Séminaire Henri Cartan

Adrien Douady

Théorèmes d'isotopie et de recollement

Séminaire Henri Cartan, tome 14 (1961-1962), exp. nº 2, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1961-1962__14__A2_0>

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1961-1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire Henri CARTAN
(Topologie différentielle)
14e année, 1961/62, n° 2

THÉORÈMES D'ISOTOPIE ET DE RECOLLEMENT

par Adrien DOUADY

I. Enoncé et premières applications du théorème de Cerf.

1. Espaces d'applications.

Définition 1. - Soient V et W deux variétés à bord anguleux. On notera $\mathrm{Hom}(W ; V)$ l'espace des applications $\mathcal{C}^\infty$ de W dans V, muni de la topologie $\mathcal{C}^\infty$ caractérisée par la propriété suivante :

La famille f_α tend vers f suivant un filtre donné sur l'ensemble des indices α, si, pour toute fonction h de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur V et tout opérateur différentiel ω sur W, la fonction $\omega(h \circ f_\alpha)$ converge vers $\omega(h \circ f)$ uniformément sur W.

On appelle ici opérateur différentiel sur W tout opérateur ω qui, à chaque fonction g de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur W, fait correspondre une fonction $\omega(g)$, donnée localement par une expression de la forme

$$\omega(g) = \sum a_{i_1,\ldots,i_n} \frac{\partial^{|i|} g}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} \quad ,$$

où les a_i sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, la somme est localement finie, mais

$$|i| = i_1 + \ldots + i_n$$

n'est pas nécessairement borné sur W, si W n'est pas compacte.

Si W est compacte, cette topologie n'est autre que celle de la "convergence uniforme de f et de toutes ses dérivées". Elle est alors métrisable.

Définition 2. - Soient V et W deux variétés à bord anguleux, $f_o \in \mathrm{Hom}(W ; V)$, et F un fermé de W. On notera $\mathrm{Hom}(W , F , f_o ; V)$ le sous-espace de $\mathrm{Hom}(W ; V)$ formé des applications $f : W \to V$ qui coïncident avec f_o sur F ; $\mathrm{Hom}(W , F , f_o ; V)$ est un fermé de $\mathrm{Hom}(W ; V)$. On omettra f_o quand il n'y a pas de confusion possible.

2. Relations d'incidence.

Définition 3.

a. Soient f_o et f_1 deux applications C^∞ de W dans V. On dit que f_1 respecte les relations d'incidence de f_o si, pour tout x de W, l'indice de V au point $f_1(x)$ est supérieur ou égal à son indice au point $f_o(x)$.

b. On notera $\mathrm{Hom}(W\,;\,V\,;\,f_o)$ le sous-espace de $\mathrm{Hom}(W\,;\,V)$ formé des f qui respectent les relations d'incidence de f_o.

c. On dira que f_o et f_1 ont mêmes relations d'incidence si chacune respecte les relations d'incidence de l'autre.

C'est une relation d'équivalence. $\mathrm{Hom}(W\,;\,V\,;\,f_o)$ est un fermé de $\mathrm{Hom}(W\,;\,V)$. On posera

$$\mathrm{Hom}(W\,,\,F\,;\,V\,;\,f_o) = \mathrm{Hom}(W\,,\,F\,,\,f_o\,;\,V) \cap \mathrm{Hom}(W\,;\,V\,;\,f_o) \quad .$$

3. Plongements propres.

Définition 4.

a. On appelle plongement propre de W dans V tout difféomorphisme de W sur une sous-variété [1] de V.

b. Si F est un fermé de W et f_o un plongement propre de W dans V, on note $\mathrm{Plp}(W\,,\,F\,;\,V\,;\,f_o)$ le sous-espace de $\mathrm{Hom}(W\,;\,V)$, formé des plongements propres de W dans V qui ont mêmes relations d'incidence que f_o et qui coïncident avec f_o sur F. $\mathrm{Plp}(W\,,\,F\,;\,V\,;\,f_o)$ est un ouvert de $\mathrm{Hom}(W\,,\,F\,;\,V\,;\,f_o)$. C'est même un ouvert pour la topologie C^1 ([1], proposition 1, p. 283, et propriété immédiate 1, p. 282).

4. Jets le long de l'âme.

Soient V et W deux variétés à bord anguleux, W étant compacte ; soit B un tube d'âme W, i. e. (exposé 1, p. 1-06) un fibré en secteurs de boules, de base W, associé à un fibré A en secteurs sur W dont le groupe structural a été réduit au groupe orthogonal.

W est canoniquement plongé dans B, lui-même plongé dans A.

---

[1] Les sous-variétés sont toujours fermées (convention de l'exposé précédent).

Définition 5. - On dira que deux applications f et g de classe $\mathcal{C}^\infty$ de B dans V, qui coïncident sur W, sont tangentes le long de W, ou ont même jet ([2]) le long de W, si, en tout point x de W, elles ont même application dérivée $T_x(B) \to T_y(W)$, où $y = f(x) = g(x)$.

Pour cela, il suffit qu'elles induisent la même application linéaire $E_x \to T_y(W)$, en notant E_x l'espace vectoriel engendré par le secteur A_x, fibre de A en x. En effet,

$$T_x(B) = T_x(W) \oplus E_x \quad .$$

De plus pour toute application f_o de classe $\mathcal{C}^\infty$ de W dans V, l'espace $J_W(B , f_o ; V)$, quotient de $\mathrm{Hom}(B , W , f_o ; V)$ par la relation d'équivalence "être tangent le long de W", s'identifie à l'espace des homomorphismes $\mathcal{C}^\infty$ de fibrés vectoriels sur W de E dans $f_o^*(T(V))$, qui, pour chaque point x de W, appliquent A_x dans $A_{f_o(x)}(V)$.

Si f est une application de B dans V, on notera $J_W(B ; V ; f)$ l'image canonique de $\mathrm{Hom}(B , W ; V ; f)$ (espace des applications qui respectent les relations d'incidence de f et coïncident avec f sur W) dans $J_W(B , f ; V)$. Si f est un plongement de B dans V, on notera $J_W \,\mathrm{Pl}(B ; V ; f)$ l'image canonique de $\mathrm{Pl}(B , W ; V ; f)$ (espace des plongements de B dans V qui ont mêmes relations d'incidence que f et coïncident avec f sur W) dans $J_W(B , f ; V)$. Alors, $J_W \,\mathrm{Pl}(B ; V ; f)$ est ouvert dans $J_W(B ; V ; f)$, lui-même fermé dans $J_W(B , f ; V)$.

5. Le théorème de Cerf.

Définition 6. - Les notations étant celles du n° 4, un plongement f de B dans V sera dit intérieur s'il se prolonge en un plongement dans V d'un voisinage B' de B dans A.

Il résultera de la deuxième partie de cet exposé (recollements) que cette condition est équivalente à la suivante : f applique le bord relatif de B dans A dans le bord relatif de $f(B)$ dans V.

D'autre part, tout jet de plongement (le long de l'âme W) de B dans V,

---

([2]) Dans cet exposé, tous les jets sont d'ordre 1.

i. e. tout élément de $J_W(B ; V ; f)$, pour toute application f , peut être représenté par un plongement intérieur.

Définition 7. – Soient G un fermé de V , W une variété quelconque. Deux applications f et g de W dans V sont dites G-isotopes s'il existe une application $\gamma : [0 , 1] \times V \to V$, de classe C^∞, telle que, pour tout $t \in [0 , 1]$, l'application partielle γ_t soit un difféomorphisme de V sur elle-même, coïncidant avec l'identité sur G , que γ_0 soit l'identité, et que $g = \gamma_1 \circ f$.

Dans sa thèse [1], J. CERF a démontré le théorème suivant.

THÉORÈME 1. – Soient V et W deux variétés à bord anguleux, B un tube d'âme W , f et g deux plongements intérieurs de B dans V coïncidant sur W , G un fermé de V ne rencontrant ni $f(B)$ ni $g(B)$.

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

i. Les jets de f et g le long de W sont dans la même composante connexe de $J_W \operatorname{Pl}(B ; V ; f)$;

ii. les plongements f et g de B dans V sont $(G \cup f(W))$-isotopes.

Nous ne donnons pas la démonstration ici. Remarquons seulement que (ii) $\Longrightarrow$ (i) est trivial, et que, d'autre part, chacune des conditions (i) et (ii) entraîne que f et g ont mêmes relations d'incidence.

6. Unicité des voisinages tubulaires à difféomorphismes près.

[On utilise les notations de l'exposé 1, II, 2°.]

THÉORÈME 2.

a. Soient V une variété à bord anguleux, W une sous-variété compacte de V , sans bord relatif, (N_1 , μ_1 , ψ_1) et (N_2 , μ_2 , ψ_2) deux voisinages tubulaires intérieurs de W dans V , où ψ_i est un plongement de $B_i = B(V : W ; \mu_i)$ dans V $(i = 1 , 2)$. Il existe alors un isomorphisme de fibrés $f : B_1 \to B_2$ et un difféomorphisme γ de V sur elle-même, tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi_1"'] & B_2 \arrow[d, "\psi_2"] \\ V \arrow[r, "\gamma"] & V \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

b. Si G est un fermé de V tel que $G \cap N_1 = G \cap N_2 = \emptyset$, on peut choisir γ de façon à ce qu'il soit $(G \cup W)$-isotope à l'identité.

c. Si $\mu_1 = \mu_2$, on peut prendre pour f l'identité.

Démonstration. - Soit $\Lambda = \Lambda(V ; W)$ le fibré en secteurs transverses sur W. Les métriques μ_1 et μ_2 sur les fibres de Λ définissent une réduction du groupe structural G des automorphismes de secteurs d'espace vectoriel de la fibre type Λ_0 de Λ, au groupe $\mathfrak{S}(\ell) \times O(p - \ell)$ des isométries de Λ_0. Ces deux groupes ayant même type d'homotopie, il existe un isomorphisme f de (Λ, μ_1) sur (Λ, μ_2), homotope à l'identité parmi les automorphismes de Λ.

Pour démontrer le théorème 2, on va appliquer le théorème 1 aux plongements ψ_1 et $\psi_2 \circ f$ de B_1 dans V.

Ces deux plongements coïncident sur W avec l'injection canonique de W dans V, et ils ont mêmes relations d'incidence car ils définissent des difféomorphismes de B_1 sur des voisinages N_1 et N_2 de W dans V. Montrons que leurs jets en W sont dans la même composante connexe de $J_W \mathrm{Pl}(B_1 ; V ; \psi_1)$. Ces jets sont donnés par les homomorphismes de fibrés ψ'_1 et $\psi'_2 \circ f$ de $T(V : W)$ dans $T(V)|_W$, où ψ'_i désigne l'application linéaire tangente au plongement des fibres de B_i dans V, en remarquant que, pour tout x de W, l'espace tangent à la fibre de B_i sur x n'est autre que $T_x(V : W)$. Mais ψ'_1 et ψ'_2 sont des relèvements C^∞ de $T(V : W)$ dans $T(V)|_W$, adaptés aux secteurs $\Lambda_x(V : W)$ et $\Lambda_x(V)$ pour tout point $x \in W$, et on peut passer d'un tel relèvement à un autre par leurs barycentres. D'autre part, f est homotope à l'identité parmi les automorphismes de Λ par construction, donc ψ'_1 est homotope à $\psi'_2 \circ f$ parmi les homomorphismes injectifs de $T(V : W)$ dans $T(V)|_W$ adaptés aux secteurs $\Lambda_x(V : W)$ et $\Lambda_x(V)$ pour tout point $x \in W$, ce qui montre que les jets de ψ_1 et de $\psi_1 \circ f$ sont dans la même composante connexe de $J_W \mathrm{Pl}(B_1 ; V ; \psi_1)$. On est donc dans les hypothèses du théorème 1 ce qui achève la démonstration du théorème 2.

7. Voisinages tubulaires adaptés.

Soient W une sous-variété de V, sans bord relatif, μ une réduction orthogonale du fibré $T(V : W)$ sur W, adaptée au fibré en secteurs $\Lambda = \Lambda(V : W)$; x un point de W, et $\varphi' : U' \to W$ une carte de W telle que $\varphi'(0) = x$.

Supposons que le fibré A soit trivial sur $\varphi'(U')$, et soit

$$\varphi'' : U' \times A_0 \to A|_{\varphi'(U')}$$

le difféomorphisme défini par une trivialisation adaptée à μ (A_0 est un secteur adapté de $\underset{\sim}{R}^n$). Si (N, μ, ψ) est un voisinage tubulaire intérieur de W dans V, ψ étant un plongement dans V d'un voisinage de $B = B(V : W ; \mu)$ dans A, $\psi \circ \varphi''$ est une carte représentant un voisinage de $U' \times B_0$ dans $U' \times A_0$ sur un ouvert de V contenant x. Une carte, ainsi obtenue, sera dite <u>adaptée</u> au voisinage tubulaire donné, (N, μ, ψ), de W dans V.

<u>Définition</u> 8. - Soient V une variété à bord anguleux, W une sous-variété de V, sans bord relatif, W' une sous-variété de W, sans bord relatif. Deux voisinages tubulaires intérieurs (N, μ, ψ) et (N', μ', ψ') de W et W' respectivement dans V seront dits <u>adaptés</u>, si, pour tout point x de W', il existe une carte $\varphi : U \to V$, adaptée simultanément aux deux voisinages tubulaires donnés, et telle que $\varphi(0) = x$.

PROPOSITION 1. - Soient V une variété à bord anguleux, W une sous-variété de V, sans bord relatif, et W' une sous-variété de W, sans bord relatif. Pour tout voisinage tubulaire intérieur (N, μ, ψ) de W dans V, il existe un voisinage tubulaire intérieur (N', μ', ψ') de W' dans V qui lui est adapté.

<u>Démonstration</u>. - Soit en effet (N'', μ'', ψ'') un voisinage tubulaire intérieur de W' dans W, où ψ'' est un plongement de $B'' = B(W : W' ; \mu'')$ dans W'. Le fibré $\psi''^*(A(V : W))$ est isomorphe à $\pi^*(A(V : W)|_{W'})$, où π est la projection de B'' sur W'. Soit i un isomorphisme respectant la métrique μ sur les fibres. ψ définit un relèvement de $T(V : W)|_{W'}$ dans $T(V : W')$. On munit $T(V : W')$ de la métrique $\mu' = \mu \oplus \mu''$ construite à l'aide de ce relèvement. Alors $B' = B(V : W' ; \mu')$ s'injecte naturellement dans $\pi^*(A(V : W)|_{W'})$, et, en composant cette injection avec l'isomorphisme i et avec ψ'', on a une injection i' de B' dans $B|_{N''}$, et $\psi' = \psi \circ i'$ est un plongement de B' dans V qui définit un voisinage tubulaire de W' dans V. Si ψ et ψ'' sont intérieurs, ψ' l'est aussi.

PROPOSITION 2. - Les notations étant celles de la proposition 1, supposons W compacte. Pour tout voisinage tubulaire intérieur (N', μ', ψ') de W' dans V, il existe un voisinage tubulaire intérieur (N, μ, ψ) de W dans V qui lui est adapté.

Démonstration. — Soit μ une réduction orthogonale de $A(V : W)$ qui munisse chaque fibre $A_x(V : W)$ pour $x \in W'$ de la métrique $\mu_x = \mu'_x \oplus \mu''_x$, où μ''_x est la métrique sur $A_x(W : W')$ du voisinage tubulaire de W' dans W induit par (N', μ', ψ'). Soit (N_1, μ, ψ_1) un voisinage tubulaire intérieur de W dans V, où μ est cette réduction orthogonale. Il résulte de la proposition 1 qu'il existe un voisinage tubulaire intérieur (N'_1, μ', ψ'_1) de W' dans V adapté à (N_1, μ, ψ_1). Mais d'après le théorème 2 (b) il existe un difféomorphisme γ de V sur elle-même, tel que $\psi' = \gamma \circ \psi'_1$. Alors le voisinage tubulaire (N, μ, ψ) de W dans V, défini par $\psi = \gamma \circ \psi_1$, est adapté au voisinage tubulaire (N', μ', ψ') donné.

II. Recollement.

1. Introduction.

Définition 9. — Soit V une variété à bord anguleux. On appelle face de V toute sous-variété sans bord relatif W de V, de codimension 1 et de co-indice 1.

Le problème classique de recollement est le suivant ;

Soient V_1 et V_2 deux variétés à bord anguleux, W_1 et W_2 des faces compactes de V_1 et V_2 respectivement, et f_1 un difféomorphisme de W_1 sur W_2. L'espace topologique $(V_1 \cup V_2)/f_1$, obtenu à partir de la réunion disjointe de V_1 et V_2 en identifiant x à $f_1(x)$ pour tout x de W_1, est une variété à bord topologique. On cherche à le munir d'une structure de variété à bord anguleux (de classe C^∞ comme V_1 et V_2) de façon que V_1 et V_2 s'identifient à des sous-variétés.

Remarquons tout de suite que la solution, si elle existe, n'est pas unique en général : prenons par exemple

$$V_1 = [0, 1], \quad V_1 = [1, 2], \quad W_1 = W_2 = \{1\}, \quad f(1) = 1 \quad .$$

On peut mettre sur $V = V_1 \cup V_2/f = [0, 2]$ la structure naturelle de variété du segment $[0, 2]$, mais aussi la structure transportée de la structure naturelle du segment $[0, 3]$ par l'homéomorphisme $\varphi : [0, 2] \to [0, 3]$, défini par $\varphi(x) = x$ si $x \in [0, 1]$ et $\varphi(x) = 2x - 1$ si $x \in [1, 2]$. Or ces deux structures répondent à la question, mais ne coïncident pas car φ n'est pas différentiable.

D'autre part, afin de pouvoir considérer par exemple l'espace projectif réel de dimension n comme obtenu à partir de la boule de dimension n, en identifiant les points diamétralement opposés de la sphère, nous allons poser le problème de façon un peu plus générale.

2. Le théorème de recollement.

Définition 10. – Soient V une variété à bord anguleux, W une face compacte de V, f un difféomorphisme de W sur elle-même, sans point fixe et tel que $f \circ f = I$, identité de W. L'espace topologique V/f, obtenu à partir de V en identifiant x à $f(x)$ pour tout x de W, est une variété à bord topologique. On dira qu'une structure σ de variété à bord anguleux sur l'espace V/f recolle V suivant f, si l'application canonique $\chi : V \to (V/f, \sigma)$ est une immersion, i. e. si chaque point $x \in V$ possède un voisinage N tel que $\chi|_N$ soit un plongement.

Remarque. – Dans le problème classique, on posera $V = V_1 \cup V_2$, réunion disjointe ; $W = W_1 \cup W_2$, $f(x) = f_1(x)$ si $x \in W_1$, $f(x) = f_1^{-1}(x)$ si $x \in W_2$.

THÉORÈME 3. – Soient V une variété à bord anguleux, W une face de V, f un difféomorphisme de W sur elle-même sans point fixe et tel que $f \circ f = I$.

a. Il existe sur V/f une structure σ de variété à bord anguleux qui recolle V suivant f.

b. Si σ et σ' sont deux telles structures, il existe un difféomorphisme γ de V sur elle-même, induisant l'identité sur W, et un difféomorphisme γ_1 de $(V/f, \sigma)$ sur $(V/f, \sigma')$ tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\chi"'] & V \arrow[d, "\chi"] \\ V/f \arrow[r, "\gamma_1"] & V/f \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

c. Si G est un fermé de V tel que $G \cap W = \emptyset$, on peut choisir γ $(G \cup W)$-isotope à l'identité.

Démonstration.

a. Soit (N , μ , ψ) un voisinage tubulaire de W dans V. ψ est un plongement de B dans V, où B est un fibré sur W dont la fibre est la boule-unité B_o du secteur de dimension 1 et d'indice 1 : B_o est donc le segment $[0 , 1]$; le groupe structural est trivial, et $B = W \times [0 , 1]$. Soit W_1 la variété W/f, et B_1 le fibré sur W_1 de fibre $[-1 , +1]$, de groupe structural à deux éléments, associé au revêtement à deux feuillets $W \to W_1$. B_1 est muni naturellement d'une structure de variété.

Soit ψ_1 le plongement topologique de B_1 dans V/f déduit de ψ. Il existe sur V/f une structure de variété $\sigma(\psi)$, et une seule, telle que ψ_1 soit un plongement C^∞ de B_1 dans V/f et que l'application canonique $\chi : V \to V/f$ soit une immersion. Cette structure est obtenue en recollant les ouverts $V/f - W/f = V - W$ et $\overset{\circ}{B}_1$, fibré associé à B_1 de fibre $]-1 , +1[$, par le difféomorphisme induit par ψ_1.

Remarquons que $\sigma(\psi)$ ne dépend pas de μ, mais seulement du germe de ψ le long de W.

b. Montrons d'abord que toute structure σ répondant à la question est de la forme $\sigma(\psi)$. Soit donc σ une structure de variété sur V/f qui recolle V suivant f.

La variété W/f est canoniquement plongée dans $(V/f , \sigma)$ comme sous-variété, de codimension 1 et de co-indice 0 et le fibré $T((V/f , \sigma) : W/f)$ est associé au revêtement $W \to W/f$. Si (N_1 , μ_1 , ψ_1) est un voisinage tubulaire de W/f dans $(V/f , \sigma)$, ψ_1 se relève en un plongement ψ de $W \times [0 , 1]$ dans V qui définit un voisinage tubulaire de W dans V, et on a $\sigma = \sigma(\psi)$. On peut toujours supposer ψ intérieur.

Soient maintenant $\sigma(\psi)$ et $\sigma(\psi')$ deux structures sur V/f répondant à la question. D'après le théorème 2, il existe un difféomorphisme γ de V sur elle-même tel que ψ' coïncide avec $\gamma \circ \psi$ au voisinage de W. Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[ddd, "\chi"'] & & V \arrow[ddd, "\chi"] \\
& B \arrow[ul, "\psi"'] \arrow[ur, "\psi'"] \arrow[d] & \\
& B_1 \arrow[dl, "\psi_1"'] \arrow[dr, "\psi'_1"] & \\
(V/f\ ,\ \sigma(\psi)) & & (V/f\ ,\ \sigma(\psi'))
\end{tikzcd}$$

où $B = W \times [0\ ,\ 1]$, et B_1 est le fibré sur W/f de fibre $[-1\ ,\ +1]$ associé au revêtement $W \to W/f$, se complète par un difféomorphisme γ_1 de $(V/f\ ,\ \sigma(\psi))$ sur $(V/f\ ,\ \sigma(\psi'))$, ce qui achève la démonstration du théorème.

<u>Complément au théorème</u> 3. – Dans le cas classique

$$V = V_1 \cup V_2\ , \quad W = W_1 \cup W_2\ , \quad W_i \subset V_i\ , \quad f :\ W_1 \xrightarrow{\approx} W_2 \qquad ,$$

on peut supposer que γ est l'identité sur V_1 .

<u>Démonstration</u>. – Soit ψ_0 un voisinage tubulaire de W_1 dans V_1 , choisi une fois pour toutes. Toute structure sur V/f , recollant V_1 et V_2 , est de la forme $\sigma(\psi)$, où ψ est un voisinage tubulaire de W dans V induisant ψ_0 comme voisinage tubulaire de W_1 dans V_1 . En effet, soient σ une telle structure, et $\tilde{\psi}_1 :\ W_1 \times [-1\ ,\ +1] \to V/f$ un voisinage tubulaire de $W/f \approx W_1$ dans $(V/f\ ,\ \sigma)$, le revêtement $W \to W/f$ étant trivial.

Supposons que $\tilde{\psi}_1(W_1 \times [0\ ,\ 1]) \subset \chi(V_1)$. Alors $\tilde{\psi}_1$ se relève en un voisinage tubulaire $\tilde{\psi}_0 :\ (W_1 \times [0\ ,\ 1]) \to V_1$. Les plongements ψ_0 et $\tilde{\psi}_0$ ont leurs jets dans la même composante connexe de $J_{W_1}(W_1 \times [0\ ,\ 1]\ ;\ V_1)$, donc il en est de même de leurs images dans $J_{W_1}(W_1 \times [0\ ,\ 1]\ ;\ (V/f\ ,\ \sigma))$. D'après le théorème 1, il existe un difféomorphisme $\tilde{\gamma}$ de $(V/f\ ,\ \sigma)$ sur elle-même tel que

$\chi \circ \psi_0 = \tilde{\gamma} \circ \tilde{\psi}_{1|W_1 \times (0,1)}$, et $\tilde{\gamma}_1$ conserve $\chi(V_1)$. Alors le voisinage tubulaire

$$\psi_1 = \tilde{\gamma} \circ \tilde{\psi}_1 : \ W_1 \times (-1 , +1) \to (V/f , \sigma) \qquad ,$$

se relève en un voisinage tubulaire $\psi : W \times (0 , 1) \to V$ qui induit ψ_0 dans V_1 ; et $\sigma = \sigma(\psi)$.

Si $\sigma(\psi)$ et $\sigma(\psi')$ sont deux structures sur V/f, recollant V_1 et V_2, et si ψ et ψ' coïncident dans V_1, le difféomorphisme $\gamma : V \to V$, construit dans la démonstration du théorème 3, est astreint à la seule condition $\psi' = \gamma \circ \psi$. On peut donc prendre γ induisant l'identité sur V_1.

III. Application : somme connexe.

1. Définition de la somme connexe.

On notera D^n la boule-unité fermée de $\mathbb{R}^n$, et $\overset{\circ}{D}{}^n$ la boule-unité ouverte.

Définition 11. - Soient V_1 et V_2 deux variétés orientées de dimension n. On appelle somme connexe de V_1 et V_2 toute variété X obtenue de la façon suivante : on prend deux plongements intérieurs φ_1 et φ_2 de D^n dans V_1 et V_2 respectivement, tels que φ_1 préserve les orientations et que φ_2 les renverse. On pose $\hat{V}_i = V_i - \varphi_i(\overset{\circ}{D}{}^n)$, variété à bord muni de l'orientation induite par celle de V_i, dont $W_i = \varphi_i(S^{n-1})$ est une face. $f = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ est un difféomorphisme de W_1 sur W_2, et $X = \hat{V}_1 \cup \hat{V}_2/f$, muni d'une structure de variété recollant $\hat{V}_1$ et $\hat{V}_2$ et de l'orientation telle que les plongements $\chi_i : \hat{V}_i \to X$ préservent les orientations.

Cette notion a été introduite par SEIFERT et THRELFALL, et utilisée par MILNOR, etc.

THÉORÈME 4. - Soient V_1 et V_2 deux variétés orientées connexes non vides de dimension $n > 0$. Il existe alors une somme connexe X de V_1 et V_2, et si X et X' sont deux telles sommes connexes, il existe un difféomorphisme de X sur X' qui préserve l'orientation.

LEMME 1.

a. Soient V une variété orientée connexe de dimension n, φ et φ' deux plongements intérieurs de D^n dans V préservant l'orientation. Il existe alors un difféomorphisme γ de V sur elle-même tel que $\varphi' = \gamma \circ \varphi$.

b. De plus, si G est un fermé de V tel que $\varphi(D^n)$ et $\varphi'(D^n)$ soient contenus dans une même composante connexe de $V - G$, on peut choisir γ $(G \cup bV)$-isotope à l'identité.

<u>Démonstration</u>. — Montrons d'abord qu'il existe un difféomorphisme γ_1 de V sur elle-même tel que $\gamma_1(\varphi(0)) = \varphi'(0)$.

Considérons la relation d'équivalence entre x et $y \in V - bV - G$: il existe γ $(G \cup bV)$-isotope à l'identité tel que $\gamma(x) = y$. On montre aisément que les classes d'équivalences sont ouvertes, donc si x et y sont dans la même composante connexe de $V - bV - G$, $x \sim y$. Il suffit, pour cela, que x et y soient dans $V - bV$ et dans la même composante connexe de $V - G$, ce qui est le cas par hypothèse pour $x = \varphi(0)$ et $y = \varphi'(0)$.

Maintenant $\gamma_1 \circ \varphi$ et φ' sont deux plongements intérieurs de D^n dans V dont les images ne rencontrent pas G, appliquant 0 en y. Ils seront G-isotopes en vertu du théorème 1, si leurs jets en 0 sont dans la même composante connexe de $J_0\,Pl(D^n ; V ; \varphi')$. Mais ces jets sont donnés par l'application linéaire tangente $R^n \to T_y(V)$, et $J_0\,Pl$ s'identifie à l'espace des isomorphismes $R^n \to T_y(V)$. Or deux tels isomorphismes préservant l'orientation sont dans la même composante connexe. On peut donc appliquer le théorème 1 ce qui démontre le lemme.

<u>Remarque</u>. — Ce lemme s'applique également dans le cas où φ et φ' renversent tous deux l'orientation.

<u>Démonstration du théorème 4</u>. — L'existence de la somme connexe est immédiate à partir du théorème 3 (a) : il suffit d'effectuer la construction décrite dans la définition, et de vérifier qu'il existe une orientation, et une seule, sur X recollant les orientations de V_1 et V_2.

Soient X et X' deux sommes connexes, définies à partir de plongements φ_i et φ'_i de D^n dans V_i. D'après le lemme 1, il existe des difféomorphismes γ_i des V_i dans elles-mêmes tels que $\varphi'_i = \gamma_i \circ \varphi_i$, et qui induisent des difféomorphismes γ_i de $\hat{V}_i = V_i - \varphi_i(\overset{o}{D}{}^n)$ sur $\hat{V}'_i = V_i - \varphi'_i(\overset{o}{D}{}^n)$, qui forment avec $f = \varphi_2|_{S^{n-1}} \circ \varphi_1^{-1}$ et $f' = \varphi'_2|_{S^{n-1}} \circ \varphi'^{-1}_1$ un diagramme commutatif. Les γ_i définissent donc un difféomorphisme γ_1 de X sur une variété X'', recollant $\hat{V}'_1$ et $\hat{V}'_2$ suivant f''. Mais, d'après le théorème 3 (b), X' et X'' sont difféomorphes, ce qui démontre le théorème 4.

Remarque. - On peut supposer (lemme 1 (b)) que les γ_i induisent l'identité sur bV_i. Alors γ_1 induira l'identité sur $bX = \cup \chi(bV_i)$, et d'après le théorème 2 (b), on peut supposer également que $\gamma_2 : X' \xrightarrow{\approx} X''$ induit l'identité sur bX. Il en résulte qu'il existe un difféomorphisme γ de X sur X', induisant l'identité sur $bV_1 \cup bV_2$ plongé par χ dans X et X'.

2. Propriétés de l'opération somme connexe.

Soit $\mathfrak{M}_n$ l'ensemble des classes à un difféomorphisme près, de variétés à bord anguleux de dimension n, orientées, connexes non vides.

L'opération somme connexe définit une application de $\mathfrak{M}_n \times \mathfrak{M}_n \to \mathfrak{M}_n$ que l'on notera $+$.

Propriétés.

1° S^n est élément neutre.

2° L'opération est commutative.

3° L'opération est associative.

4° Les parties suivantes sont stables :

a. ensemble des classes de variétés compactes

b. ensemble des classes de variétés à bord lisse

c. ensemble des classes de variétés sans bord.

Démonstration.

1° On peut prendre comme plongement de D^n dans S^n un isomorphisme de D^n sur un hémisphère ; faire la somme connexe avec S^n revient alors à enlever un disque et à en rajouter un autre, par un difféomorphisme de S^{n-1} sur elle-même qui se prolonge à D^n :

2° Soit X une somme connexe de V_1 et V_2 réalisée à l'aide des plongements φ_1 et φ_2 de D^n ; soit $\sigma : D^n \to D^n$, difféomorphisme renversant l'orientation ; alors $\varphi_2 \circ \sigma$ préserve les orientations et $\varphi_1 \circ \sigma$ les renverse. X est également somme connexe de V_2 et V_1, réalisée par les plongements

$$\varphi_2 \circ \sigma \quad \text{et} \quad \varphi_1 \circ \sigma \quad .$$

3° Soient V_1, V_2 et V_3 trois variétés orientées de dimension n ; soient φ_2 et ψ_2 deux plongements de D^n dans V_2 tels que φ_2 renverse les orientations et ψ_2 les préserve, et tels que $\varphi_2(D^n) \cap \psi_2(D^n) = \emptyset$.

Si φ_1 et ψ_3 sont des plongements de D^n dans V_1 et V_3 respectivement, une variété X, obtenue en recollant $V_2 - \varphi_2(\overset{\circ}{D^n}) - \psi_2(\overset{\circ}{D_n})$ à $\hat{V}_1 \cup \hat{V}_3$, realise simultanément $(V_1 + V_2) + V_3$ et $V_1 + (V_2 + V_3)$.

4° Les propriétés (4) viennent de ce que le bord de la somme connexe de V_1 et V_2 est la réunion disjointe des bords de V_1 et de V_2.

3. Propriétés topologiques de la somme connexe.

Soient V_1 et V_2 deux variétés orientées de dimension n, connexes non vides, X une somme connexe de V_1 et V_2 réalisée par des plongements $\varphi_i : D^n \to V_i$. Les plongements φ_i définissent un plongement $\varphi : S^{n-1} \to X$. Alors

$$X/\varphi(S^{n-1}) = V_1/\varphi_1(D^n) \vee V_2/\varphi_2(D^n)$$

est homéomorphe à $V_1 \vee V_2$, et a même type d'homotopie que

$$X \underset{\varphi}{\cup} D^n = V_1 \cup V_2/\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$$

car $X/\varphi(S^{n-1})$ se déduit $X \underset{\varphi}{\cup} D^n$ en contractant en un point le disque D^n. Soit α l'application canonique de X sur $X/\varphi(S^{n-1}) \approx V_1 \vee V_2$.

PROPOSITION 3. - Soient V_1 et V_2 des variétés orientées, sans bord, connexes, compactes, non vides ; X leur somme connexe. Alors

$$H^*(X) = H^*(V_1 \vee V_2)/(u_1 - u_2) \quad ,$$

u_1 et u_2 désignant les classes fondamentales de V_1 et V_2 respectivement et l'identification étant donnée par α.

Démonstration. - Considérons la suite exacte

$$H^p(X \cup D^n, X) \to H^p(X \cup D^n) \xrightarrow{\alpha^*} H^p(X) \to H^{p+1}(X \cup D^n, X)$$

$$H^p(D^n, S^{n-1}) \times H^p(V_1 \vee V_2) \quad .$$

Pour $p = n$, $H^p(X \cup D^n, X) = \underset{\sim}{Z}$, le générateur ξ a pour image, dans $H^p(V_1 \vee V_2)$, $u_1 - u_2$ car φ_1 préserve l'orientation et φ_2 la renverse. Pour $p < n$, les deux termes extrêmes de la suite exacte écrite sont nuls sauf dans le cas $p = n - 1$ où $H^{p+1}(X \cup D^n, X) \neq 0$, mais s'envoie injectivement dans le suivant. Donc pour $p < n$, α^* est un isomorphisme de $H^p(V_1 \vee V_2)$ sur $H^p(X)$. Ceci démontre la proposition 3.

Etudions maintenant le fibré tangent à X.

<u>Notations</u>. - Soient A_1 et A_2 deux espaces $B_1 \subset A_1$, $B_2 \subset A_2$ fermés, $f : B_1 \to B_2$ un homéomorphisme, $E_1 \to A_1$, $E_2 \to A_2$ deux fibrés, F un isomorphisme de $E_1|_{B_1}$ sur $E_2|_{B_2}$ au-dessus de f. Alors $(E_1 \cup E_2)/F$ est un fibré sur $A_1 \cup A_2/f$, dont la classe dépend de la classe d'homotopie de F (parmi les isomorphismes de $E_1|_{B_1}$ sur $E_2|_{B_2}$ au-dessus de f).

Soient E_1 et E_2 des fibrés $\underset{\sim}{R}$-vectoriels orientés, de même dimension, sur A_1 et A_2, a_1 et a_2 des points de base dans A_1 et A_2; on notera $E_1 \underline{\vee} E_2$ un fibré $E_1 \cup E_2/F$ sur $A_1 \vee A_2$, où F est un isomorphisme de $E_1|_{a_1}$ sur $E_2|_{a_2}$ préservant l'orientation. La classe de ce fibré ne dépend pas du choix de F.

Si E est un fibré $\underset{\sim}{R}$-vectoriel orienté, on notera E^- le même fibré muni de l'orientation opposée.

Enfin, on notera $\underset{\sim}{R}^k_A$, ou simplement $\underset{\sim}{R}^k$, le fibré trivial de fibre $\underset{\sim}{R}^k$ sur A. Remarquons que $\underset{\sim}{R}^k_A \approx \underset{\sim}{R}^{k-}_A$ pour tout $k > 0$.

PROPOSITION 4. - Soient V_1 et V_2 deux variétés orientées connexes non vides, X leur somme connexe. Alors

$$\underset{\sim}{R}_X \oplus T(X) \approx \underset{\sim}{R}_X \oplus \alpha^*(T(V_1) \underline{\vee} T(V_2)) \quad .$$

<u>Démonstration</u>. - Posons $T_i = T(V_i)$ et $\overline{f} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(D^n) \to \varphi_2(D^n)$. Alors, $\overline{f}' : T_1|_{\varphi_1(D^n)} \to T_2|_{\varphi_2(D^n)}$ est un isomorphisme renversant l'orientation, et $-I \oplus \overline{f}'$ est un isomorphisme respectant l'orientation de $(\underset{\sim}{R} \oplus T_1)|_{\varphi_1(D^n)}$ sur $(\underset{\sim}{R} \oplus T_2)|_{\varphi_2(D^n)}$, donc

$$(\underset{\sim}{R} \oplus T_1) \cup (\underset{\sim}{R} \oplus T_2)/(-I \oplus \overline{f}') \simeq (\underset{\sim}{R} \oplus T_1) \veebar (\underset{\sim}{R} \oplus T_2) = \underset{\sim}{R} \oplus (T_1 \veebar T_2)$$

au-dessus de l'équivalence d'homotopie $(V_1 \cup V_2)/\overline{f} \simeq V_1 \vee V_2$. Posons $W_i = \varphi_i(S^{n-1})$, et $f = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : W_1 \to W_2$. Alors $T_{i|W_i} = \underset{\sim}{R} \oplus T(W_i)$, en trivialisant le fibré normal à W_i dans V_i par les vecteurs sortants de $\varphi_i(D^n)$, i. e. rentrant dans $\hat{V}_i$, et

$$\overline{f}_{|W_1} = I \oplus f' : \underset{\sim}{R} \oplus T(W_1) \to \underset{\sim}{R} \oplus T(W_2) \quad .$$

α s'identifiant, par l'équivalence d'homotopie indiquée plus haut, à l'injection de $X = \hat{V}_1 \cup \hat{V}_2/f$ dans $V_1 \cup V_2/\overline{f}$, on a en posant $\hat{T}_i = T(\hat{V}_i) = T_{i|\hat{V}_i}$:

(1) $\underset{\sim}{R} \oplus \alpha^*(T_1 \veebar T_2) = \alpha^*(\underset{\sim}{R} \oplus T_1 \veebar T_2) = (\underset{\sim}{R} \oplus \hat{T}_1) \cup (\underset{\sim}{R} \oplus \hat{T}_2)/(-I \oplus (I \oplus f'))$.

D'autre part,

$$T(X) = (\hat{T}_1 \cup \hat{T}_2)/(-I \oplus f') \quad ,$$

et

(2) $$\underset{\sim}{R} \oplus T(X) = (\underset{\sim}{R} \oplus \hat{T}_1) \cup (\underset{\sim}{R} + \hat{T}_2)/I \oplus -I \oplus f' \quad .$$

Mais les isomorphismes $-I \oplus I$ et $I \oplus -I$ de $\underset{\sim}{R}^2_{W_1}$ sur $R^2_{W_2}$ sont homotopes, et il en résulte que les fibrés (1) et (2) sont isomorphes, ce qui démontre la proposition 4.

Remarque. - Le fait de stabiliser par un fibré trivial est essentiel ; l'exemple de deux tores de dimension 2 montre, en effet, que la somme connexe de deux variétés parallélisables n'est pas parallélisable en général.

Les propositions 3 et 4 permettent de décrire les classes de Stiefel-Whitney et Pontrjagin de la somme connexe de deux variétés.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CERF (Jean). - Topologie de certains espaces de plongements, Bull. Soc. math. France, t. 89, 1961, p. 227-380 (Thèse Sc. math. Paris 1960).