BERNARD MALGRANGE

Le théorème de préparation en géométrie différentiable. I. Position du problème

Séminaire Henri Cartan, tome 15 (1962-1963), exp. n° 11, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1962-1963__15__A4_0>

LE THÉORÈME DE PRÉPARATION EN GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIABLE

par Bernard MALGRANGE

I. Position du problème.

1. Algèbres différentiables.

On note $\mathcal{E}_n$ l'algèbre (sur le corps $\underset{\sim}{R}$) des germes de fonctions numériques (indéfiniment) différentiables au voisinage de 0 dans $\underset{\sim}{R}^n$.

Définition. - On appelle algèbre différentiable une $\underset{\sim}{R}$-algèbre A (unitaire et $\neq 0$), munie d'un homomorphisme surjectif d'algèbres $\mathcal{E}_n \to A$ (pour un entier n convenable) [il est entendu que tous les homomorphismes d'algèbres sont unitaires].

Si p désigne l'idéal de $\mathcal{E}_n$, noyau de cet homomorphisme, A s'identifie, comme algèbre, à $\mathcal{E}_n/p$. La donnée d'un idéal p de $\mathcal{E}_n$, distinct de $\mathcal{E}_n$, définit une algèbre différentiable. L'algèbre $\mathcal{E}_n$ est, en particulier, une algèbre différentiable, correspondant au cas où $p = 0$.

On désignera souvent par une seule lettre A une algèbre différentiable ; il sera toujours sous-entendu que l'homomorphisme $\mathcal{E}_n \to A$ est donné.

Toute algèbre différentiable $A = \mathcal{E}_n/p$ est une algèbre locale, dont l'idéal maximal, noté $m(A)$, s'identifie à $m(\mathcal{E}_n)/p$.

Etant données deux algèbres différentiables $\mathcal{E}_n \to A$ et $\mathcal{E}_n \to B$, on va définir ce qu'on appellera un morphismo de A dans B. Définissons d'abord les morphismes de $\mathcal{E}_n$ dans $\mathcal{E}_m$; considérons un germe d'application différentiable

$$\varphi : \underset{\sim}{R}^m \to \underset{\sim}{R}^n$$

(il s'agit de germe d'application au voisinage de $0 \in \underset{\sim}{R}^m$, tel que $\varphi(0) = 0$) ; à chaque germe d'application différentiable $f : \underset{\sim}{R}^n \to \underset{\sim}{R}$ associons le germe composé $f \circ \varphi : \underset{\sim}{R}^m \to \underset{\sim}{R}$; l'application $f \to f \circ \varphi$ est un homomorphisme d'algèbres $\mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_m$, noté φ^*. Par définition, un morphisme $u : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_m$ est un homomorphisme d'algèbres tel qu'il existe un germe d'application φ avec $\varphi^* = u$. Alors φ est déterminé par la connaissance de u : en effet, soient $x_1, \dots, x_n$ les coordonnées dans $\underset{\sim}{R}^n$, et $y_1, \dots, y_m$ les coordonnées dans $\underset{\sim}{R}^m$; soit $\varphi_i(y_1, \dots, y_m)$ la i-ième coordonnée x_i du point $\varphi(y)$; alors on a

$$\varphi_i(y_1 , \dots , y_m) = u(x_i) \quad ,$$

image par u de l'élément $x_i \in \mathcal{E}_n$. Donc u détermine φ.

En général, soient $\mathcal{E}_n \to A$ et $\mathcal{E}_m \to B$ deux algèbres différentiables. On appelle <u>morphisme</u> de A dans B un homomorphisme unitaire d'algèbres $u : A \to B$ tel qu'il existe un morphisme $\varphi^* : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_m$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_n \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d] & \mathcal{E}_m \arrow[d] \\
A \arrow[r, "u"] & B
\end{tikzcd} \quad .$$

Il est évident que les morphismes se composent. On a ainsi défini la <u>catégorie</u> des algèbres différentiables ; et on a, en particulier, une notion d'<u>isomorphisme</u> d'algèbres différentiables.

PROPOSITION 1. - <u>Etant donnée une algèbre différentiable</u> $\mathcal{E}_m \overset{\pi}{\to} B$, <u>et</u> n <u>éléments</u> $b_i \in m(B)$, <u>il existe un morphisme et un seul</u> $u : \mathcal{E}_n \to B$ <u>tel que</u> $u(x_i) = b_i$ (en notant $x_1 , \dots , x_n$ les coordonnées dans $\mathbb{R}^n$).

<u>Démonstration</u>. - Pour chaque i , choisissons $u_i \in m(\mathcal{E}_m)$ tel que $\pi(u_i) = b_i$. Il existe un morphisme $\varphi^* : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_m$ et un seul tel que $\varphi^*(x_i) = u_i$, comme on vient de le voir. Le morphisme composé $\pi \circ \varphi^* = u$ prouve l'existence affirmée par l'énoncé. Montrons l'unicité ; soient des $u'_i \in m(\mathcal{E}_m)$ tels que $u'_i - u_i \in I$, I désignant le noyau de π ; on veut montrer que, pour toute $f \in \mathcal{E}_n$, on a

$$f(u'_1 , \dots , u'_n) - f(u_1 , \dots , u_n) \in I \quad .$$

Posons $u'_i = u_i + t_i$; il suffit de montrer qu'il existe des fonctions différentiables g_i telles que

$$f(u_1 + t_1 , \dots , u_n + t_n) - f(u_1 , \dots , u_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} t_i \, g_i(u_1 , \dots , u_n , t_1 , \dots , t_n) \quad .$$

Cela va résulter du lemme suivant :

LEMME 1. - Soit $f \in \mathcal{E}_m$, et soit k un entier $\leqslant m$; supposons $f(0 , \dots , 0 , x_{k+1} , \dots , x_m)$ identiquement nulle. Alors il existe des $h_i \in \mathcal{E}_m$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ telles que

$$f = \sum_{i=1}^{n} x_i \, h_i \quad .$$

Démonstration. - Il suffit de prendre

$$h_i = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(0 , \dots , 0 , tx_i , x_{i+1} , \dots , x_m)\, dt \quad .$$

La proposition 1 étant ainsi démontrée, on notera, pour toute $f \in \mathcal{E}_n$, et pour toute suite de n éléments $b_i \in m(B)$, $f(b_1 , \dots , b_n)$ l'élément de B, image de $f \in \mathcal{E}_n$ par l'unique morphisme $u : \mathcal{E}_n \to B$ tel que $u(x_i) = b_i$. Quant à l'image $u(\mathcal{E}_n) \subset B$, on l'appellera la sous-algèbre différentiable de B engendrée par les $b_i \in m(B)$.

Remarque. - Le lemme 1 entraîne que l'idéal maximal $m(\mathcal{E}_n)$ est engendré par $x_1 , \dots , x_n$. Donc, en général, pour une algèbre différentiable A, $m(A)$ est un idéal de type fini.

2. Topologie d'une algèbre différentiable.

Soit $A = \mathcal{E}_n/p$ une algèbre différentiable. Soit $m^k(A)$ la puissance k-ième de l'idéal maximal $m(A)$. La topologie $m(A)$-adique de A est celle dans laquelle les $m^k(A)$ forment un système fondamental de voisinages de 0. On notera $m^\infty(A)$ l'intersection des $m^k(A)$; pour que la topologie de A soit séparée, il faut et il suffit que $m^\infty(A) = \{0\}$.

D'après le lemme 1, $m^k(\mathcal{E}_n)$ est l'idéal des germes de fonctions nulles à l'origine ainsi que leurs dérivées d'ordres $< k$. Et $m^\infty(\mathcal{E}_n)$ est donc l'idéal des fonctions plates, c'est-à-dire qui s'annulent en 0 ainsi que toutes leurs dérivées.

Soit $\hat{A} = A/m^\infty(A)$ l'algèbre séparée associée à A. L'algèbre $\widehat{\mathcal{E}_n}$ s'identifie à l'algèbre $\mathbb{R}[[x_1 , \dots , x_n]]$ des séries formelles, en vertu d'un théorème classique de Emile BOREL, suivant lequel toute série formelle est la série de Taylor d'au moins un germe de fonction différentiable. Ainsi, l'algèbre $\widehat{\mathcal{E}_n}$ est un anneau local, noethérien et complet. Tout quotient de $\widehat{\mathcal{E}_n}$ est aussi un anneau local noethérien.

En général, soient A et B deux anneaux locaux, et soit $u : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux locaux (c'est-à-dire tel que u envoie $m(A)$ dans $m(B)$). Alors u induit un homomorphisme $\hat{u} : \hat{A} \to \hat{B}$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\pi"] & B \arrow[d, "\pi'"] \\ \hat{A} \arrow[r, "\hat{u}"] & \hat{B} \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

PROPOSITION 2. - Supposons que u soit surjectif, de noyau p. Alors $\hat{u}$ est surjectif, le noyau de $\pi' \circ u : A \to \hat{B}$ est l'adhérence $\bar{p}$ de p, et le noyau de $\hat{u}$ est l'image $\pi(\bar{p})$. Si de plus $\hat{A}$ est noethérien, alors $\bar{p} = p + m^{\infty}(A)$, et le noyau de $\hat{u}$ est l'image $\pi(p)$.

Démonstration. - Puisque u est surjectif, on a $m(B) = u(m(A))$, donc $m^k(B) = u(m^k(A))$ pour tout entier k, et $u^{-1}(m^k(B)) = m^k(A) + p$. Donc $u^{-1}(m^{\infty}(B))$ est l'intersection des $m^k(A) + p$, c'est-à-dire l'adhérence $\bar{p}$, et il est évident que le noyau de u est l'image, par π, de $u^{-1}(m^{\infty}(B)) = \bar{p}$. Si $\hat{A}$ est noethérien, tout idéal de $\hat{A}$ est fermé d'après le théorème de Krull, donc $\pi(p)$ est fermé, et par suite $\pi^{-1}(\pi(p)) = p + m^{\infty}(A)$ est fermé. C'est donc $\bar{p}$, et le noyau de $\hat{u}$ est $\pi(\bar{p}) = \pi(p + m^{\infty}(A)) = \pi(p)$.

COROLLAIRE. - Pour que la topologie de $B = A/p$ soit séparée, il faut que $m^{\infty}(A) \subset p$, et cela suffit lorsque $\hat{A}$ est noethérien.

En particulier, pour qu'une algèbre différentiable soit séparée, il faut et il suffit qu'elle soit isomorphe à un quotient d'une algèbre de séries formelles.

Remarque. - Tout anneau local noethérien est séparé, en vertu du théorème de Krull. Donc toute algèbre différentiable noethérienne est isomorphe à un quotient d'une algèbre de séries formelles (et réciproquement).

Signalons un problème dont nous ignorons la solution. Soient A et B deux algèbres différentiables ; on sait que tout homomorphisme unitaire d'algèbres $u : A \to B$ est automatiquement un homomorphisme d'anneaux locaux (car l'application $\mathbb{R}$-linéaire $A/u^{-1}(m(B)) \to B/m(B) \approx \mathbb{R}$ n'est pas nulle puisque $u(1) = 1$, donc elle est bijective, et $u^{-1}(m(B))$ est donc un idéal maximal de A, nécessairement égal à $m(A)$). Le problème en question est le suivant : tout homomorphisme unitaire d'algèbres différentiables est-il nécessairement un morphisme de la catégorie définie au n° 1 ? La réponse est évidemment affirmative lorsque B est séparée, mais nous ignorons ce qui en est en général. On ignore notamment s'il existe deux algèbres différentiables qui soient isomorphes en tant qu'algèbres, sans être isomorphes en tant qu'algèbres différentiables.

Rappelons que le problème analogue, pour les algèbres analytiques, admet une réponse affirmative.

3. Un théorème de finitude.

Soit $u : A \to B$ un morphisme d'algèbres différentiables, et soit $\hat{u} : \hat{A} \to \hat{B}$ le morphisme associé. Dans tout ce qui suit, on considère B comme un A-module grâce à u, et $\hat{B}$ comme un $\hat{A}$-module grâce à $\hat{u}$. De plus, $\underset{\sim}{R}$ sera considéré comme un A-module (et aussi comme un $\hat{A}$-module) grâce à l'homomorphisme canonique $A \to \underset{\sim}{R}$ qui, à chaque germe de fonction différentiable à l'origine 0, associe sa valeur au point 0. Notons que le noyau de cet homomorphisme est $m(A)$. Le produit tensoriel $B \otimes_A \underset{\sim}{R} = B/m(A).B$ est une algèbre différentiable, ainsi que $\hat{B} \otimes_{\hat{A}} \underset{\sim}{R} = \hat{B}/m(\hat{A})\,\hat{B}$. Observons que $m(\hat{A}).\hat{B}$ est l'image de $m(A).B$ par l'application $B \to \hat{B}$; cette application induit une surjection $B \otimes_A \underset{\sim}{R} \to \hat{B} \otimes_{\hat{A}} \underset{\sim}{R}$.

Rappelons qu'on dit que $m(A).B$ est un "idéal de définition" de l'algèbre locale B s'il existe un entier $r \geqslant 1$ tel que

$$m^r(B) \subset m(A).B \quad ;$$

définition analogue pour $\hat{B}$ et $m(\hat{A}).\hat{B}$.

LEMME 2. - Soit $u : A \to B$ un morphisme d'algèbres différentiables, et soit r un entier $\geqslant 1$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $m^r(\hat{B}) \subset m(\hat{A}).\hat{B}$.

(ii) $m^r(B) \subset m(A).B$.

(iii) $m^r(\hat{B}) \subset m(\hat{A}).\hat{B} + m^{r+1}(\hat{B})$.

(iv) $m^r(B) \subset m(A).B + m^{r+1}(B)$.

Démonstration. - Il est visible que (iii) et (iv) sont équivalentes. Il est trivial que (ii) $\Longrightarrow$ (i) $\Longrightarrow$ (iii). Il suffira donc de prouver que (iv) entraîne (ii). Or $m^r(B)$ est un B-module de type fini, d'après la remarque suivant le lemme 1 (n° 1). Donc le B-module $M = m^r(B)/(m(A).B \cap m^r(B))$ est de type fini ; la condition (iv) exprime que $M = m(B).M$, et le lemme de Nakayama implique alors $M = 0$, d'où (ii).

PROPOSITION 3. - Soit $u : A \to B$ un morphisme d'algèbres différentiables. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $\hat{B} \otimes_{\hat{A}} \underset{\sim}{R}$ est un $\underset{\sim}{R}$-espace vectoriel de dimension finie ;

(b) $m(\hat{A}).\hat{B}$ est un idéal de définition de $\hat{B}$;

(a') $B \otimes_A \underset{\sim}{R}$ est un $\underset{\sim}{R}$-espace vectoriel de dimension finie ;

(b') $m(A).B$ est un idéal de définition de B.

Démonstration. - L'équivalence de (b) et de (b') résulte du lemme 2 (équivalence de (i) et (ii)). Montrons que (a') $\Longrightarrow$ (b') (la démonstration serait la même pour (a) $\Longrightarrow$ (b)) : si $B \otimes_A \underset{\sim}{R}$ est une $\underset{\sim}{R}$-algèbre de dimension finie, c'est un anneau local artinien, donc son idéal maximal $m(B)/m(A).B$ est nilpotent (cf. [1], p. 69, théorème 3), d'où (b').

Montrons maintenant que (b') $\Longrightarrow$ (a') : si $m^r(B) \subset m(A).B$, le $\underset{\sim}{R}$-espace vectoriel $B/m(A).B$ s'identifie à un quotient de $B/m^r(B)$, qui est visiblement de dimension finie ; donc (a') est vraie. On voit de même que (b) $\Longrightarrow$ (a) .

Remarque. - Lorsque les conditions de finitude de la proposition 3 sont vérifiées, $B \otimes_A \underset{\sim}{R}$ est une algèbre différentiable de dimension finie, donc noethérienne, et par suite sa topologie est séparée ; il en résulte que l'application canonique $B \otimes_A \underset{\sim}{R} \to \hat{B} \otimes_{\hat{A}} \underset{\sim}{R}$ est un isomorphisme, et par suite ces deux R-espaces vectoriels ont même dimension.

A côté des conditions (a), (b), (a'), (b'), considérons les deux autres conditions :

(c) $\hat{B}$ *est un* $\hat{A}$-*module de type fini* ;

(c') B *est un* A-*module de type fini*.

Il est évident que (c') entraîne (c), et entraîne aussi (a') et (b'). De plus, dans l'exposé de C. HOUZEL ([2], page 3) on a prouvé que (b) implique (c), et lui est donc équivalent. On se propose, dans le reste de cet exposé et dans les suivants, de prouver le théorème fondamental :

THÉORÈME 1. - *Si* $u : A \to B$ *est un morphisme d'algèbre différentiables, la condition (c) entraîne la condition (c').*

Il en résultera que les six conditions (a), (b), (c), (a'), (b'), (c') sont équivalentes.

Donnons tout de suite une conséquence du théorème 1 :

THÉORÈME 2 ([1]). - *Soit* $u : A \to B$ *un morphisme d'algèbres différentiables, et soient* $b_i \in B$ *des éléments en nombre fini ; soient* $\widehat{b_i}$ *leurs images dans* $\hat{B}$. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *les images des* $\widehat{b_i}$ *dans* $\hat{B}/m(\hat{A}).\hat{B}$ *l'engendrent comme* R-*espace vectoriel* ;

(ii) *les* $\widehat{b_i}$ *engendrent* $\hat{B}$ *comme* $\hat{A}$-*module* ;

(iii) *les* b_i *engendrent* B *comme* A-*module.*

([1]) Cet énoncé m'a été indiqué par J.-P. SERRE.

Démonstration (en admettant le théorème 1). - Il est évident que (iii) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (i). Montrons que (i) $\Longrightarrow$ (iii). Si (i) est vraie, la condition (a) est vérifiée, donc aussi la condition (c). D'après le théorème 1, B est un A-module de type fini. Soit M le sous-A-module de B engendré par les b_i ; puisque $B \otimes_A \underset{\sim}{R} = \hat{B} \otimes_{\hat{A}} \underset{\sim}{R}$, on voit que l'on a

$$(B/M) \otimes_A \underset{\sim}{R} \approx (\hat{B}/\hat{M}) \otimes_{\hat{A}} \underset{\sim}{R} \quad ,$$

en notant $\hat{M}$ le sous-$\hat{A}$-module de $\hat{B}$ engendré par les $\widehat{b_i}$. Or (i) exprime que $(\hat{B}/\hat{M}) \otimes_{\hat{A}} \underset{\sim}{R} = 0$; on a donc $(B/M) \otimes_A \underset{\sim}{R} = 0$, et puisque B/M est un A-module de type fini, le lemme de Nakayama entraîne que $B/M = 0$.

C. Q. F. D.

A titre d'exemple, voici une application du théorème 2 :

Soit $u : A \to B$ un morphisme d'algèbres différentiables. Si $\hat{u} : \hat{A} \to \hat{B}$ est surjectif, alors u est surjectif.

Démonstration. - On applique le théorème 2, en prenant pour l'ensemble des b_i l'ensemble réduit à l'élément-unité $1 \in B$.

Remarque. - On peut démontrer la proposition 3 sans faire appel au théorème 1, en appliquant simplement le théorème des fonctions implicites. Pour cela, on regarde d'abord le cas où $A = \mathcal{E}_m$, $B = \mathcal{E}_n$; u provient d'un germe d'application différentiable $\varphi : \underset{\sim}{R}^n \to \underset{\sim}{R}^m$, et puisque u est surjectif par hypothèse, l'application linéaire tangente à φ est injective. Le théorème des fonctions implicites nous dit alors que φ est un plongement au voisinage de l'origine, et par suite tout germe de fonction différentiable dans $\underset{\sim}{R}^n$ se transporte en un germe de fonction différentiable sur la sous-variété image par φ ; un tel germe est induit par un germe de fonction différentiable dans l'espace ambiant $\underset{\sim}{R}^m$, et par suite u est surjective.

Le cas général se ramène au cas particulier où $A = \mathcal{E}_m$, $B = \mathcal{E}_n$, au moyen d'un procédé que nous n'indiquons pas ici, puisqu'on va l'utiliser explicitement au début du n° 6. Il est inspiré de C. HOUZEL [2].

4. Une application du théorème 2.

Sans attendre que le théorème 1 soit démontré, indiquons-en une application (ou plutôt une application du théorème 2) à la théorie des fonctions symétriques.

Appelons x_i les n fonctions coordonnées dans l'algèbre $\mathcal{E}_n$, et définissons un morphisme $u : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$ par

$$u(x_i) = \sigma_i(x_1, \dots, x_n) \quad ,$$

σ_i désignant le i-ième fonction symétrique élémentaire (somme des produits i à i de $x_1, \dots, x_n$). On vérifie facilement, au moyen du théorème sur les polynômes symétriques de n lettres, que les images, dans l'algèbre des séries formelles $\hat{\mathcal{E}}_n$, des monômes (en nombre fini)

$$(x_1)^{\alpha_1} \dots (x_{n-1})^{\alpha_{n-1}}, \quad \text{avec} \quad 0 \leq \alpha_i \leq n - i \quad ,$$

engendrent $\hat{\mathcal{E}}_n$ comme module sur la sous-algèbre différentiable engendrée par les images des σ_i. D'après le théorème 2, il s'ensuit que <u>les monômes précédents engendrent $\mathcal{E}_n$ comme module sur la sous-algèbre des fonctions différentiables de</u> $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. En particulier, si $f \in \mathcal{E}_n$ est un germe <u>symétrique</u> (c'est-à-dire invariant par les permutations des variables $x_1, \dots, x_n$), alors on voit (en faisant une moyenne) qu'il existe un germe différentiable $g \in \mathcal{E}_n$ tel que

$$g(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = f(x_1, \dots, x_n) \quad .$$

<u>Donc tout germe différentiable symétrique s'exprime comme fonction différentiable des polynômes symétriques élémentaires des variables.</u>

Ce résultat a été établi par une méthode assez différente par G. GLAESER [3].

5. Le théorème de préparation de Weierstrass.

Nous allons voir que le théorème 1 entraîne, pour les germes de fonctions différentiables, un théorème analogue au théorème de préparation de Weierstrass pour le cas des germes de fonctions analytiques, resp. des séries formelles.

Disons qu'une $F(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{E}_n$ est <u>régulière d'ordre</u> p en x_n si $F(0, \dots, 0, x_n)$ admet un zéro d'ordre p exactement pour $x_n = 0$, autrement dit si

$$F(0, \dots, 0, x_n) = (x_n)^p \, g(x_n) \quad ,$$

g étant différentiable avec $g(0) \neq 0$.

Soit $F \in \mathcal{E}_n$, F étant régulière d'ordre p en x_n. Considérons l'algèbre différentiable

$$B = \mathcal{E}_n/(F) \quad ,$$

(F) désignant l'idéal principal engendré par F. Soit $A = \mathcal{E}_{n-1}$, et soit $u : A \to B$ le morphisme composé de l'injection canonique $\mathcal{E}_{n-1} \to \mathcal{E}_n$ (associée à la projection $\underset{\sim}{R}^n \to \underset{\sim}{R}^{n-1}$ qui envoie le point $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ dans le point $(x_1, \dots, x_{n-1})$), et de la projection naturelle $\mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n/(F)$.

Appliquons à $u : A \to B$ les théorèmes 1 et 2. Il est clair que chacune des algèbres $\hat{B} \otimes_{\hat{A}} \underset{\sim}{R}$ et $B \otimes_A \underset{\sim}{R}$ est isomorphe à $\underset{\sim}{R}[x_n]/(x_n^p)$, quotient de l'algèbre des polynômes en x_n par l'idéal engendré par la puissance $(x_n)^p$. Ce sont des espaces vectoriels de dimension finie p . Le théorème 2 nous dit alors que les éléments $1, x_n, (x_n)^2, \dots, (x_n)^{p-1}$ engendrent $\mathcal{E}_n/(F)$ comme module sur $\mathcal{E}_{n-1}$. Autrement dit : <u>toute</u> $f \in \mathcal{E}_n$ <u>peut se mettre sous la forme</u>

$$(1) \qquad f = FQ + R \quad ,$$

<u>où</u> $Q \in \mathcal{E}_n$, <u>et</u> $R = \sum_{i=0}^{p-1} r_i (x_n)^i$, <u>avec</u> $r_i \in \mathcal{E}_{n-1}$.

L'assertion analogue, pour l'algèbre $\hat{\mathcal{E}}_n/(\hat{F})$, est précisément le théorème de préparation pour l'algèbre des séries formelles :

$$(2) \qquad \hat{f} = \hat{F}\hat{Q} + \hat{R} \quad .$$

On sait que le quotient $\hat{Q}$ et le reste $\hat{R}$ sont déterminés de manière unique. On verra plus tard que, en revanche, l'unicité de Q et de R n'est pas assurée dans la relation (1).

<u>Remarque</u>. - Dans (1), si f est <u>plate</u>, alors Q et R sont plates : en effet, on a $\hat{f} = 0$, et l'unicité dans le cas des séries formelles montre que $\hat{Q} = 0$ et $\hat{R} = 0$. D'autre part, si on applique (1) à $f = (x_n)^p$, on trouve, comme d'habitude, que toute F régulière d'ordre p en x_n est "équivalente" (dans l'anneau $\mathcal{E}_n$) à un polynôme <u>distingué</u> de degré p en x_n , c'est-à-dire un polynôme unitaire dont les coefficients de $(x_n)^{p-1}, \dots, 1$ sont des fonctions différentiables de $x_1, \dots, x_{n-1}$, <u>nulles</u> en 0 .

Nous allons maintenant porter notre attention sur un cas particulier du "théorème de préparation différentiable" (qui, rappelons-le, n'est pas encore démontré, puisque le théorème 1 n'a pas encore été prouvé) : c'est le cas où le diviseur F est un polynôme <u>distingué</u> à coefficients <u>analytiques</u>.

THÉORÈME 3. - <u>Soit</u>

$$P(x_n) = (x_n)^p + \sum_{i=0}^{p-1} a_i (x_n)^i$$

<u>un polynôme unitaire dont les coefficients</u> a_i <u>sont des germes de fonctions analytiques de</u> $x_1, \dots, x_{n-1}$; <u>supposons que ce soit un polynôme</u> distingué, <u>i. e. que</u> $a_i(0, \dots, 0) = 0$. <u>Alors toute</u> $f \in \mathcal{E}_n$ <u>peut se mettre sous la forme</u>

$$f = FQ + \sum_{i=0}^{p-1} b_i(x_n)^i \quad , \tag{3}$$

avec $Q \in \mathcal{E}_n$, et $b_i \in \mathcal{E}_{n-1}$ (fonctions différentiables de $x_1 , \dots , x_{n-1}$).

La démonstration de ce théorème fera l'objet des exposés suivants.

COROLLAIRE. - Sous les hypothèses du théorème 3, toute fonction plate $f \in \mathcal{E}_n$ se met sous la forme

$$f = FQ + \sum_{i=0}^{p-1} b_i(x_n)^i \quad ,$$

où $Q \in \mathcal{E}_n$ est plate, ainsi que les $b_i \in \mathcal{E}_{n-1}$.

6. Réduction du théorème 1 au théorème 3.

Pour terminer cet exposé, on va montrer que le théorème 1 peut se démontrer si l'on admet le théorème 3. En particulier, le "théorème de préparation différentiable" résultera du théorème 3, qui n'en est pourtant qu'un cas particulier.

Soit $u : A \to B$ un morphisme d'algèbres différentiables. Supposons que $\hat{B}$ soit un $\hat{A}$-module de type fini. Il s'agit d'en déduire que B est un A-module de type fini.

Il suffira de le prouver lorsque $A = \mathcal{E}_m$ et $B = \mathcal{E}_n$. Pour le voir, on va raisonner exactement comme chez HOUZEL [3]. Refaisons ce raisonnement : si $A = \mathcal{E}_m/p$, l'homomorphisme composé

$$\mathcal{E}_m \to A \xrightarrow{u} B$$

définit B comme module sur $\mathcal{E}_m$. Par hypothèse, $\hat{B}$ est un $\widehat{\mathcal{E}_m}$-module de type fini ; si l'on sait que cela entraîne que B est un $\mathcal{E}_m$-module de type fini, B sera un A-module de type fini.

On peut donc supposer désormais que $A = \mathcal{E}_m$. Si $B = \mathcal{E}_n/q$, le morphisme $u : \mathcal{E}_m \to B$ se relève en un morphisme $v : \mathcal{E}_m \to \mathcal{E}_n$. Choisissons dans q des éléments $g_1 , \dots , g_r$ en nombre fini tels que leurs images $\widehat{g_i}$ dans $\widehat{\mathcal{E}_n}$ engendrent $\hat{q}$ comme $\widehat{\mathcal{E}_n}$-module ; c'est possible, puisque $\widehat{\mathcal{E}_n}$ est un anneau noethérien. Définissons un morphisme

$$w : \mathcal{E}_{m+r} \to \mathcal{E}_n$$

au moyen du germe d'application $\underset{\sim}{R}^n \to \underset{\sim}{R}^{m+r}$, produit de l'application $\underset{\sim}{R}^n \to \underset{\sim}{R}^m$ qui définit v , et de l'application $\underset{\sim}{R}^n \to \underset{\sim}{R}^r$ définie par les r fonctions $g_1 , \dots , g_r$. Il est immédiat que

$$\hat{w} : \widehat{\mathcal{E}_{m+r}} \to \widehat{\mathcal{E}_n}$$

fait de $\hat{\mathcal{E}}_n$ un module de type fini sur $\hat{\mathcal{E}}_{m+r}$. Si nous pouvons en conclure que $\mathcal{E}_n$ est un module de type fini sur $\mathcal{E}_{m+r}$, il s'ensuivra que B est un $\mathcal{E}_m$-module de type fini.

C. Q. F. D.

En résumé, il reste seulement à prouver le théorème suivant :

THÉORÈME 4. - Soit $u : \mathcal{E}_m \to \mathcal{E}_n$ un morphisme. Supposons que $\hat{u} : \hat{\mathcal{E}}_m \to \hat{\mathcal{E}}_n$ fasse de $\hat{\mathcal{E}}_n$ un module de type fini sur $\hat{\mathcal{E}}_m$; alors u fait de $\mathcal{E}_n$ un module de type fini sur $\mathcal{E}_m$.

Nous allons démontrer le théorème 4 en admettant le théorème 3. Appelons $y_1, \dots, y_m$ les coordonnées dans l'espace $\mathbb{R}^m$, et $x_1, \dots, x_n$ les coordonnées dans $\mathbb{R}^n$; l'algèbre $\mathcal{E}_m$ sera aussi notée $\mathcal{E}(y_1, \dots, y_m)$, ou plus simplement $\mathcal{E}(y)$; l'algèbre $\mathcal{E}_n$ sera notée $\mathcal{E}(x_1, \dots, x_n)$, ou simplement $\mathcal{E}(x)$. L'homomorphisme u est défini par un germe d'application différentiable $y = \varphi(x)$: u associe à chaque $f \in \mathcal{E}(y)$ l'application composée $f \circ \varphi \in \mathcal{E}(x)$. On voit que u se factorise en

$$\mathcal{E}(y) \to \mathcal{E}(x, y) \to \mathcal{E}(x) \quad ,$$

le premier morphisme étant l'injection canonique (qui associe à $f(y)$ cette même fonction considérée comme fonction de x et de y), et le deuxième morphisme étant défini par

$$f(x, y) \to f(x, \varphi(x)) \quad .$$

On définira plus loin un idéal P de $\mathcal{E}(x, y)$, contenu dans le noyau de $\mathcal{E}(x, y) \to \mathcal{E}(x)$; alors u admettra la factorisation

$$\mathcal{E}(y) \xrightarrow{\iota} \mathcal{E}(x, y)/P \xrightarrow{\pi} \mathcal{E}(x) \quad .$$

Puisque π est surjectif, il suffira de montrer que ι fait de $\mathcal{E}(x, y)/P$ un module de type fini sur $\mathcal{E}(y)$; en effet, ceci entraînera que u fait de $\mathcal{E}(x)$ un module de type fini sur $\mathcal{E}(y)$.

Par hypothèse, $\hat{u}$ fait de $\hat{\mathcal{E}}(x)$ un module de type fini sur $\hat{\mathcal{E}}(y)$. D'après la condition (b) de la proposition 3, il existe un entier r tel que

$$m^r(\hat{\mathcal{E}}(x)) \subset m(\hat{\mathcal{E}}(y)).\hat{\mathcal{E}}(x) \quad .$$

Dans ces conditions, on a montré dans [2] que les monômes

$$(x_1)^{\alpha_1} \dots (x_n)^{\alpha_n}, \qquad \text{où } \alpha_i < r \text{ pour tout } i \quad ,$$

engendrent $\hat{\mathcal{E}}(x)$ comme module sur $\hat{\mathcal{E}}(y)$. Pour chaque i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, il existe donc, dans le noyau $\hat{N}$ du morphisme $\hat{\mathcal{E}}(x , y) \to \hat{\mathcal{E}}(x)$ défini par la substitution $y \to \hat{\varphi}(x)$, un élément

$$Q_i(x , y) = (x_i)^r - \sum_{|\alpha|<r} \widehat{c_{i,\alpha}}(y)\, x^\alpha \qquad ;$$

on a utilisé les notations

$$\begin{cases} \alpha = (\alpha_1 , \dots , \alpha_n) & , \\ x^\alpha = (x_1)^{\alpha_1} \dots (x_n)^{\alpha_n} & , \\ |\alpha| = \sup (\alpha_i) & . \end{cases}$$

On peut s'arranger pour que les $\widehat{c_{i,\alpha}}(0)$ soient nuls. D'après la proposition 2, il existe, dans le noyau N du morphisme $\mathcal{E}(x , y) \to \mathcal{E}(x)$ défini par la substitution $y \to \varphi(x)$, un élément $P_i(x , y)$ qui relève $Q_i(x , y)$. Soit P l'idéal de $\mathcal{E}(x , y)$ engendré par les P_i (pour $1 \leqslant i \leqslant n$). On se propose de montrer que $\mathcal{E}(x , y)/P$ est, grâce à ι, un $\mathcal{E}(y)$-module de type fini ; ceci, comme on l'a vu, démontrera le théorème 4.

Introduisons de nouvelles variables $t_{i,\alpha}$ $(1 \leqslant i \leqslant n ;\ |\alpha| < r)$. Soit

$$\Pi_i(x , t) = (x_i)^r - \sum_{|\alpha|<r} t_{i,\alpha}\, x^\alpha \qquad ,$$

considéré comme un élément de $\mathcal{E}(x , y , t)$. Soit Π l'idéal de $\mathcal{E}(x , y , t)$ engendré par les Π_i (pour $1 \leqslant i \leqslant n$). On va démontrer le lemme :

LEMME 3. - <u>Le morphisme</u>

$$\varkappa : \mathcal{E}(y , t) \to \mathcal{E}(x , y , t)/\Pi$$

<u>défini par l'injection canonique de</u> $\mathcal{E}(y , t)$ <u>dans</u> $\mathcal{E}(x , y , t)$ <u>fait de</u> $\mathcal{E}(x , y , t)/\Pi$ <u>un module de type fini sur</u> $\mathcal{E}(y , t)$.

Il est en effet évident que tout <u>polynôme</u> en les variables x et t est congru, modulo l'idéal engendré par les Π_i, à une somme de monômes $x^\alpha (|\alpha| < r)$ à coefficients polynômes en t. Donc le quotient C de l'algèbre des polynômes en x et t par l'idéal engendré par les Π_i est un module de type fini sur l'algèbre des polynômes en t. Il en résulte que chacun des x_i, dans l'algèbre C, est entier sur l'algèbre des polynômes en t. Par application du théorème de Weierstrass classique, il existe un polynôme <u>distingué</u> en x_i, à coefficients analytiques des variables t à l'origine :

$$R_i(x_i , t) = (x_i)^s + \sum_{j=0}^{s-1} \varphi_{i,j}(t)(x_i)^j$$

qui appartient à l'idéal engendré par $\Pi_1, \dots, \Pi_n$ dans l'algèbre des fonctions analytiques en x_i et les variables t. A fortiori, R_i appartient à l'idéal Π de l'algèbre $\mathcal{E}(x, y, t)$. On peut évidemment supposer que l'entier s est indépendant de i.

Une application répétée du théorème 3 montre que l'on peut écrire, pour toute $f \in \mathcal{E}(x, y, t)$:

$$(4) \quad f(x, y, t) = \sum_{i=1}^{n} R_i(x_i, t)\, G_i(x, y, t) + \sum_{|\beta|<s} H_\beta(y, t)\, x^\beta ,$$

G_i et H_β étant différentiables.

De plus, une application répétée du corollaire au théorème 3 montre que si, dans (4), f est <u>plate</u>, on peut choisir les G_i et les H_β plates.

Puisque chaque R_i appartient à l'idéal Π, et que chaque x^β est égal, modulo Π, à une combinaison linéaire des x^α $(|\alpha| < r)$ à coefficients polynômes en les variables t, on voit que (4) entraîne

$$(5) \quad f(x, y, t) = \sum_{i=1}^{n} \Pi_i(x, t)\, g_i(x, y, t) + \sum_{|\alpha|<r} h_\alpha(y, t)\, x^\alpha ,$$

les g_i et les h_α étant différentiables et que si f est plate on peut choisir les g_i et les h_α plates.

Ceci démontre le lemme 3, en le précisant.

Considérons, dans $\mathcal{E}(x, y, t)$, la relation évidente :

$$Q_i(x, y) = \Pi_i(x, t) + \sum_{|\alpha|<r} (t_{i,\alpha} - \widehat{c_{i,\alpha}}(y))\, x^\alpha .$$

Si on relève les $\widehat{c_{i,\alpha}}$ en des $c_{i,\alpha} \in \mathcal{E}(y)$, alors la différence

$$P_i(x, y) - \Pi_i(x, t) - \sum_\alpha (t_{i,\alpha} - c_{i,\alpha}(y))\, x^\alpha$$

est plate ; d'après ce qui précède, elle peut se mettre sous la forme du second membre de (5), avec des g_i et des h_α plates. On a par conséquent

$$(6) \quad P_i(x, y) = \Pi_i(x, t) + \sum_{j=1}^{n} \Pi_j(x, t)\, g_{i,j}(x, y, t) + \sum_{|\alpha|<r} k_{i,\alpha}(y, t)\, x^\alpha ,$$

les $g_{i,j}$ étant plates, avec

$$\widehat{k_{i,\alpha}}(y, t) = t_{i,\alpha} - \widehat{c_{i,\alpha}}(y) .$$

Les termes du premier degré en t, dans le développement de Taylor de $k_{i,\alpha}$, se réduisent donc à $t_{i,\alpha}$. D'après le <u>théorème des fonctions implicites,</u> le système d'équations

$$k_{i,\alpha}(y , t) = 0$$

est équivalent à

$$t_{i,\alpha} = \theta_{i,\alpha}(y) \quad ,$$

où les $\theta_{i,\alpha}$ sont différentiables. Par la substitution

(7) $$t_{i,\alpha} \to \theta_{i,\alpha}(y) \quad ,$$

la relation (6) donne

(8) $$P_i(x , y) = \Pi_i(x , \theta(y)) + \sum_{j=1}^{n} \Pi_j(x , \theta(y)) \, g_{i,j}(x , y , \theta(y)) \quad ,$$

et les $g_{i,j}(x , y , \theta(y))$ sont plates. Il s'ensuit que les $\Pi_i(x , \theta(y))$ s'expriment comme combinaisons linéaires des $P_i(x , y)$ à coefficients dans $\mathcal{E}(x , y)$. Donc les $\Pi_i(x , \theta(y))$ appartiennent à l'idéal P (et, en fait, l'engendrent). Alors la substitution (7) définit un morphisme $\mathcal{E}(x , y , t) \to \mathcal{E}(x , y)$ qui envoie l'idéal Π dans l'idéal P. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(y , t) \arrow[r, "\varkappa"] \arrow[d, "\lambda"] & \mathcal{E}(x , y , t)/\Pi \arrow[d, "\mu"] \\ \mathcal{E}(y) \arrow[r, "\iota"] & \mathcal{E}(x , y)/P \end{tikzcd}$$

où λ et μ sont les surjections définies par la substitution (7). Or on sait déjà que $\varkappa$ fait de $\mathcal{E}(x , y , t)/\Pi$ un module de type fini sur $\mathcal{E}(y , t)$ (lemme 3). Il s'ensuit que ι fait de $\mathcal{E}(x , y)/P$ un module de type fini sur $\mathcal{E}(y)$.

Ceci achève la démonstration du théorème 4.

En résumé, pour établir le théorème 1, il suffira, dans les exposés suivants, de prouver le théorème 3 (division par un polynôme distingué à coefficients analytiques). En fait, il suffirait même d'établir le théorème de division par un polynôme distingué à coefficients algébriques, et même seulement par le "polynôme générique" distingué

$$P(x_n , t) = (x_n)^p + \sum_{i=0}^{p-1} t_i (x_n)^i \quad .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Eléments de mathématique : Algèbre commutative, Chapitres 3 et 4. - Paris, Hermann, 1961 (Act. scient. et ind., 1293, Bourbaki, 28).

[2] HOUZEL (Christian). - Géométrie analytique locale, I, Séminaire Cartan : Familles d'espaces complexes et fondements de la géométrie analytique, t. 13, 1960/61, n° 18, 12 p.

[3] GLAESER (Georges). - Fonctions composées différentiables, Annals of Math., Séries 2, t. 77, 1963, p. 193-209.