénérés a_o, a_1, ..., a_r, b_1, b_2, ..., b_r, b_o tels que

$$f(a_o) = \text{l'indice de } a_o = 0 \quad ,$$

$$f(a_i) = \text{l'indice de } a_i = n \qquad i = 1\ ,\ 2\ ,\ \dots\ ,\ r \quad ,$$

$$f(b_i) = \text{l'indice de } b_i = n+1 \qquad i = 1\ ,\ 2\ ,\ \dots\ ,\ r \quad ,$$

$$f(b_o) = \text{l'indice de } b_o = 2n+1 \quad .$$

On notera

$$W = f^{-1}[0\ ,\ n + \tfrac{1}{2}]\ , \qquad W' = f^{-1}[n + \tfrac{1}{2}\ ,\ 2n+1] \quad .$$

a_1, a_2, ..., a_r représente un système de générateurs de $H_n(M^{2n+1}) = H_n(W)$. b_1, b_2, ..., b_r représente un système de générateurs de $H_{n+1}(M^{2n+1})$ et, de même, celui de $H_n(W') = \overset{r}{\bigoplus}\underset{\sim}{Z}$ par dualité. W est une variété d'anses ("handlebody") [13] :

$$W = D^{2n+1} \cup \underset{(a_1)}{(D_1^n \times D_1^{n+1})} \cup \underset{(a_2)}{(D_2^n \times D_2^{n+1})} \cup \dots \cup \underset{(a_r)}{(D_r^n \times D_r^{n+1})} \quad ,$$

c'est-à-dire, W est la variété obtenue en recollant r anses (a_1), (a_2), ..., (a_r) à D^{2n+1} par les plongements

$$\partial D_i^n \times D_i^{n+1} \to \partial D^{2n+1} \qquad i = 1, 2, \dots, r \quad .$$

Evidemment on a

$$\pi_1(W) = 0 \quad ,$$

$$H_q(W) = \begin{cases} \underset{\sim}{Z} & q = 0 \quad , \\ \bigoplus_{r} \underset{\sim}{Z} & q = n \quad , \\ 0 & q \neq 0, n \quad . \end{cases}$$

On peut choisir des générateurs a_1', a_2', ..., a_r' de $H_n(M^{2n+1})$ et b_1', b_2', ..., b_r' de $H_{n+1}(M^{2n+1})$ tels que

$$a_i' \circ b_j' = \delta_{ij} \qquad i, j = 1, 2, \dots, r \quad .$$

Soient

$$f_i : S^n \to W \qquad i = 1, 2, \dots, r$$

des applications telles que

$$[f_i(S^n)] = a_i' \qquad i = 1, 2, \dots, r \quad ,$$

où $[f_i(S^n)]$ désigne l'élément de $H_n(W)$ représenté par $f_i(S^n)$. On peut supposer, d'après un théorème de WHITNEY [20], que les f_i $(i = 1, 2, \dots, r)$ sont des plongements dans $\operatorname{Int} W$ et que

$$f_i(S^n) \cap f_j(S^n) = \emptyset \qquad i \neq j \quad .$$

Soient $N(f_i)$ $(i = 1, 2, \dots, r)$ des voisinages tubulaires des $f_i(S^n)$ dans $\operatorname{Int} W$, tels que

$$N(f_i) \cap N(f_j) = \emptyset \qquad i \neq j \quad .$$

Connectons $N(f_i)$ et $N(f_{i+1})$ par un tube $D_i^1 \times D_i^{2n}$ plongé dans $\operatorname{Int} W$ $(i = 1, 2, \dots, r-1)$ de façon que

$$N(f_i) \cap (D_i^1 \times D_i^{2n}) = \partial N(f_i) \cap (D_i^1 \times D_i^{2n}) = (-1) \times D_i^{2n} \quad ,$$
$$N(f_{i+1}) \cap (D_i^1 \times D_i^{2n}) = \partial N(f_{i+1}) \cap (D_i^1 \times D_i^{2n}) = (1) \times D_i^{2n} \quad ,$$
$$N(f_j) \cap (D_i^1 \times D_i^{2n}) = \emptyset \qquad (j \neq i, i+1) \quad ,$$
$$(D_i^1 \times D_i^{2n}) \cap (D_j^1 \times D_j^{2n}) = \emptyset \qquad (i \neq j) \quad ,$$

alors on a la somme connexe à bord $\hat{W}$ de $N(f_1)$, $N(f_2)$, ..., $N(f_r)$, réalisée dans $\operatorname{Int} W$:

$$\hat{W} = \bigsqcup_{i=1}^{r} N(f_i) \subset \operatorname{Int} W \quad .$$

Evidemment $\hat{W}$ est une variété d'anses :

$$\hat{W} = D^{2n+1} \cup \underset{(a_1')}{(D_1^n \times D_1^{n+1})} \cup \underset{(a_2')}{(D_2^n \times D_2^{n+1})} \cup \dots \cup \underset{(a_r')}{(D_r^n \times D_r^{n+1})} \quad .$$

Considérons la variété différentiable compacte orientée $W - \operatorname{Int} \hat{W}$ dont les bords sont ∂W et $-\partial\hat{W}$. Il est aisé de voir que

$$H_q(W , \hat{W}) = H_q(W - \operatorname{Int} \hat{W} , \partial\hat{W}) = H^{2n+1-q}(W - \operatorname{Int} \hat{W} , \partial W) = 0 , \quad q = 0 , 1 , 2 , \dots$$

Il en résulte que les injections

$$\partial\hat{W} \to W - \operatorname{Int} \hat{W} \quad ,$$

$$\partial W \to W - \operatorname{Int} \hat{W}$$

sont des homotopie-équivalences. Alors ∂W et $\partial\hat{W}$ sont h-cobordantes. Donc, d'après un théorème de SMALE [15], on a

$$W - \operatorname{Int} \hat{W} = \partial W \times I = \partial\hat{W} \times I \quad ,$$

et on peut identifier W et $\hat{W}$:

$$W = D^{2n+1} \cup \underset{(a_1')}{(D_1^n \times D_1^{n+1})} \cup \underset{(a_2')}{(D_2^n \times D_2^{n+1})} \cup \dots \cup \underset{(a_r')}{(D_r^n \times D_r^{n+1})} = \bigsqcup_{i=1}^{r} A_{\mu_i'} \quad ,$$

où on a posé $A_{\mu_i'} = N(f_i)$ $(i = 1 , 2 , \dots , r)$.

De même, on a

$$W' = D^{2n+1} \cup \underset{(b_1')}{(D_1^n \times D_1^{n+1})} \cup \underset{(b_2')}{(D_2^n \times D_2^{n+1})} \cup \dots \cup \underset{(b_r')}{(D_r^n \times D_r^{n+1})} \quad .$$

Alors $M^{2n+1} - \operatorname{Int} D^{2n+1}$ est la variété différentiable obtenue en recollant r anses b_1', b_2', ..., b_r' à W par les plongements

$$g_i' : \partial D_i^{n+1} \times D^n \to \partial W \quad ;$$

$$M^{2n+1} - \operatorname{Int} D^{2n+1} = W \cup \underset{(b_1')}{(D_1^{n+1} \times D_1^n)} \cup \underset{(b_2')}{(D_2^{n+1} \times D_2^n)} \cup \dots \cup \underset{(b_r')}{(D_r^{n+1} \times D_r^n)} \quad .$$

Soient s_i une section différentiable du fibré $(\partial A_{\mu_i'} , S^n , S^n , p_i)$ et $p_i^{-1}(x_i)$ une fibre $(x_i \in S^n)$, $i = 1 , 2 , \dots , r$. Evidemment on a

$$\pi_n(\partial W) = \bigoplus^{2r} \mathbb{Z} \quad ,$$

qui est engendré par les classes représentées par s_i , $p_i^{-1}(x_i)$ $(i = 1 , 2 , \dots , r)$. Soient

$$\rho_1 : \pi_n(\partial W) \to \underset{\sim}{Z} \quad ,$$
$$\rho_1' : \pi_n(\partial W) \to \underset{\sim}{Z}$$

les projections dans un facteur engendré par $\{s_1\}$ et $\{p_1^{-1}(x_1)\}$ respectivement. Alors, il est aisé de voir que

$$\rho_1(\{g_i'(\partial D^{n+1} \times 0)\}) = 0 \qquad i = 2 , 3 , \dots , r \quad ,$$
$$\rho_1'(\{g_i'(\partial D^{n+1} \times 0)\}) = 0 \qquad i = 2 , 3 , \dots , r \quad .$$

Donc, d'après un théorème de WHITNEY [20], on peut supposer que

$$s_1 \cap g_i'(\partial D^{n+1} \times D^n) = \emptyset \qquad i = 2 , 3 , \dots , r \quad ,$$
$$p_1^{-1}(x_1) \cap g_i'(\partial D^{n+1} \times D^n) = \emptyset \qquad i = 2 , 3 , \dots , r \quad .$$

Soit

$$W_1 = W \cup \underset{(b_2')}{(D_2^{n+1} \times D_2^n)} \cup \underset{(b_3')}{(D_3^{n+1} \times D_3^n)} \cup \dots \cup \underset{(b_r')}{(D_r^{n+1} \times D_r^n)}$$

la variété différentiable obtenue en recollant $r - 1$ anses b_2' , b_3' , ... , b_r' à W par g_i' $(i = 2 , 3 , \dots , r)$. Alors on a,

$$H_q(W_1) = \begin{cases} \underset{\sim}{Z} & q = 0 \quad , \\ \overset{r}{\bigoplus} \underset{\sim}{Z} & q = n \quad , \\ \overset{r-1}{\bigoplus} \underset{\sim}{Z} & q = n + 1 \quad , \\ 0 & q \neq 0 , n , n + 1 \quad , \end{cases}$$

et

$$M^{2n+1} - \operatorname{Int} D^{2n+1} = W_1 \cup \underset{(b_1')}{(D_1^{n+1} \times D_1^n)} \quad .$$

D'après la suite exacte

$$\to H_{q+1}(W_1) \to H_{q+1}(W_1 , \partial W_1) \to H_q(\partial W_1) \to H_q(W_1) \to$$

et la dualité

$$H_q(W_1) = H^{2n+1-q}(W_1) = \operatorname{Hom}(H_{2n+1-q}(W_1) , \underset{\sim}{Z}) \quad ,$$

on vérifie facilement que ∂W_1 est $(n - 1)$-connexe et que

$$\pi_n(\partial W_1) = \underset{\sim}{Z} \oplus \underset{\sim}{Z} \quad ,$$

qui est engendré par $\{s_1\}$ et $\{p_1^{-1}(x_1)\}$. Puisque $a_i \circ b_1 = \delta_{i1}$, on a

$$g_1'(\partial D^{n+1} \times 0) \simeq p_1^{-1}(x_1) \quad .$$

Donc, d'après un théorème de HAEFLIGER [4], g_1' est difféotope au plongement

$$g_1 : \partial D^{n+1} \times D^n \to \partial W_1$$

tel que

$$g_1(\partial D^{n+1} \times 0) = p_1^{-1}(x_1) \quad ,$$

$$(D^{n+1} \times 0) \underset{g_1|(\partial D^{n+1}\times 0)}{\cup} \overline{p}_1^{-1}(x_1) = S^{n+1} \quad ,$$

où $\overline{p}_i$ désigne la projection du fibré $(A_{\mu_i'}, S^n, D^{n+1}, \overline{p}_i)$. Evidemment $M^{2n+1} - \operatorname{Int} D^{2n+1}$ est la variété différentiable obtenue en recollant une anse à W_1 par le plongement g_1.

En répétant cette opération, on peut voir que $M^{2n+1} - \operatorname{Int} D^{2n+1}$ est la variété différentiable obtenue en recollant r anses $D_i^{n+1} \times D_i^n$ $(i = 1, 2, \dots, r)$ à W par les plongements

$$g_i : \partial D_i^{n+1} \times D_i^n \to \partial W \qquad i = 1, 2, \dots, r \quad ,$$

tels que

$$g_i(\partial D_i^{n+1} \times 0) = p_i^{-1}(x_i) \quad ,$$

$$(D^{n+1} \times 0) \underset{g_i|(\partial D^{n+1}\times 0)}{\cup} \overline{p}_i^{-1}(x_i) = S^{n+1} \quad .$$

Alors on a

$$M^{2n+1} - \operatorname{Int} D^{2n+1} = \mathop{\natural}_{i=1}^{r} W_{\mu_i} \quad .$$

COROLLAIRE. - <u>Si</u> ∂W_{μ_i} <u>est difféomorphe à</u> S^{2n} <u>et si</u> M_i <u>est une variété différentiable orientée telle que</u>

$$M_i - \operatorname{Int} D^{2n+1} = W_{\mu_i} \qquad (i = 1, 2, \dots, r) \quad ,$$

<u>on a</u>

$$M^{2n+1} = (\mathop{\#}_{i=1}^{r} M_i) \# \tilde{S}^{2n+1} \quad , \qquad \tilde{S}^{2n+1} \in \Theta^{2n+1} \quad ,$$

où $\#$ désigne la somme connexe ("connected sum") et $\overset{r}{\underset{i=1}{\#}} M_i$ désigne la somme connexe de $M_1, M_2, \ldots, M_r$ [7].

En effet,

$$\left(\overset{r}{\underset{i=1}{\#}} M_i\right) - \operatorname{Int} D^{2n+1} = \overset{r}{\underset{i=1}{\natural}} W_{\mu_i} \quad .$$

3. Lemmes.

Nous démontrons deux lemmes que nous allons utiliser.

LEMME 1. - Soient V_1^q, V_2^q deux variétés différentiables compactes orientées sans bord de dimension q. Alors

$$V_1^q \# \tilde{S}^q = V_2^q , \qquad \tilde{S}^q \in \Theta^q \quad ,$$

si et seulement s'il existe un difféomorphisme

$$\hat{\varphi} : V_1^q - \operatorname{Int} D^q \to V_2^q - \operatorname{Int} D^q \quad ,$$

tel que

$$\tilde{S}^q = D^q \underset{\hat{\varphi}|\partial D^q}{\cup} D^q \quad .$$

D'abord, supposons qu'il existe un difféomorphisme

$$\varphi : V_1^q \# \tilde{S}^q \to V_2^q \quad .$$

Parce que

$$V_1^q \# \tilde{S}^q = (V_1^q - \operatorname{Int} D^q) \underset{\psi}{\cup} D^q \quad ,$$

$$\tilde{S}^q = D^q \underset{\psi}{\cup} D^q \quad ,$$

où $\psi : \partial D^q \to \partial D^q$ est un difféomorphisme, on a

$$\hat{\varphi} : \varphi|(V_1^q - \operatorname{Int} D^q) : V_1^q - \operatorname{Int} D^q \to V_2^q - \operatorname{Int} \varphi(D^q) \quad ,$$

$$\hat{\varphi}|\partial D^q = \psi \quad .$$

Inversement, supposons qu'il existe $\hat{\varphi}$. Alors il est aisé de voir que l'on peut prolonger $\hat{\varphi}$ en un difféomorphisme

$$(V_1^q - \operatorname{Int} D^q) \underset{\hat{\varphi}|\partial D^q}{\cup} D^q \to V_2^q \quad .$$

LEMME 2. - Soit W^{4k} une variété différentiable compacte orientée avec bord, $(2k-1)$-connexe de dimension $4k$ ($k \geqslant 2$) dont le bord ∂W^{4k} est un élément de $\Theta^{4k-1}(\partial\pi)$ (le sous-groupe de Θ^{4k-1} formé par les bords des π-variétés [7] :

$$\partial W^{4k} \in \Theta^{4k-1}(\partial\pi) \quad .$$

Alors l'invariant $\lambda'(\partial W^{4k})$ de Milnor [10] est donné par

$$\lambda'(\partial W^{4k}) = \frac{1}{8} I(W^{4k}) \bmod 2^{2k-1}(2^{2k-1}-1) \ , \quad k : \text{impair} \quad ,$$

$$\lambda'(\partial W^{4k}) = \frac{1}{8} I(W^{4k}) - \frac{2^{2k-5}(2^k-1)^2 B^2_{k/2}}{(k!)^2} p^2_{2k}(W^{4k}) [W^{4k}, \partial W^{4k}]$$

$$\bmod 2^{2k-2}(2^{2k-1}-1) \ , \quad k : \text{pair} \quad .$$

Supposons que

$$\lambda'(\partial W^{4k}) = t \quad .$$

Soit

$$V^{4k} = W^{4k} \cup_{\iota} (\overset{t}{\natural} W_o)$$

la variété différentiable compacte orientée sans bord obtenue par recollement de W^{4k} et de $-(\overset{t}{\natural} W_o)$ au moyen d'un difféomorphisme

$$\iota : \partial W^{4k} \to \overset{t}{\#} M_o = \partial(\overset{t}{\natural} W_o) \quad ,$$

où W_o est la π-variété compacte orientée, $(2k-1)$-connexe dont le bord $M_o = \partial W_o$ est un générateur de $\Theta^{4k-1}(\partial\pi)$ [10] ; $\overset{t}{\natural} W_o$ désigne la somme connexe à bord de t exemplaires de W_o, et $\overset{t}{\#} M_o$ désigne la somme connexe de t exemplaires de M_o. Il est facile de voir que V^{4k} est $(2k-1)$-connexe et que

$$I(V^{4k}) = I(W^{4k}) - tI(W_o)$$
$$= I(W^{4k}) - 8t \quad .$$

Dans le cas où k est impair, l'index $I(V^{4k})$ est donné par

$$I(V^{4k}) = \frac{2^{2k}(2^{2k}-1) B_k}{(2k)!} p_{4k}(V^{4k}) [V^{4k}]$$

et le $\hat{A}$-genre

$$\hat{A}(V^{4k}) = \frac{-B_k}{2((2k)!)} p_{4k}(V^{4k}) [V^{4k}]$$

est entier pair [1], [2], [5], [18]. Alors on a

$$I(V^{4k}) = 0 \bmod 2^{2k+2}(2^{2k-1}-1) \quad .$$

Dans le cas où k est pair, l'index $I(V^{4k})$ est donné par

$$I(V^{4k}) = (\frac{2^{2k}(2^{2k-1}-1)\, B_k}{(2k)!}\, p_{4k}(V^{4k})$$

$$+ \frac{1}{2}\,(\frac{2^{2k}(2^{k-1}-1)^2\, B^2_{k/2}}{(k!)^2} - \frac{2^{2k}(2^{2k-1}-1)\, B_k}{(2k)!})\, p^2_{2k}(V^{4k}))\, [V^{4k}]$$

et le $\hat{A}$-genre

$$\hat{A}(V^{4k}) = (\frac{-B_k}{2((2k)!)}\, p_{4k}(V^{4k}) + (\frac{B^2_{k/2}}{8(k!)^2} + \frac{B_k}{4((2k)!)})\, p^2_{2k}(V^{4k}))\, [V^{4k}]$$

est entier [1], [2], [5], [12], [18]. Alors on a

$$I(V^{4k}) = \frac{2^{2k-2}(2^k-1)^2\, B^2_{k/2}}{(k!)^2}\, p^2_{2k}(V^{4k})\, [V^{4k}] \mod 2^{2k+1}(2^{2k-1}-1) \quad .$$

Le lemme en résulte.

4. Le cas $n = 4$.

On sait que

$$\pi_3(SO) \approx \mathbb{Z} \,, \qquad \pi_4(SO(4)) \approx \mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2 \quad .$$

Alors on a

$$\mu = (\mu' \,, \mu'') \longleftrightarrow (m \,, m' \,, m'') \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2 \quad .$$

Donc, d'après la proposition du n° 2, on obtient

THÉORÈME 1. - Soit M^9 une variété différentiable compacte orientée sans bord, 3-connexe, sans torsion de dimension 9. Alors

$$M^9 = (\natural_{i=1}^{r} W_{m_i, m'_i, m''_i}) \cup_{\iota} D^9 \quad ,$$

où $\iota : \partial(\natural_{i=1}^{r} W_{m_i, m'_i, m''_i}) \to \partial D^9$ est un difféomorphisme.

Remarque. - Soit $(B_{\mu'} \,, S^4 \,, S^5 \,, p)$ (resp. $(\overline{B}_{\mu'} \,, S^4 \,, D^6 \,, \overline{p})$) le fibré de base S^4, fibre S^5 (resp. D^6) avec l'application caractéristique $\mu' \in \pi_3(SO(6)) = \pi_3(SO)$. Soient s une section différentiable du fibré $(B_{\mu'} \,, S^4 \,, S^5 \,, p)$ et $U(s)$ un voisinage tubulaire de s dans $B_{\mu'}$. Puisque s et la section nulle de $\overline{B}_{\mu'}$ sont difféotopes dans $\overline{B}_{\mu'}$, on a

$$U(s) = A_{\mu'} \quad .$$

Donc

$$W_{(\mu',0,0)} = U(s) \cup p^{-1}(D^4) \ , \ (D^4 \subset S^4)$$
$$= B_{\mu'} - \operatorname{Int} D^9 \quad .$$

Alors on a

$$\Big(\natural_{i=1}^{r} W_{m_i,0,0}\Big) \underset{\iota}{\cup} D^9 = \Big(\#_{i=1}^{r} B_{m_i}\Big) \# \tilde{S}^9 \ , \qquad \tilde{S}^9 \in \Theta^9 \approx \underset{\sim}{Z}_2 + \underset{\sim}{Z}_2 + \underset{\sim}{Z}_2 \ \text{ ou } \ \underset{\sim}{Z}_2 + \underset{\sim}{Z}_4 \quad .$$

5. Le cas $n = 5$.

On sait que

$$\pi_4(SO) = 0 \ , \qquad \pi_5(SO(5)) = \underset{\sim}{Z}_2 \quad .$$

Alors on a

$$\mu = (0 \ , \ 0) \ \text{ ou } \ (0 \ , \ 1) \quad .$$

$W_{(0,0)}$ est le plombage de $S^5 \times D^6$ et de $S^6 \times D^5$. Donc

$$W_{(0,0)} = S^6 \times S^5 - \operatorname{Int} D^{11} \quad .$$

$W_{(0,1)}$ est le plombage de $S^5 \times D^6$ et du fibré non-trivial de base S^6 , fibre D^5 .

Soit (A^{11} , S^6 , D^5) le fibré orienté, non trivial, de base S^6 , fibre D^5 . La variété différentiable obtenue par recollement de deux copies de A^{11} au moyen de l'application identique $\partial A^{11} \to \partial A^{11}$ est difféomorphe à $S^6 \times S^5$, parce que cette variété est un fibré de base S^6 , fibre S^5 , et $\pi_5(SO(6)) = 0$. Donc on a

$$W_{(0,1)} = S^6 \times S^5 - \operatorname{Int} D^{11} \ .$$

On va démontrer le lemme suivant :

LEMME 3. - La relation

$$\Big(\#^{r}(S^6 \times S^5)\Big) \# \tilde{S}^{11} = \#^{r}(S^6 \times S^5) \ , \quad \text{où } \ \tilde{S}^{11} \in \Theta^{11} = \Theta^{11}(\partial\pi) \ ,$$

entraîne $\tilde{S}^{11} = S^{11}$.

Supposons que

$$\Big(\#_{i=1}^{r} (S_i^6 \times S_i^5)\Big) \# \tilde{S}^{11} \quad \text{et} \quad \#_{i=1}^{r} (S_i^6 \times S_i^5)$$

soient difféomorphes. Alors, d'après le lemme 1 , il existe un difféomorphisme

$$\hat{\varphi} : \left(\mathop{\#}_{i=1}^{r} (S_i^6 \times S_i^5) \right) - \mathrm{Int}\, D^{11} \to \left(\mathop{\#}_{i=1}^{r} (S_i^6 \times S_i^5) \right) - \mathrm{Int}\, D^{11} ,$$

tel que

$$\tilde{S}^{11} = D^{11} \bigcup_{\hat{\varphi} | \partial D^{11}} D^{11} .$$

Soit

$$W^{12} = \left(\mathop{\natural}_{i=1}^{r} (S_i^6 \times D_i^6) \right) \bigcup_{\hat{\varphi}} \left(\mathop{\natural}_{i=1}^{r} (S_i^6 \times D_i^6) \right)$$

la variété différentiable compacte orientée de dimension 12, obtenue par recollement de $\mathop{\natural}_{i=1}^{r} (S_i^6 \times D_i^6)$ et de $- \mathop{\natural}_{i=1}^{r} (S_i^6 \times D_i^6)$ au moyen de $\hat{\varphi}$. Evidemment, on a $\partial W^{12} = \tilde{S}^{11}$.

D'après la suite exacte de Mayer-Vietoris, il est aisé de voir que

$$H_q(W^{12}) = \begin{cases} \underset{\sim}{Z} & q = 0 , \\ \overset{2r}{\oplus} \underset{\sim}{Z} & q = 6 , \\ 0 & \text{sinon} , \end{cases}$$

et que $H_6(W^{12})$ a un système de générateurs

$$a_1 , a_2 , \dots , a_r , \quad a'_1 , a'_2 , \dots , a'_r ,$$

tels que a_i est représenté par $S_i^6 \times 0$ $(i = 1 , 2 , \dots , r)$, et que a'_i est représenté par un cycle c_i, dont l'intersection $c_i \cap \left(\mathop{\natural}_{i=1}^{r} (S_i^6 \times D_i^6) \right)$ est $x_i \times D_i^6$ $(x_i \in S_i^6)$ $(i = 1 , 2 , \dots , r)$. La matrice des nombres d'intersection des $a_1 , a_2 , \dots , a_r$, $a'_1 , a'_2 , \dots , a'_r$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & S \end{pmatrix} , \quad E = (\delta_{ij}) , \quad S = (s_{ij}) , \quad s_{ij} = s_{ji} ,$$

dont la signature est égale à zéro. Donc, d'après le lemme 2, on a

$$\lambda'(\tilde{S}^{11}) = 0 .$$

Alors, d'après le corollaire de la proposition et le lemme 3, on obtient :

THÉORÈME 2. - Soit M^{11} une variété différentiable compacte orientée, sans bord, 4-connexe, sans torsion, de dimension 11. Alors

$$M^{11} = \mathop{\#}^{r} (S^6 \times S^5) \,\#\, \tilde{S}^{11} , \quad \tilde{S}^{11} \in \Theta^{11} \approx \underset{\sim}{Z}_{992} .$$

COROLLAIRE. - <u>La variété topologique</u> $S^6 \times S^5$ <u>admet exactement 992 structures différentiables orientées.</u>

COROLLAIRE. - <u>Soient</u> M_1^{11} , M_2^{11} <u>deux variétés différentiables compactes orientées, sans bord, 4-connexes, sans torsion, de dimension 11. Alors</u> M_1^{11} <u>et</u> M_2^{11} <u>sont homéomorphes (homotopes) si, et seulement si, leurs nombres de Betti sont égaux</u>.

6. <u>Le cas</u> $n = 6$.

On sait que

$$\pi_5(SO) = 0 \ , \qquad \pi_6(SO(6)) = 0 \qquad .$$

Alors on a

$$\mu = (0 \ , \ 0) \qquad .$$

$W_{(0,0)}$ est le plombage de $S^6 \times D^7$ et de $S^7 \times D^6$. Donc

$$W_{(0,0)} = S^7 \times S^6 - \mathrm{Int}\ D^{13} \qquad .$$

On va démontrer le lemme suivant.

LEMME 4. - $(\overset{r}{\#} (S^7 \times S^6)) \# \tilde{S}^{13} = \overset{r}{\#} (S^7 \times S^6)$, si et seulement si $\tilde{S}^{13} = S^{13}$, où $\tilde{S}^{13} \in \Theta^{13}$.

Supposons que $(\overset{r}{\#} (S^7 \times S^6)) \# \tilde{S}^{13}$ et $\overset{r}{\#} (S^7 \times S^6)$ soient difféomorphes. Alors, d'après le lemme 1, il existe un difféomorphisme

$$\hat{\varphi} : (\overset{r}{\#} (S^7 \times S^6)) - \mathrm{Int}\ D^{13} \to (\overset{r}{\#} (S^7 \times S^6)) - \mathrm{Int}\ D^{13}$$

tel que

$$\tilde{S}^{13} = D^{13} \underset{\hat{\varphi}|\partial D^{13}}{\cup} D^{13} \qquad .$$

Soit

$$W^{14} = (\overset{r}{\natural} (S^7 \times D^7)) \underset{\hat{\varphi}}{\cup} (\overset{r}{\natural} (S^7 \times D^7))$$

la variété différentiable compacte orientée obtenue par recollement de $\overset{r}{\natural} (S^7 \times D^7)$ et de $-(\overset{r}{\natural} (S^7 \times D^7))$ au moyen de $\hat{\varphi}$. Evidemment on a

$$\partial W^{14} = \tilde{S}^{13} \quad .$$

Il est aisé de voir que

$$H_q(W^{14}) = 0 , \qquad q \neq 0 , 7 \quad .$$

Alors les obstructions pour construire des champs de repères tangentiels sont dans $H^q(W^{14}$; $\pi_{q-1}(SO(14)) = 0$, parce que $\pi_6(SO(14)) = 0$. Donc W^{14} est parallélisable. Puisque $\Theta^{13} \approx \underset{\sim}{Z}_3$, $\Theta^{13}(\partial\pi) = 0$ [7], on a

$$\tilde{S}^{13} = \partial W^{14} = S^{13} \quad .$$

Alors, d'après le corollaire de la proposition et le lemme 4, on obtient :

THÉORÈME 3. - Soit M^{13} une variété différentiable compacte orientée sans bord, 5-connexe, sans torsion de dimension 13 . Alors

$$M^{13} = (\overset{r}{\#} (S^7 \times S^6)) \# \tilde{S}^{13} , \qquad \tilde{S}^{13} \in \Theta^{13} \approx \underset{\sim}{Z}_3 \quad .$$

Cette présentation est unique.

COROLLAIRE. - La variété topologique $S^7 \times S^6$ admet exactement trois structures différentiables orientées.

COROLLAIRE. - Soient M_1^{13} , M_2^{13} deux variétés différentiables compactes orientées sans bord, 5-connexes, sans torsion de dimension 13 . Alors M_1^{13} et M_2^{13} sont homéomorphes (homotopes) si et seulement si leurs nombres de Betti sont égaux.

COROLLAIRE. - Quel que soit $\tilde{S}^7 \in \Theta^7$, la variété différentiable orientée $\tilde{S}^7 \times S^6$ est difféomorphe à $S^7 \times S^6$.

En effet, d'après le théorème 3, on a

$$\tilde{S}^7 \times S^6 = (S^7 \times S^6) \# \tilde{S}^{13} , \qquad \tilde{S}^{13} \in \Theta^{13} \quad .$$

Alors, d'après le lemme 1, il existe un difféomorphisme

$$\hat{\varphi} : \tilde{S}^7 \times S^6 - \operatorname{Int} D^{13} \to S^7 \times S^6 - \operatorname{Int} D^{13} \quad ,$$

tel que

$$\tilde{S}^{13} = D^{13} \underset{\hat{\varphi}|\partial D^{13}}{\cup} D^{13} \quad .$$

Soit $W^{14} = \tilde{S}^7 \times D^7 \underset{\hat{\varphi}}{\cup} S^7 \times D^7$ la variété différentiable compacte orientée de dimension 14, obtenue par recollement de $\tilde{S}^7 \times D^7$ et de $-(S^7 \times D^7)$ au moyen de $\hat{\varphi}$. Alors W^{14} est une π-variété, parce que $H_i(W^{14}) = 0$ $(i \neq 0, 7)$. Donc on a

$$\tilde{S}^{13} = \partial W^{14} = S^{13} \quad .$$

Remarque. - Un résultat plus fort que ce corollaire est démontré dans [15].

7. Les cas $n = 4k - 1$ $(k > 1)$.

On sait que

$$\pi_{4k-2}(SO) = 0 \ , \quad \pi_{4k-1}(SO(4k-1)) \approx \underset{\sim}{Z} \ , \quad \pi_{4k-1}(SO(4k)) \approx \underset{\sim}{Z} + \underset{\sim}{Z} \qquad (k \geq 1) \quad ,$$

et que la suite

$$0 \to \pi_{4k-1}(SO(4k-1)) \xrightarrow{\iota_*} \pi_{4k-1}(SO(4k)) \to \underset{\sim}{Z} \to 0$$

est exacte (KERVAIRE [6]). Désignons par ρ un générateur de $\pi_{4k-1}(SO(4k-1))$ et par $\iota_*(\rho)$, σ un système de générateurs de $\pi_{4k-1}(SO(4k))$. Alors on a

$$\mu = (0 , m\rho) \qquad m \in \underset{\sim}{Z} \quad .$$

Soient $(B^{8k-1}_{m,n}, S^{4k}, S^{4k-1}, p)$ et $(\bar{B}^{8k}_{m,n}, S^{4k}, D^{4k}, \bar{p})$ le fibré de base S^{4k}, fibre S^{4k-1} avec l'application caractéristique $m\iota_*(\rho) + n\sigma$, et celui de fibre D^{4k} respectivement. $B^{8k-1}_{m,n}$ et $\bar{B}^{8k}_{m,n}$ sont des variétés différentiables compactes orientées comme toujours. $B^{8k-1}_{m,o}$ admet une section différentiable

$$s : S^{4k} \to B^{8k-1}_{m,o} \quad .$$

Désignons par $U(s)$ un voisinage tubulaire de $s(S^{4k})$ dans $B^{8k-1}_{m,o}$. Parce que $s(S^{4k})$ et la section nulle de $\bar{B}^{8k}_{m,o}$ sont difféotopes dans $\bar{B}^{8k}_{m,o}$, $U(s)$ est difféomorphe à $\bar{B}^{8k-1}_{m}$, où $(\bar{B}^{8k-1}_{m}, S^{4k}, D^{4k-1})$ désigne le fibré de base S^{4k}, fibre D^{4k-1} avec l'application caractéristique $m\rho$. Alors on a

$$W^{8k-1}_{(0,m\rho)} = U(s) \cup p^{-1}(D^{4k}) = B^{8k-1}_{m,o} - \operatorname{Int} D^{8k-1} \quad .$$

Donc, d'après le corollaire de la proposition, on en déduit le lemme suivant.

LEMME 5. - Soit M^{8k-1} une variété différentiable compacte, orientée, sans bord, $(4k-2)$-connexe, sans torsion de dimension $8k-1$ $(k > 1)$. Alors

$$M^{8k-1} = (\mathop{\#}_{i=1}^{r} B^{8k-1}_{m_i,o}) \# \tilde{S}^{8k-1} , \qquad \tilde{S}^{8k-1} \in \Theta^{8k-1} .$$

On va considérer la classification difféomorphe des variétés $\mathop{\#}\limits_{i=1}^{r} B^{8k-1}_{m_i,o}$.

On sait que les classes de Pontrjagin $p_{4k}(B^{8k-1}_{m,o})$, $p_{4k}(\overline{B}^{8k}_{m,o})$ sont données par

$$p_{4k}(B^{8k-1}_{m,o}) = cm\alpha \quad ,$$

$$p_{4k}(\overline{B}^{8k}_{m,o}) = cm\overline{\alpha} \quad ,$$

où α (resp. $\overline{\alpha}$) désigne un générateur de $H^{4k}(B^{8k-1}_{m,o}) \approx \underset{\sim}{Z}$ (resp. $H^{4k}(\overline{B}^{8k}_{m,o}) \approx \underset{\sim}{Z}$), et

$$c = \begin{cases} 4 & k = 1 \quad , \\ 12 & k = 2 \quad , \\ 2((2k-1)!) & k \geqslant 3 \ \text{impair} \quad , \\ (2k-1)! & k \geqslant 4 \ \text{pair} \quad , \end{cases}$$

[8], [16].

On va prouver le lemme suivant.

LEMME 6. - <u>Deux variétés différentiables orientées</u> $\mathop{\#}\limits_{i=1}^{r} B^{8k-1}_{m_i,o}$ et $\mathop{\#}\limits_{i=1}^{r} B^{8k-1}_{m'_i,o}$ $(k \geqslant 1)$ <u>sont difféomorphes, si et seulement si</u>

$$\text{p. g. d. c.} (m_1 , m_2 , \dots , m_r) = \text{p. g. d. c.} (m'_1 , m'_2 , \dots , m'_r) \quad .$$

<u>Démonstration</u>. - D'abord, supposons qu'il existe un difféomorphisme

$$h : \mathop{\#}_{i=1}^{r} B^{8k-1}_{m_i,o} \to \mathop{\#}_{i=1}^{r} B^{8k-1}_{m'_i,o} \quad .$$

Alors on a

$$h^*(\alpha'_j) = \sum_{i=1}^{r} \xi_{ij} \alpha_i \qquad (i = 1 , 2 , \dots , r) \quad ,$$

où α_i , α'_i désignent les éléments de $H^{4k}(\mathop{\#}\limits_{i=1}^{r} B^{8k-1}_{m_i,o})$, $H^{4k}(\mathop{\#}\limits_{i=1}^{r} B^{8k-1}_{m'_i,o})$ duals aux classes d'homologie représentées par des sections de $B^{8k-1}_{m_i,o}$, $B^{8k-1}_{m'_i,o}$ respectivement. Evidemment on a

$$(*) \qquad \det(\xi_{ij}) = \pm 1 \quad .$$

D'autre part, on a

$$(**) \qquad \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \cdots & \xi_{1r} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \cdots & \xi_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{r1} & \xi_{r2} & \cdots & \xi_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m'_1 \\ m'_2 \\ \vdots \\ m'_r \end{pmatrix} ,$$

parce que

$$h^*(p_{4k}(\mathop{\#}_{i=1}^{r} B^{8k-1}_{m'_i,o})) = p_{4k}(\mathop{\#}_{i=1}^{r} B^{8k-1}_{m_i,o}) .$$

Inversement, supposons qu'il existe une matrice (ξ_{ij}) satisfaisant à $(*)$, $(**)$. On notera par $\bar{a}_i$ l'élément de $H_{4k}(\mathop{\natural}_{i=1}^{r} \bar{B}^{8k}_{m'_i,o})$ représenté par une section de $\bar{B}^{8k}_{m'_i,o}$ $(i = 1 , 2 , \ldots , r)$. Soient

$$h_i : S^{4k} \to \mathrm{Int} \mathop{\natural}_{i=1}^{r} \bar{B}^{8k}_{m'_i,o}$$

des applications telles que

$$[h_i(S^{4k})] = \sum_{j=1}^{r} \xi_{ij} \bar{a}_j \qquad i = 1 , 2 , \ldots , r .$$

$[h_i(S^{4k})]$ $(i = 1 , 2 , \ldots , r)$ est un système de générateurs de $H_{4k}(\mathop{\natural}_{i=1}^{r} \bar{B}^{8k}_{m'_i,o})$. On peut supposer que les h_i $(i = 1 , 2 , \ldots , r)$ sont des plongements dans $\mathrm{Int}(\mathop{\natural}_{i=1}^{r} \bar{B}^{8k}_{m'_i})$ tels que

$$h_i(S^{4k}) \cap h_j(S^{4k}) = \emptyset \qquad (i \neq j) .$$

Soient $N(h_i)$ $(i = 1 , 2 , \ldots , r)$ des voisinages tubulaires des $h_i(S^{4k})$ tels que

$$N(h_i) \cap N(h_j) = \emptyset \qquad (i \neq j) .$$

Alors on a

$$\begin{aligned} p_{4k}(N(h_i)) &= \iota_i^*(p_{4k}(\mathop{\natural}_{i=1}^{r} \bar{B}^{8k}_{m_i,o})) , \\ &= c \sum_{j=1}^{r} \xi_{ij} m'_j \{h_i(S^{4k})\} , \\ &= c m_i \{h_i(S^{4k})\} , \end{aligned}$$

où $\iota_i : N(h_i) \to \mathop{\natural}_{i=1}^{r} \bar{B}^{8k}_{m_i,o}$ est le plongement canonique, et $\{h_i(S^{4k})\}$ désigne un générateur de $H^{4k}(N(h_i)) \approx \underset{\sim}{Z}$. Donc

$$N(h_i) = \bar{B}^{8k}_{m_i,o} \qquad (i = 1 , 2 , \ldots , r) .$$

Soit $\natural_{i=1}^{r} N(h_i)$ la somme connexe à bord des $N(h_i)$ $(i = 1, 2, \dots, r)$ réalisée dans $\mathrm{Int} \natural_{i=1}^{r} \bar{B}^{8k}_{m'_i,o}$. On peut vérifier que les injections

$$\#_{i=1}^{r} B^{8k-1}_{m'_i,o} \to \natural_{i=1}^{r} \bar{B}^{8k}_{m'_i,o} - \mathrm{Int}(\natural_{i=1}^{r} N(h_i)) \quad ,$$

$$\partial(\natural_{i=1}^{r} N(h_i)) \to \natural_{i=1}^{r} \bar{B}^{8k}_{m'_i,o} - \mathrm{Int}(\natural_{i=1}^{r} N(h_i))$$

sont des homotopie-équivalences. Alors $\#_{i=1}^{r} B^{8k-1}_{m'_i,o}$ et $\partial(\natural_{i=1}^{r} N(h_i)) = \#_{i=1}^{r} B^{8k-1}_{m_i,o}$ sont h-cobordantes. Donc, d'après un théorème de SMALE [13], [15], $\#_{i=1}^{r} B^{8k-1}_{m_i,o}$ et $\#_{i=1}^{r} B^{8k-1}_{m'_i,o}$ sont difféomorphes.

L'existence de la matrice satisfaisant à (*), (**) est équivalente à la relation :

$$\text{p. g. d. c. } (m_1, m_2, \dots, m_r) = \text{p. g. d. c. } (m'_1, m'_2, \dots, m'_r) \quad .$$

Ainsi le lemme est démontré.

D'après les lemmes 5, 6, on a :

THÉORÈME 4. - <u>Soit M^{8k-1} une variété différentiable compacte orientée, sans bord, (4k - 2)-connexe, sans torsion de dimension $8k - 1$ $(k > 1)$. Alors</u>

$$M^{8k-1} = B^{8k-1}_{m,o} \# (\#^{r-1} (S^{4k} \times S^{4k-1})) \# \tilde{S}^{8k-1} , \qquad \tilde{S}^{8k-1} \in \Theta^{8k-1} , \quad m \geq 0 \quad .$$

D'après un théorème de THOM [17], on a

COROLLAIRE. - <u>Soient M_1^{8k-1}, M_2^{8k-1} deux variétés différentiables compactes orientées, sans bord, (4k - 2)-connexes, sans torsion de dimension $8k - 1$ $(k > 1)$. Alors M_1^{8k-1} et M_2^{8k-1} sont combinatoirement homéomorphes par rapport à des triangulations compatibles avec leurs structures différentiables, si et seulement si leurs nombres de Betti et les plus grands entiers qui divisent leurs classes de Pontrjagin sont égaux.</u>

8. <u>Les sommes connexes</u> $B^{8k-1}_{m,o} \# (\#^{r-1} (S^{4k} \times S^{4k-1})) \# \tilde{S}^{8k-1}$, $\tilde{S}^{8k-1} \in \Theta^{8k-1}$, $k = 1, 2$.

D'abord supposons que

$$B^7_{m,o} \# (\#_{i=1}^{r-1} (S^4_i \times S^3_i)) \# \tilde{S}^7 \quad (\tilde{S}^7 \in \Theta^7) \quad \text{et} \quad B^7_{m,o} \# (\#_{i=1}^{r-1} (S^4_i \times S^3_i))$$

soient difféomorphes. Alors, d'après le lemme 1 , il existe un difféomorphisme $\hat{\varphi} : B^7_{m,o} \# (\#_{i=1}^{r-1} (S^4_i \times S^3_i)) - \mathrm{Int}\, D^7 \to B^7_{m,o} \# (\#_{i=1}^{r-1} (S^4_i \times S^3_i)) - \mathrm{Int}\, D^7$, tel que $\tilde{S}^7 = D^7 \underset{\hat{\varphi}|\partial D^7}{\cup} D^7$.

Soit

$$W^8 = (\overline{B}^8_{m,o} \natural (\natural_{i=1}^{r-1} (S^4_i \times D^4_i))) \underset{\hat{\varphi}}{\cup} (\overline{B}^8_{m,o} \natural (\natural_{i=1}^{r-1} (S^4_i \times D^4_i)))$$

la variété différentiable compacte orientée de dimension 8 , obtenue par recollement de $\overline{B}^8_{m,o} \natural (\natural_{i=1}^{r-1} (S^4_i \times D^4_i))$ et de $-(\overline{B}^8_{m,o} \natural (\natural_{i=1}^{r-1} (S^4_i \times D^4_i)))$ au moyen de $\hat{\varphi}$. Evidemment, on a $\partial W^8 = \tilde{S}^7$.

D'après la suite exacte de Mayer-Vietoris, il est aisé de voir que W^8 est 3-connexe, et que

$$H_4(W^8) = \bigoplus^{2r} \mathbb{Z} \ .$$

$H_4(W^8)$ a un système de générateurs $a_o , a_1 , \dots , a_{r-1} , a'_o , a'_1 , \dots , a'_{r-1}$, tels que a_o soit représenté par une section de $\overline{B}^8_{m,o}$, que a_i soit représenté par $S^4_i \times 0$ $(i = 1 , 2 , \dots , r-1)$, et que les a'_i $(i = 0 , 1 , \dots , r-1)$ soient représentés par des cycles c_i , dont les intersections,

$$c_o \cap (\overline{B}^8_{m,o} \natural (\natural_{i=1}^{r-1} (S^4_i \times D^4_i))) \ ,$$

$$c_i \cap (\overline{B}^8_{m,o} \natural (\natural_{i=1}^{r-1} (S^4_i \times D^4_i))) \ ,$$

sont $\overline{p}^{-1}(x)$ $(x \in S^4)$, $x_i \times D^4_i$ $(x_i \in S^4_i)$ respectivement $(i = 1 , 2 , \dots , r-1)$. On peut trouver des plongements

$$f_i : S^4 \to \mathrm{Int}\, W^8 \ , \quad i = 0 , 1 , \dots , r-1$$

tels que $[f_i(S^4)] = a'_i$.

Supposons que σ soit la classe d'homotopie contenant l'application

$$\sigma' : S^3 \to SO(4)$$

définie par $\sigma'(q)q' = qq'$, où q et q' désignent des quaternions de norme 1 , et que l'application caractéristique du voisinage tubulaire de $f_i(S^4)$ dans W^8 soit $m'_i \, \iota_*(\rho) + n'_i \, \sigma$ $(i = 0 , 1 , \dots , r-1)$. Alors, la matrice des nombres d'intersection de

$$a_o , a_1 , \dots , a_{r-1} , \ a'_o , a'_1 , \dots , a'_{r-1}$$

est donnée par (cf. [16]) :

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & S \end{pmatrix} \qquad E = (\delta_{ij}) \ , \ S = (s_{ij}) \ , \ s_{ij} = s_{ji} \ , \ s_{ii} = n'_i \qquad ,$$

dont la signature est égale à zéro.

Soit $(\alpha_o , \alpha_1 , \dots , \alpha_{r-1} , \alpha'_o , \alpha'_1 , \dots , \alpha'_{r-1})$ un système de générateurs de $H^4(W^8)$ dual à $(a_o , a_1 , \dots , a_{r-1} , a'_o , a'_1 , \dots , a'_{r-1})$. Alors la matrice de produits de ce système est donnée par

$$\begin{pmatrix} -S & E \\ E & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

On sait que

$$p_4(\overline{B}^8_{m'_i,n'_i}) = 2(2m'_i + n'_i)\ \{S^4\} \qquad ,$$

où $\{S^4\}$ est un générateur de $H^4(\overline{B}^8_{m'_i,n'_i})$ représenté par une section [16]. Puisqu'il existe un plongement

$$\iota' : \overline{B}_{m'_i,n'_i} \to W^8 \qquad ,$$

tel que

$$\iota'^*(\alpha'_i) = \{S^4\} \qquad ,$$

la classe de Pontrjagin de W^8 est donnée par

$$p_4(W^8) = 4m\alpha_1 + \sum_{i=0}^{r-1} 2(2m'_i + n'_i)\ \alpha'_i \qquad .$$

Donc, d'après le lemme 2, on a

(***) $$\lambda'(\tilde{S}^7) = -mm'_o + \frac{m(m-1)}{2} n'_o \mod 28 \qquad .$$

Ensuite, soit

$$Q = (U(s) \cup p^{-1}(D^4)) \natural \left(\natural_{i=1}^{r-1} ((S^4_i \times D^3_i) \cup (D^4_i \times S^3_i))\right)$$

la somme connexe à bord de

$U(s) \cup p^{-1}(D^4) \subset B^7_{m,o}$ et de $(S^4_i \times D^3_i) \cup (D^4_i \times S^3_i) \subset S^4_i \times S^3_i$ $(i=1,2,\dots,r-1)$

réalisée dans $B^7_{m,o} \# (\#_{i=1}^{r-1} (S^4_i \times S^3_i))$. Evidemment on a

$$B^7_{m,o} \# \left(\#_{i=1}^{r-1} (S^4_i \times S^3_i)\right) - \operatorname{Int} Q = D^7 \qquad .$$

Soit

$$\hat{\varphi}' : Q^7 \to Q^7$$

un difféomorphisme défini par

$$\hat{\varphi}'|(U(s) \natural (\natural_{i=1}^{r-1} ((S_i^4 \times D_i^3) \cup (D_i^4 \times S_i^3)))) = \text{identité} \quad ,$$

$$\hat{\varphi}'(y , y') = (\gamma(y') \, y , y') \quad ,$$

où $(y , y') \in D^4 \times S^3 = p^{-1}(D^4)$, et γ est une application

$$\gamma : S^3 \to SO(4)$$

telle que

$$\{\gamma\} = m_o \, \iota_*(\rho) + n_o \, \sigma \in \pi_3(SO(4)) \quad .$$

Soit

$$\tilde{S}'^7 = D^7 \underset{\hat{\varphi}'|\partial D^7}{\cup} D^7 \quad ,$$

alors, d'après le lemme 1, on a

$$B^7_{m,o} \# (\#_{i=1}^{r-1} (S_i^4 \times S_i^3)) \# \tilde{S}'^7 = B^7_{m,o} \# (\#_{i=1}^{r-1} (S_i^4 \times S_i^3)) \quad .$$

D'autre part, en vertu de (***), on a

$$\lambda'(\tilde{S}'^7) = - m m_o + \frac{m(m-1)}{2} n_o \mod 28 \quad .$$

Donc, d'après le lemme 6, on en déduit le théorème suivant.

THÉORÈME 5. - $(\#_{i=1}^{r} B^7_{m_i,o}) \# \tilde{S}^7$ $(\tilde{S}^7 \in \Theta^7)$ et $(\#_{i=1}^{r} B^7_{m_i,o})$ sont difféomorphes, si et seulement si $\lambda'(\tilde{S}^7)$ est divisible par m mod 28 (m impair), resp. par $m/2$ mod 28 (m pair), où m désigne le plus grand diviseur commun de $m_1 , m_2 , \ldots , m_r$.

COROLLAIRE. - La variété topologique $S^4 \times S^3$ admet au moins 28 structures différentiables orientées.

On sait que

$$\Theta^{15} \approx Z_{8128} + Z_2 \; , \qquad \Theta^{15}(\partial\pi) \approx Z_{8128} \quad .$$

Supposons que $B^{15}_{m,o} \# (\#_{i=1}^{r-1} (S^8 \times S^7)) \# \tilde{S}^{15}$ $(\tilde{S}^{15} \in \Theta^{15})$ et $B^{15}_{m,o} \# (\#_{i=1}^{r-1} (S^8 \times S^7))$ soient difféomorphes. Alors, d'après le lemme 1, il existe un difféomorphisme

$$\hat{\varphi} : B^{15}_{m,o} \# (\#_{i=1}^{r-1} (S^8 \times S^7)) - \operatorname{Int} D^{15} \to B^{15}_{m,o} \# (\#_{i=1}^{r-1} (S^8 \times S^7)) - \operatorname{Int} D^{15} \quad ,$$

tel que

$$\tilde{S}^{15} = D^{15} \underset{\hat{\varphi}|\partial D^{15}}{\cup} D^{15} \quad .$$

Soit

$$W^{16} = (\bar{B}^{16}_{m,o} \natural (\overset{r-1}{\natural} (S^8 \times D^8))) \underset{\hat{\varphi}}{\cup} (\bar{B}^{16}_{m,o} \natural (\overset{r-1}{\natural} (S^8 \times D^8)))$$

la variété différentiable orientée obtenue par recollement de $\bar{B}^{16}_{m,o} \natural (\overset{r-1}{\natural} (S^8 \times D^8))$ et de $-(\bar{B}^{16}_{m,o} \natural (\overset{r-1}{\natural} (S^8 \times D^8)))$ au moyen de $\hat{\varphi}$. Alors W^{16} est 7-connexe. Donc, d'après un résultat de WALL [18], on a

$$\tilde{S}^{15} = \partial W^{16} \in \Theta^{15}(\partial\pi) \quad .$$

Alors, d'après un calcul semblable à celui conduisant au théorème 5, on a le théorème suivant.

THÉORÈME 6. – $(\overset{r}{\underset{i=1}{\#}} B^{15}_{m_i,o}) \# \tilde{S}^{15}$ $(\tilde{S}^{15} \in \Theta^{15})$ *et* $(\overset{r}{\underset{i=1}{\#}} B^{15}_{m_i,o})$ *sont difféomorphes, si et seulement si* $\tilde{S}^{15} \in \Theta^{15}(\partial\pi)$ *et* $\lambda'(\tilde{S}^{15})$ *est divisible par* m mod 8128 (m *impair), resp. par* $m/2$ mod 8128 (m *pair), où* m *désigne le plus grand diviseur commun de* $m_1, m_2, \ldots, m_r$.

COROLLAIRE. – *La variété topologique* $S^8 \times S^7$ *admet au moins 16256 structures différentiables orientées.*

D'après les théorèmes 4 et 6, on obtient

THÉORÈME 7. – *Soit* M^{15} *une variété différentiable compacte orientée, sans bord, 6-connexe, sans torsion de dimension* 15. *Alors*

$$M^{15} = B^{15}_{m,o} \# (\overset{r-1}{\#} (S^8 \times S^7)) \# \tilde{S}^{15} , \qquad \tilde{S}^{15} \in \Theta^{15} \quad ,$$

où

$$\begin{aligned} \{\tilde{S}^{15}\} &\in \Theta^{15}/m(\Theta^{15}(\partial\pi)) \qquad m \text{ impair} \quad , \\ &\in \Theta^{15}/m/2(\Theta^{15}(\partial\pi)) \qquad m \text{ pair} \quad . \end{aligned}$$

Cette présentation est unique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ATIYAH (M. F.) and HIRZEBRUCH (F.). - Riemann-Roch theorems for differentiable manifolds, Bull. Amer. math. Soc., t. 65, 1959, p. 276-281.

[2] BOREL (A.) and HIRZEBRUCH (F.). - Characteristic classes and homogeneous spaces, III., Amer. J. of Math., t. 82, 1960, p. 491-504.

[3] CERF (Jean). - Travaux de Smale sur la structure des variétés différentiables, Séminaire Cartan, t. 14, 1961/62 : Topologie différentielle, n° 16-18 (à paraître).

[4] HAEFLIGER (André). - Plongements différentiables de variétés dans variétés, Comment. Math. Helvet., t. 36, 1961, p. 47-82.

[5] HIRZEBRUCH (Friedrich). - Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. - Berlin, J. Springer, 1956 (Ergebnisse der Mathematik, Neue Folge, 9).

[6] KERVAIRE (M.). - Some non-stable homotopy groups of Lie groups, Illinois J. of Math., t. 4, 1960, p. 161-169.

[7] KERVAIRE (M.) and MILNOR (J.). - Groups of homotopy spheres, I. - New York, New York University, 1961 (multigraphié).

[8] MILNOR (J.). - Some consequences of a theorem of Bott, Annals of Math., t. 68, 1958, p. 444-449.

[9] MILNOR (J.). - Differentiable structures on spheres, Amer. J. of Math., t. 81, 1959, p. 962-972.

[10] MILNOR (J.). - Differentiable manifolds which are homotopy spheres. - Princeton, Princeton University Press, 1959 (multigraphié).

[11] MORIN (Bernard). - Sur les suites spectrales de Kervaire-Milnor, Séminaire Cartan, t. 14, 1961/62 : Topologie différentielle, 2e partie, n° 8-13 (à paraître).

[12] MORLET (Claude). - Les homomorphismes des algèbres de cobordismes dans Q , Séminaire Cartan, t. 15, 1962/63 : Topologie différentielle, n° 1-4 (à paraître).

[13] SMALE (S.). - Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four, Annals of Math., t. 74, 1961, p. 391-406.

[14] SMALE (S.). - On the structure of 5-manifolds, Annals of Math., t. 75, 1962, p. 38-46.

[15] SMALE (S.). - On the structure of manifolds, Amer. J. of Math., t. 84, 1962, p. 387-399.

[16] TAMURA (I.). - On Pontrjagin classes and homotopy types of manifolds, J. Math. Soc. Japan, t. 9, 1957, p. 250-262.

[17] THOM (René). - Les classes caractéristiques de Pontrjagin des variétés triangulées, Symposium internacional de topologia algebraica [1958. Mexico] ; p. 54-67. - Mexico, UNESCO, 1958.

[18] WALL (C. T. C.). - Classification of (n - 1)-connected 2n-manifolds, Annals of Math., t. 74, 1962, p. 163-189.

[19] WHITEHEAD (J. H. C.) and JAMES (I. M.). - The homotopy theory of sphere bundles over spheres, Proc. London math. Soc., t. 4, 1954, p. 196-218.

[20] WHITNEY (H.). - The self-intersections of a smooth n-manifold in 2n-space, Annals of Math., t. 45, 1944, p. 220-246.