Jean Cerf

Théorèmes de fibration des espaces de plongements. Applications

Séminaire Henri Cartan, tome 15 (1962-1963), exp. nº 8, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1962-1963__15__A2_0>

17 décembre 1962

THÉORÈMES DE FIBRATION DES ESPACES DE PLONGEMENTS. APPLICATIONS

par Jean CERF

1. Les théorèmes de fibration des espaces de plongements.

On considère des espaces de fonctions de classe C^∞, de source une variété à bord anguleux (cf. [2], exposé 1, p. 2) V et de but une variété W ; on suppose que la source V est compacte (c'est le cas dans toutes les applications qu'on a en vue), et on munit les espaces fonctionnels de la topologie C^∞ (cf. [2], exposé 4, p. 3).

Dans ce paragraphe, afin d'obtenir des énoncés ayant le maximum de simplicité, on se borne au cas où le but W est sans bord ; on indiquera plus loin (cf. n° 2, 3°) comment les énoncés doivent être modifiés lorsque W a un bord non vide.

On note $Pl(V , W)$ l'espace des plongements de classe C^∞ de la variété V dans la variété W .

THÉORÈME 1. - Soient V une variété compacte (à bord anguleux), W une variété sans bord ; soit M une sous-variété fermée de V ; l'application canonique

$$Pl(V , W) \to Pl(M , W)$$

est une fibration localement triviale [1].

THÉORÈME 2. - Soient V, W, M comme ci-dessus ; soit f_0 un plongement de V dans W ; on identifie V à son image dans W ; on note $Pl(V , W ; M)$ l'espace des plongements de V dans W qui induisent l'identité sur M. Soit r un entier $\geqslant 1$ (ou éventuellement $r = \infty$) ; on note $J^r_M\, Pl(V , W ; M)$ l'espace des r-jets le long de M de ces plongements, muni de la topologie naturelle des espaces de jets [2]. L'application canonique :

---

[1] On rappelle que si E et B sont deux espaces topologiques et p une application continue : $E \to B$, on dit que p est une fibration localement triviale si pour tout $x_0 \in B$ il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 tel que $p^{-1}(\mathcal{V})$ soit homéomorphe à $\mathcal{V} \times p^{-1}(x_0)$ de façon compatible avec les projections sur $\mathcal{V}$; on notera que la fibre située au-dessus d'un point dépend en général de la composante connexe de ce point ; elle peut être vide, autrement dit p n'est pas supposée surjective.

[2] On rappelle que le r-jet le long de M d'une application de V dans W est la classe d'équivalence définie dans $Hom^\infty(V , W)$ par la relation "être tangents jusqu'à l'ordre r le long de M" (cf. [1], II, 3).

$$Pl(V , W ; M) \to J^r_M \, Pl(V , W ; M)$$

est une fibration localement triviale.

THÉORÈME 3. – Soient V et W comme au théorème 1. Soit $\mathcal{G}$ un sous-groupe du groupe de tous les difféomorphismes de V. $\mathcal{G}$ opère à droite dans $Pl(V , W)$, et y détermine une structure d'espace fibré principal (au sens de [3], exposé 8). Si en plus $\mathcal{G}$ est ouvert, alors l'application canonique

$$Pl(V , W) \to Pl(V , W)/\mathcal{G}$$

est une fibration localement triviale.

La démonstration de ces trois théorèmes se fait suivant le même principe ; on utilise le lemme suivant, qui permet de se ramener à montrer l'existence de sections locales pour les opérations d'un groupe dans un espace.

LEMME 1. Soient E et B deux espaces topologiques, p une application continue : $E \to B$. Pour que p soit une fibration localement triviale, il suffit que pour tout $x_o \in B$ il existe un groupe topologique G opérant à gauche dans E et dans B de façon que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} G \times E & \longrightarrow & E \\ {\scriptstyle \text{identité} \times p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ G \times B & \longrightarrow & B \end{array}$$

soit commutatif, et que l'application : $g \to g.x_o$ de G dans B ait une section continue au voisinage de x_o.

Démonstration du lemme 1. – Soit F_o la fibre de E située au-dessus de x_o. Soit $\mathcal{V}$ un voisinage de x_o tel qu'il existe au-dessus de $\mathcal{V}$ une section continue pour l'application $g \to g.x_o$; il existe alors une application continue $\sigma : \mathcal{V} \to G$ telle que, pour tout $x \in \mathcal{V}$, $\sigma(x).x = x_o$; l'application

$$p^{-1}(\mathcal{V}) \ni z \to (p(z) , \sigma(p(z)).z) \in \mathcal{V} \times F_o$$

est alors un homéomorphisme, car elle a une application réciproque continue, à savoir :

$$\mathcal{V} \times F_o \ni (x , y) \to (\sigma(x))^{-1}.y \in p^{-1}(\mathcal{V}) \quad .$$

Application du lemme 1 à la démonstration des théorèmes de fibration.

THÉORÈME 1. – Soit $k_o \in Pl(M , W)$; on identifie M à son image par k_o ; soit T un voisinage tubulaire fermé de M dans W ; on note $\mathcal{H}$ le groupe des difféomorphismes de W qui induisent l'identité sur $W - T$. Le groupe $\mathcal{H}$ opère à gauche dans $Pl(V , W)$ et $Pl(M , W)$ de façon compatible avec l'application canonique du premier espace sur le second ; d'après le lemme 1, on est ramené à montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de k_0 dans $Pl(M , W)$ et une application continue $\sigma : \mathcal{V} \to \mathcal{H}$, tels que $\sigma(k)|M = k$ pour tout $k \in \mathcal{V}$. Autrement dit, $\sigma(k)$ doit être un difféomorphisme de W (à "support" dans T) *prolongeant* k . Or, à l'aide de la théorie de Whitney sur le prolongement des fonctions différentiables, on montre facilement qu'il existe au voisinage de k_0 une application continue : $k \to \sigma'(k) \in \mathrm{Hom}(W , W ; W - T)$, telle que $\sigma'(k)$ soit un prolongement de k , et $\sigma'(k_0) = e$; donc, pour k assez voisin de k_0 , $\sigma'(k)$ est voisin de e ; c'est donc un difféomorphisme (cf. [2], exposé 5, corollaire 2, p. 3 ; ou [1], II, 1.4.2, p. 287).

THÉORÈME 2. – Le rôle du groupe G du lemme 1 est joué ici par le groupe des difféomorphismes de W qui induisent l'identité sur M et sur le complémentaire d'un voisinage fixe de M dans W (pour la démonstration du théorème d'existence de sections locales, auquel on se trouve ramené, cf. [1], II, 3.2 et 3.3).

THÉORÈME 3. – On se borne à démontrer la deuxième assertion (locale trivialité lorsque $\mathcal{G}$ est ouvert). On note $Pl(V , W) = \mathcal{E}$; soit $f_0 \in \mathcal{E}$; on identifie V à son image par f_0 . Soient T un voisinage tubulaire fermé de V dans W , et $\mathcal{H}$ le groupe des difféomorphismes de W qui induisent l'identité sur $W - T$. Le groupe $\mathcal{H}$ opère à gauche dans $\mathcal{E}$, et ces opérations passent au quotient dans $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ (puisque $h\circ(f\circ g) = (h\circ f)\circ g$), de sorte qu'ici encore $\mathcal{H}$ joue le rôle du groupe G du lemme 1. D'après ce lemme, on est donc ramené à ceci : soit $\dot{f}_0$ l'image de f_0 dans $\mathcal{E}/\mathcal{G}$; il existe une section continue au voisinage de $\dot{f}_0$ pour l'application $h \to h\circ\dot{f}_0$. Or, en [1], II, 2.4.4, on a établi le résultat suivant (qui servait à donner une démonstration du premier théorème de fibration n'utilisant pas la théorie du prolongement de Whitney) :

LEMME 2. – *Avec les notations ci-dessus, il existe un voisinage* $\mathcal{V}$ *de* f_0 *dans* $\mathcal{E}$ *et une application* $\tau : \mathcal{V} \to \mathcal{H}$, *tels que* :

(i) $\tau(f_0) = e$;

(ii) *pour tout* $f \in \mathcal{V}$, $\tau(f)\circ f$ *est de la forme* $f_0\circ g$, *où* g *est un difféomorphisme de* V ;

(iii) *pour tout* $f \in \mathcal{V}$, *et pour tout difféomorphisme* g *de* V *tel que* $f\circ g \in \mathcal{V}$, $\tau(f\circ g) = \tau(f)$.

Appliquons ce lemme. La relation d'équivalence définie par $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{E}$ étant ouverte, l'image $\dot{\mathcal{V}}$ de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{E}/\mathcal{G}$ est un voisinage ouvert de $\dot{f}_o$ dans $\mathcal{E}/\mathcal{G}$, et la topologie de $\dot{\mathcal{V}}$ est la topologie quotient de celle de $\mathcal{V}$ pour la relation d'équivalence induite ; donc, d'après (iii), τ passe au quotient et définit une application continue $\dot{\tau} : \dot{\mathcal{V}} \to \mathcal{H}$. D'après (i) et (ii), pour f assez voisin de f_o, $\tau(f).f$ s'identifie à un difféomorphisme de V qui est voisin de l'identité, donc, puisque $\mathcal{G}$ est ouvert, à un élément de $\mathcal{G}$. Donc pour $\dot{f}$ assez voisin de $\dot{f}_o$, $\dot{\tau}(\dot{f}).\dot{f} = \dot{f}_o$; donc $\dot{\tau}^{-1}$ fournit la section cherchée.

2. Quelques compléments relatifs aux théorèmes 1 et 2.

1° On peut donner un énoncé qui généralise à la fois le théorème 1 et le théorème 2 (et qui est une conséquence immédiate des théorèmes d'existence de sections locales utilisés pour démontrer ces théorèmes ; cf. [1], théorème 6', p. 319) :

THÉORÈME 2'. - Soient V, W, M comme dans l'énoncé du théorème 1 ; soit r un entier ≥ 1 (ou éventuellement $r = \infty$). L'application canonique :

$$\mathrm{Pl}(V , W) \to J^r_M \, \mathrm{Pl}(V , W)$$

est une fibration localement triviale.

2° Fibration de certains sous-espaces de $\mathrm{Pl}(V , W)$.

On utilisera dans la suite les deux théorèmes suivants, analogues au théorème 1, mais donnant des fibrations de certains sous-espaces de $\mathrm{Pl}(V , W)$:

THÉORÈME 1.a. - Soient V, W, M, f_o, r comme dans l'énoncé du théorème 2 ; soit L un fermé de M ; soit N un "tube local" (^{3}) normal à M dans V, d'âme L ; on note $\mathrm{Pl}(V , W ; J^r_N)$ l'espace des plongements de V dans W qui sont r-tangents à f_o le long de N ; l'application canonique :

$$\mathrm{Pl}(V , W ; J^r_N) \to \mathrm{Pl}(M , W ; J^r_L)$$

est une fibration localement triviale.

(^{3}) C'est-à-dire une partie de V telle qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de M dans V et un tube T normal à M dans V, d'âme L, tels que

$$\mathcal{V} \cap N = \mathcal{V} \cap T \quad .$$

THÉORÈME 1.b. - Soient V, W, M, f_o, r, L comme ci-dessus ; on suppose en plus que dimension M = dimension V, et que $V - M$ est une sous-variété de V, qu'on note M' ; on note $M \cap M' = Q$. Soit N un tube local (3) normal à Q dans M', d'âme $L \cap Q$; l'application canonique :

$$\mathrm{Pl}(V , W ; J^r_{L\cup N}) \to \mathrm{Pl}(M , W ; J^r_L)$$

est une fibration localement triviale.

Les théorèmes 1.a et 1.b sont des cas particuliers d'un théorème de [1] (corollaire 2 du théorème 5', p. 298), qui se démontre à l'aide d'un théorème d'existence de sections locales analogue à celui utilisé ci-dessus pour démontrer le théorème 1.

On utilisera également le théorème suivant, analogue au théorème 2 (et qui est un cas particulier du corollaire du théorème 6" de [1], p. 321) :

THÉORÈME 2.a. - Soient V, W, M, f_o, r, L, N comme dans l'énoncé du théorème 1.a ; on note $\mathrm{Pl}(V , W ; M ; J^r_N)$ l'espace des plongements de V dans W qui coïncident avec f_o sur M et sont r-tangents à f_o le long de N. L'application canonique

$$\mathrm{Pl}(V , W ; M ; J^r_N) \to J^r_M\, \mathrm{Pl}(V , W ; M ; J^r_N)$$

est une fibration localement triviale.

3° Cas où W a un bord non vide.

Dans le cas où, toutes les autres hypothèses restant les mêmes, on suppose que W est une variété à bord (anguleux), on a des théorèmes analogues aux théorèmes 1 et 2 pour les espaces de plongements ayant des "relations d'incidence" (4) données. Par exemple, le théorème 1 se généralise comme suit :

"Soient V, W, M, f_o comme dans l'énoncé du théorème 2 ; soit k_o l'injection de M dans W ; on note $\mathrm{Pl}(V , W ; f_o)$ l'espace des plongements de V dans W ayant mêmes relations d'incidence que f_o. L'application canonique :

$$\mathrm{Pl}(V , W ; f_o) \to \mathrm{Pl}(M , W ; k_o)$$

est une fibration localement triviale."

Les théorèmes 2, 2', 1.a, 1.b, 2.a ci-dessus admettent des généralisations analogues. Du théorème 2.a ainsi généralisé on déduit immédiatement la proposition suivante :

---

(4) Cf. [2], exposé 2, définition 3, p. 2

PROPOSITION 1. - Soit V une variété compacte, à bord anguleux, dont toutes les faces de codimension 1 soient des sous-variétés ; soit M une partie du bord ∂V de V qui soit réunion de telles faces ; on note $\mathrm{Diff}(V ; \partial V ; J_M^r)$ le groupe des difféomorphismes de V qui induisent l'identité sur ∂V et qui sont tangents d'ordre r à l'identité le long de M. L'application canonique :

$$\pi_i(\mathrm{Diff}(V ; J^r_{\partial V})) \to \pi_i(\mathrm{Diff}(V ; \partial V ; J^r_M))$$

est un isomorphisme pour tout $i \geqslant 0$.

Cas particulier. - L'application canonique

$$\pi_i(\mathrm{Diff}(V ; J^r_{\partial V})) \to \pi_i(\mathrm{Diff}(V ; \partial V))$$

est un isomorphisme pour tout $i \geqslant 0$.

3. Espaces de plongements et arrondissement des arêtes.

Soit V une variété compacte ; supposons d'abord que V soit à bord lisse ; soit T un voisinage tubulaire dans V du bord ∂V de V ; T est difféomorphe à $\partial V \times [0 , 1]$. Soit ρ un difféomorphisme de $[0 , 1]$ sur $[1/3 , 1]$ qui induise l'identité sur $[2/3 , 1]$; on choisit une trivialisation de T, et on pose, pour tout $\lambda \in [0 , 1]$,

(1) $$g_\lambda(x , \xi) = (x , (1 - \lambda)\xi + \lambda\rho(\xi)) \quad \text{pour} \quad (x , \xi) \in \partial V \times [0 , 1]$$

g_λ définit un plongement de T dans T, qui se prolonge canoniquement en un plongement de V dans V, qu'on note encore g_λ, et qui vérifie :

a. g_λ dépend continûment de λ ;

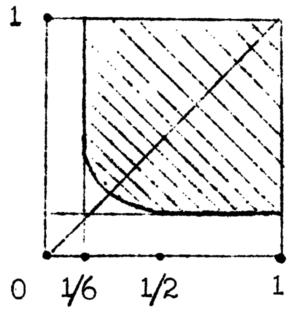
b. g_0 = identité ;

c. pour tout λ, g_λ induit l'identité sur $V - T$

d. $\lambda' < \lambda$ entraîne : $g_{\lambda'}(V) \subset g_\lambda(V)$.

Supposons maintenant que V ait un bord anguleux ; ∂V possède alors un "voisinage prismatique" T dans V ; cette notion est définie de façon précise dans [1], page 250 ; on peut dire de façon heuristique que " T est un fibré généralisé" de base ∂V ; la "fibre" située au-dessus d'un point x intérieur à une face de dimension q de V est l'image d'un plongement $[0 , 1]^{n-q} \to V$ qui envoie l'origine en x, et qui est bien déterminé, à une permutation près du cube $[0 , 1]^{n-q}$, par la donnée de T. En prolongeant le difféomorphisme ρ ci-dessus de façon naturelle à $[0\ ,\ 1]^{n-q}$, on peut encore définir à l'aide de la formule (1) appliquée dans un système convenable de cartes définissant T , une famille (g_λ) de plongements de V dans V ayant les propriétés (a), (b), (c), (d) ci-dessus (pour les détails, cf. [1], p. 297).

Soit maintenant X une arête de V (cf. [2], exposé 3, p. 1) ; la partie T_X de T située au-dessus de X est un fibré de base X , de fibre $[0\ ,\ 1] \times [0\ ,\ 1]$, de groupe structural $\underset{\sim}{Z}_2$ (opérant par la symétrie diagonale). Soit A la partie de $[0\ ,\ 1] \times [0\ ,\ 1]$ hachurée sur la figure ci-contre (A est <u>convexe</u>, limitée par une courbe de classe C^∞ , symétrique par rapport à la diagonale, et contient le segment $[1/2, 1] \times \{1/6\}$). La donnée de A et de T_X définit une partie A_X de T_X ; soit V' la partie de V définie par :



$$\begin{cases} V' \cap T_X = A_X \\ V' \cap (V - T_X) = (\rho_{1/2}(V)) \cap (V - T_X) \end{cases}$$

V' est une sous-variété de l'intérieur de V , difféomorphe à la variété obtenue à partir de V en arrondissant X (cf. [2], exposé 3, p. 1 et 2). Pour tout $x \in X$, la restriction de ρ_λ à la fibre T_x de T située au-dessus de x est définie (après identification de T_x à $[0\ ,\ 1] \times [0\ ,\ 1]$) par

$$\rho_\lambda(\xi_1\ ,\ \xi_2) = (\rho_\lambda(\xi_1)\ ,\ \rho_\lambda(\xi_2)) \qquad ;$$

or $\rho_\lambda(\xi) \geqslant \xi$ pour tout $\xi \in [0\ ,\ 1]$; donc, d'après la convexité de A , (g_λ) vérifie

e. pour tout $\lambda \in [0\ ,\ 1]$, $g_\lambda(V') \subset V'$.

<u>Comparaison du groupe des difféomorphismes d'une variété et de son arrondie.</u>

On conserve les notations ci-dessus ; on note en plus $g_1(V) = V''$ (c'est une sous-variété de l'intérieur de V , difféomorphe à V). On note $\mathcal{G}$ (resp. $\mathcal{G}'$, resp. $\mathcal{G}''$) le groupe des difféomorphismes de V (resp. V' , resp. V'') qui sont tangents d'ordre infini à l'identité le long de ∂V (resp. $\partial V'$, resp. $\partial V''$).

On a d'une part des applications canoniques (définies par prolongement par l'application identique)

$$\alpha : \mathcal{G}' \to \mathcal{G} \ ; \qquad \alpha' : \mathcal{G}'' \to \mathcal{G}' \quad .$$

D'autre part, on définit un homéomorphisme $\beta : \mathcal{G} \to \mathcal{G}''$, en posant, pour tout $f \in \mathcal{G}$:

$$\beta(f) = g_1 \circ f \circ g_1^{-1} \quad .$$

L'application $\alpha \circ \alpha' \circ \beta$ de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ est homotope à l'application identique de $\mathcal{G}$, car si on pose, pour $\lambda \in [0 , 1]$:

$$\gamma_\lambda(f) \begin{cases} g_\lambda \circ f \circ g_\lambda^{-1} & \text{sur } g_\lambda(V) \\ \text{identité} & \text{sur } V - g_\lambda(V) \end{cases}$$

on a : $\gamma_0(f) = f$, et $\gamma_1(f) = \alpha \circ \alpha' \circ \beta(f)$.

L'application $\alpha' \circ \beta \circ \alpha$ de $\mathcal{G}'$ dans $\mathcal{G}'$ est homotope à l'application identique de $\mathcal{G}'$, car d'après la condition (e), pour tout $f' \in \mathcal{G}'$ et tout $\lambda \in [0 , 1]$, $\gamma_\lambda(\alpha(f'))$ induit l'identité sur $V - V'$; or $\gamma_0(\alpha(f'))|V' = f$, et $\gamma_1(\alpha(f'))|V' = \alpha' \circ \beta \circ \alpha(f')$.

On peut donc énoncer :

PROPOSITION 2. - <u>Soient</u> V <u>une variété compacte</u>, X <u>une arête de</u> V, V' <u>une variété définie à partir de</u> V <u>en arrondissant</u> X. <u>Soit</u> $\mathcal{G}$ (<u>resp.</u> $\mathcal{G}'$) <u>le groupe des difféomorphismes de</u> V (<u>resp.</u> V') <u>qui sont tangents d'ordre infini à l'identité le long de</u> ∂V (<u>resp.</u> $\partial V'$). <u>Les groupes</u> $\mathcal{G}$ <u>et</u> $\mathcal{G}'$ <u>ont même type d'homotopie</u>.

<u>Plongements d'une sous-variété et de son arrondie.</u>

On suppose maintenant que V est une sous-variété fermée d'une variété compacte W ; au lieu du bord ∂V de V, on considère cette fois son <u>bord relatif</u> ∂V_W (cf. [2], exposé 1, p. 5) ; on prend pour T un voisinage prismatique de ∂V_W dans V, et on définit comme ci-dessus, pour tout $\lambda \in [0 , 1]$, un plongement g_λ de V dans W, vérifiant les conditions (a), (b), (c) et (d) ci-dessus, et ayant mêmes relations d'incidence que l'injection de V dans W ; d'après le théorème 1 (appliqué dans le cas où W a un bord, cf. ci-dessus, n° 2, 3°), chaque g_λ se prolonge en un difféomorphisme de W, vérifiant encore les conditions (a), (b), (c), (d).

Soit alors X une arête de l'intérieur de ∂V_W ; la donnée de T et de la partie A de $[0 , 1] \times [0 , 1]$ définie ci-dessus, définit une sous-variété V' de V.

Définition. - On dit que la sous-variété V' de W définie par le procédé ci-dessus est obtenue à partir de V en arrondissant X (à l'aide de ρ , T et A).

(On notera que V' est contenue dans l'intérieur relatif de V ; si $\tilde{V}'$ est la sous-variété de W obtenue à partir de V en arrondissant X à l'aide de $\tilde{\rho}$, $\tilde{T}$ et $\tilde{A}$, $\tilde{V}'$ se déduit de V' par une isotopie de V .)

Comme ci-dessus, V' vérifie, relativement à g_λ , la condition (e) ; on note encore : $g_1(V) = V''$. Soit $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{E}'$, resp. $\mathcal{E}''$) l'espace des plongements de V (resp. V' , resp. V'') dans W qui ont mêmes relations d'incidence que l'injection, et qui sont tangents d'ordre infini à l'injection le long de $V \cap \partial W$ (resp. $V' \cap \partial W$, resp. $V'' \cap \partial W$). On a d'une part des applications canoniques (définies par la restriction)

$$\alpha : \mathcal{E} \to \mathcal{E}' ; \qquad \alpha' : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}'' \qquad ;$$

et d'autre part on définit une application continue $\beta : \mathcal{E}'' \to \mathcal{E}$, en posant, pour tout $f'' \in \mathcal{E}''$:

$$\beta(f'') = g_1^{-1} \circ f'' \circ g_1 | V \qquad .$$

L'application $\beta \circ \alpha' \circ \alpha$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ est homotope à l'application identique de $\mathcal{E}$; car d'après (d), $g_\lambda^{-1} \circ f \circ g_\lambda | V$ a un sens pour tout $f \in \mathcal{E}$ et tout $\lambda \in [0 , 1]$; c'est un élément de $\mathcal{E}$ qu'on note f_λ ; il vérifie : $f_0 = f$, $f_1 = \beta \circ \alpha' \circ \alpha(f)$.

L'application $\alpha \circ \beta \circ \alpha'$ de $\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{E}'$ est homotope à l'application identique de $\mathcal{E}'$; car d'après (e), $g_\lambda^{-1} \circ f' \circ g_\lambda | V'$ a un sens pour tout $f' \in \mathcal{E}'$ et tout $\lambda \in [0 , 1]$; c'est un élément de $\mathcal{E}'$ qu'on note f'_λ ; il vérifie :

$$f'_0 = f' , \qquad f'_1 = \alpha \circ \beta \circ \alpha'(f') \qquad .$$

On peut donc énoncer :

PROPOSITION 2'. - Soient W une variété compacte (à bord anguleux) et V une sous-variété fermée de W . Soit X une arête de V située dans l'intérieur du bord relatif ∂V_W de V . Soit V' une sous-variété de W obtenue à partir de V en arrondissant X . Soit $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{E}'$) l'espace des plongements de V (resp. V') dans W qui ont mêmes relations d'incidence que l'injection et qui sont tangents d'ordre infini à l'injection le long de $V \cap \partial W$ (resp. $V' \cap \partial W$). L'application canonique $\mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ (définie par la restriction) est une homotopie-équivalence.

4. Application aux groupes d'homotopie de quelques espaces de plongements. Théorème de Smale sur le groupe des difféomorphismes de la sphère S^2.

PROPOSITION 3. - Soit V une variété compacte de classe C^∞, sans bord, de dimension n. Soit p un entier $\leqslant n$. Les groupes d'homotopie de l'espace des plongements de classe C^∞ de D^p dans V sont canoniquement isomorphes à ceux de l'espace des p-repères de l'espace tangent à V.

Démonstration. - L'application qui à tout plongement de D^p dans V associe son 1-jet à l'origine est une fibration localement triviale d'après le théorème 2'. La base de cette fibration s'identifie à l'espace des p-repères de l'espace tangent à V ; sa fibre est acyclique en toute dimension d'après [1], proposition 8, page 336.

PROPOSITION 4. - Soit $\mathcal{H}$ le groupe des difféomorphismes de D^n qui sont tangents d'ordre infini à l'application identique le long de S^{n-1} ; pour tout $i \geqslant 0$, il existe un isomorphisme canonique :

$$\pi_i(\mathrm{Diff}\, S^n) \approx \pi_i(\mathcal{H}) \oplus \pi_i(SO(n+1)) \quad .$$

Démonstration. - Soit S^n_+ l'hémisphère nord de S^n ; considérons l'application canonique :

$$\mathrm{Diff}\, S^n \to \mathrm{Pl}(S^n_+ , S^n) \quad . \tag{1}$$

C'est une fibration localement triviale d'après le théorème 1 ; les groupes d'homotopie de la fibre sont canoniquement isomorphes à ceux de $\mathcal{H}$ d'après [1], II, 5.1.2, page 334 ; ceux de la base sont canoniquement isomorphes à ceux de $SO(n+1)$ d'après la proposition 3. D'où la suite exacte canonique :

$$\cdots \longrightarrow \pi_i(\mathcal{H}) \longrightarrow \pi_i(\mathrm{Diff}\, S^n) \xrightarrow{\varpi_i} \pi_i(SO(n+1)) \longrightarrow \pi_{i-1}(\mathcal{H}) \longrightarrow \cdots$$

Cette suite exacte se décompose, car l'application canonique $\pi_i(SO(n+1)) \to \pi_i(\mathrm{Diff}\, S^n)$, définie par l'inclusion, est une section pour l'application ϖ_i.

PROPOSITION 5. - Soit $\mathcal{H}$ comme ci-dessus (proposition 4). Soit $\mathfrak{a}$ l'espace des plongements de l'équateur D^{n-1} de D^n dans D^n, qui sont tangents d'ordre infini à l'injection le long du bord S^{n-2} de D^{n-1}. Pour tout $i \geqslant 0$, il existe un isomorphisme canonique :

$$\pi_i(\mathcal{H}) \approx \pi_{i+1}(\mathfrak{a}) \quad .$$

Démonstration. - Soit D_+^n la demi-boule formée nord de D^n. Soit $\mathcal{E}$ l'espace des plongements de D_+^n dans D^n qui sont tangents d'ordre infini à l'injection le long de $D_+^n \cap S^{n-1}$; soit T un voisinage tubulaire de $D_+^n \cap S^{n-1}$ dans D_+^n ; d'après la proposition 2', les groupes d'homotopie de $\mathcal{E}$ sont canoniquement isomorphes à ceux de l'espace des plongements de T dans D^n qui sont tangents d'ordre infini à l'injection le long de $T \cap S^{n-1}$; et ces derniers groupes sont nuls d'après [1], corollaire 4, page 333 ; donc $\pi_i(\mathcal{E}) = 0$ pour tout $i \geqslant 0$. D'après le théorème 1.a, l'application canonique $\mathcal{E} \to \mathfrak{A}$ est une fibration localement triviale ; soit $\widetilde{\mathcal{H}}$ la fibre de $\mathcal{E}$ située au-dessus de l'injection $D^{n-1} \to D^n$; $\widetilde{\mathcal{H}}$ s'identifie au groupe des difféomorphismes de D_+^n qui induisent l'identité sur D^{n-1} et qui sont tangents d'ordre infini à l'identité le long de $D_+^n \cap S^{n-1}$; d'après la proposition 1 et la proposition 2', $\pi_i(\widetilde{\mathcal{H}})$ est canoniquement isomorphe à $\pi_i(\mathcal{H})$ pour tout $i \geqslant 0$. La proposition résulte donc de la suite exacte d'homotopie de la fibration $\mathcal{E} \to \mathfrak{A}$.

PROPOSITION 6. - Soit B un voisinage tubulaire (difféomorphe à $D^{n-2} \times [-1,+1]$) de l'équateur D^{n-2} de D^{n-1} dans D^{n-1} ; soit $\mathcal{B}$ l'espace des plongements de B dans D^n qui sont tangents d'ordre infini à l'injection le long de $B \cap S^{n-1}$. Soit $\mathcal{H}$ comme ci-dessus (proposition 4). Pour tout $i \geqslant 0$, il existe un isomorphisme canonique de $\pi_i(\mathcal{H})$ sur un facteur direct de $\pi_{i+2}(\mathcal{B})$.

Démonstration. - On note M_1 et M_2 les adhérences des deux composantes connexes de $D^{n-1} - B$. Soit $\mathfrak{F}$ (resp. $\mathcal{B}$) l'espace des plongements de $M_1 \cup B$ (resp. B) dans D^n qui sont tangents d'ordre infini à l'injection le long de $(M_1 \cup B) \cap S^{n-1}$ (resp. $B \cap S^{n-1}$). D'après les propositions 1 et 2', $\pi_i(\mathfrak{F}) = 0$ pour tout $i \geqslant 0$. D'après le théorème 1.b, l'application canonique $\mathfrak{F} \to \mathcal{B}$ est une fibration localement triviale ; soit $\mathfrak{A}'$ la fibre située au-dessus de l'injection $B \to D^n$; la suite exacte d'homotopie donne un isomorphisme canonique

(2) $$\pi_i(\mathfrak{A}') \approx \pi_{i+1}(\mathcal{B}) \qquad \text{pour tout } i \geqslant 0 \quad .$$

$\mathfrak{A}'$ s'identifie à l'espace des plongements de M_1 dans $D^n - \mathring{B}$ qui sont tangents d'ordre infini à l'injection le long de ∂M_1. On va comparer $\mathfrak{A}'$ et l'espace $\mathfrak{A}$ défini ci-dessus (proposition 5), et pour cela les comparer tous deux au sous-espace $\mathfrak{A}''$ de $\mathfrak{A}'$, formé des plongements dont l'image ne rencontre pas M_2.

Comparaison de $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}''$. - D'après le théorème 1.b, l'application canonique $\mathfrak{A} \to \mathfrak{F}$ est une fibration localement triviale ; on a vu d'une part que $\pi_i(\mathfrak{F}) = 0$ pour tout $i \geqslant 0$; et d'autre part la fibre de cette fibration s'identifie canoniquement à $\mathcal{A}''$. On a donc un isomorphisme canonique

(3) $$\pi_i(\mathcal{A}) \approx \pi_i(\mathcal{A}'') \quad \text{pour tout } i \geqslant 0 \quad .$$

<u>Comparaison de $\tilde{\mathcal{A}}'$ et $\tilde{\mathcal{A}}''$</u>. – Soit C un voisinage tubulaire de D^{n-2} dans D^n (difféomorphe à $D^{n-2} \times D^2$), tel que $C \cap D^{n-1} = B$. On note $\tilde{\mathcal{A}}'$ le sous-espace de $\mathcal{A}'$ formé des plongements dont l'image ne rencontre pas $\mathring{C}$; on note $\tilde{\mathcal{A}}' \cap \mathcal{A}'' = \tilde{\mathcal{A}}''$. Soit $\psi_\lambda(C)$ l'image de C par l'affinité orthogonale à D^{n-1}, de rapport λ ; pour tout compact $\mathcal{K}$ de $\mathcal{A}'$, il existe $\lambda > 0$ tel que $\bigcup_{f \in \mathcal{K}} f(M_1)$ ne rencontre pas l'intérieur de $\psi_\lambda(C)$; il en résulte que pour tout $i \geqslant 0$, $\pi_i(\tilde{\mathcal{A}}')$ est canoniquement isomorphe à $\pi_i(\mathcal{A}')$ et $\pi_i(\tilde{\mathcal{A}}'')$ à $\pi_i(\mathcal{A}'')$.

Or il existe un difféomorphisme canonique de $D^n - \mathring{C}$ sur $M_1 \times S^1$: il identifie M_1 à $M_1 \times \{1\}$ et M_2 à $M_1 \times \{-1\}$, où 1 et -1 sont deux points diamétralement opposés de S^1 (plongée de façon naturelle dans $\mathbb{R}^2$). On considère d'autre part le cylindre $M_1 \times \mathbb{R}$; on identifie M_1 à $M_1 \times \{0\}$, et on considère l'espace $\tilde{\mathcal{A}}'''$ des plongements de M_1 dans $M_1 \times \mathbb{R}$ qui sont tangents à l'injection le long de ∂M_1. Puisque M_1 est difféomorphe à la demi-boule fermée D^{n-1}_+, M_1 est simplement connexe ; l'application $(x , \theta) \to (x, e^{2i\pi\theta})$ définit donc $M_1 \times \mathbb{R}$ comme le revêtement universel de $M_1 \times S^1$, et tout élément de $\tilde{\mathcal{A}}''$ se relève canoniquement en un élément de $\tilde{\mathcal{A}}'''$; ceci définit une application $\rho : \tilde{\mathcal{A}}' \to \tilde{\mathcal{A}}'''$. D'autre part le choix d'un difféomorphisme φ, d'orientation positive, de $\mathbb{R}$ sur $S^1 - \{-1\}$ définit un homéomorphisme $\sigma : \tilde{\mathcal{A}}''' \to \tilde{\mathcal{A}}''$. Soit j l'injection $\tilde{\mathcal{A}}'' \to \tilde{\mathcal{A}}'$; l'application $\sigma \circ \rho \circ j$ de $\tilde{\mathcal{A}}''$ dans lui-même est homotope à l'application identique de $\tilde{\mathcal{A}}''$ (car à tout élément $f : x \to (X(x) , e^{2i\pi\theta(x)})$ de $\tilde{\mathcal{A}}''$, elle associe le plongement : $x \to (X(x), \varphi \circ \theta(x))$, qui lui est canoniquement isotope parce que le groupe des difféomorphismes de $\mathbb{R}$ conservant l'orientation est convexe) ; donc $\sigma \circ \rho \circ j$ induit un isomorphisme de $\pi_i(\tilde{\mathcal{A}}'')$ sur lui-même ; donc, compte tenu de l'identification de $\pi_i(\tilde{\mathcal{A}}')$ à $\pi_i(\mathcal{A}')$ et de $\pi_i(\tilde{\mathcal{A}}'')$ à $\pi_i(\mathcal{A}'')$:

(4) pour tout $i \geqslant 0$, il existe un isomorphisme canonique de $\pi_i(\mathcal{A}'')$ sur un facteur direct de $\pi_i(\mathcal{A}')$.

De (2), (3) et (4), il résulte que, pour tout $i \geqslant 0$, il existe un isomorphisme canonique de $\pi_i(\mathcal{A})$ sur un facteur direct de $\pi_{i+1}(\mathcal{B})$; d'où le résultat, compte tenu de la proposition 5.

<u>Cas $n = 2$: le théorème de Smale</u>. – Si $n = 2$, B est un segment intérieur au disque D^2, et $\mathcal{B}$ est l'espace des plongements de ce segment dans l'intérieur de D^2. D'après la proposition 3 on a donc :

$$\begin{cases} \pi_1(\mathcal{B}) \approx \underset{\sim}{Z} & ; \\ \pi_i(\mathcal{B}) = 0 & \text{pour } i \neq 1 \end{cases} .$$

Donc d'après la proposition 6, $\pi_i(\mathcal{H}) = 0$ pour tout $i \geqslant 0$; autrement dit :

THÉORÈME 4.- Soit $\mathcal{H}$ le groupe des difféomorphismes de D^2 qui sont tangents d'ordre infini à l'application identique le long de S^1 ; on a $\pi_i(\mathcal{H}) = 0$ pour tout $i \geqslant 0$.

COROLLAIRE 1. - $\pi_i(\mathrm{Diff}(D^2 ; S^1)) = 0$ pour tout $i \geqslant 0$.

COROLLAIRE 2. - L'application canonique : $\pi_i(SO(3)) \to \pi_i(\mathrm{Diff}\ S^2)$ est un isomorphisme pour tout $i \geqslant 0$.

COROLLAIRE 3. - Le groupe Γ_3 est nul.

(Le corollaire 1 résulte immédiatement du théorème et du cas particulier de la propositinn 1 ; le corollaire 2 résulte immédiatement du théorème et de la proposition 6 ; quant au corollaire 3, c'est une conséquence immédiate du corollaire 2 et de la définition des groupes Γ_n ; cf. l'exposé suivant.)

BIBLIOGRAPHIE

[1] CERF (Jean). - Topologie de certains espaces de plongements, Bull. Soc. math. France, t. 89, 1961, p. 227-382.

[2] Séminaire H. CARTAN : Topologie différentielle, t. 14, 1961/62, exposés n° 1, 2, 3 (par A. DOUADY), 4, 5, 6, 7 (par C. MORLET).

[3] Séminaire H. CARTAN : Topologie algébrique, t. 1, 1948/49, 2e édition. - Paris, Secrétariat mathématique, 1955.