CHRISTIAN HOUZEL

Géométrie analytique locale, III

Séminaire Henri Cartan, tome 13, nº 2 (1960-1961), exp. nº 20, p. 1-25
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1960-1961__13_2_A7_0>

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE LOCALE, III

par Christian HOUZEL

A. Dimension d'un espace analytique.

Rappelons que l'on appelle dimension d'un germe analytique (X , x) la dimension au sens de KRULL de son anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$; on dit aussi que c'est la dimension de l'espace X au point x. On dit qu'un germe analytique (X , x) est équidimensionnel de dimension n si son anneau local l'est, c'est-à-dire si, pour tout idéal premier minimal $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_{X,x}$, on a $\dim(\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{p}) = n$; ceci signifie que toutes les composantes irréductibles du germe (X , x) (c'est-à-dire les germes de parties analytiques irréductibles maximaux) ont toutes la même dimension n. Si (X , x) est équidimensionnel de dimension n, on dit que l'espace analytique X est équidimensionnel de dimension n en x.

THÉORÈME 1. - Soit X un espace analytique sur un corps k, valué complet et non discret. Si X est équidimensionnel de dimension n en un point x, il existe un voisinage de x en tout point duquel X est équidimensionnel de dimension n.

Soit $(\mathfrak{p}_i)$ la famille des idéaux premiers minimaux de $\mathcal{O}_{X,x}$; $\bigcap \mathfrak{p}_i$ est nilpotent. Il existe un voisinage W de x dans lequel on peut construire des Idéaux de type fini $\mathfrak{I}_i$ tels que $(\mathfrak{I}_i)_x = \mathfrak{p}_i$ et que $\bigcap \mathfrak{I}_i$ soit nilpotent. Pour tout i, soit W_i le sous-espace analytique fermé de W défini par l'Idéal $\mathfrak{I}_i$. On a

$$|W| = \bigcup |W_i| \quad ,$$

et si $y \in W$,

$$\dim(X , y) = \dim(W , y) = \sup(\dim(W_i , y)) \quad ,$$

car $\bigcap (\mathfrak{I}_i)_y$ est nilpotent, donc tout idéal premier de $\mathcal{O}_{X,y}$ contient l'un des $(\mathfrak{I}_i)_y$. On voit ainsi que l'on peut se ramener au cas où X est intègre en x, en remplaçant X par l'un des W_i.

Supposons donc X intègre de dimension n en x. On sait qu'il existe un voisinage V de x dans X, un voisinage S de 0 dans $\underline{E}^n$, un morphisme

f de V dans S tel que $f(x) = 0$ et une $\mathcal{O}_S$-Algèbre finie $\mathcal{Q}$ telle que V soit S-isomorphe à $\mathrm{Specan}(\mathcal{Q})$ (exposé 19, proposition 6, corollaire 1) ; de plus l'homomorphisme $\mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^n,o} \to \mathcal{Q}_o \underset{\sim}{=} \mathcal{O}_{X,x}$ est injectif (exposé 18, théorème 1, corollaire 3(b)) ; il en résulte que $\mathcal{Q}_o$ est sans torsion sur $\mathcal{O}_{S,o}$ puisqu'il est intègre. Cette propriété va subsister dans un voisinage de 0. En effet :

LEMME 1. - Soit S un espace annelé dont le faisceau structural est cohérent et à fibres $\mathcal{O}_{S,s}$ intègres. Le faisceau de torsion d'un $\mathcal{O}_S$-Module cohérent est cohérent.

Car si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_S$-Module de type fini, son faisceau de torsion est le noyau de l'homomorphisme canonique $\mathcal{M} \to \check{\check{\mathcal{M}}}$ (bidual). Ceci se démontre sur les fibres, et on est ramené au cas d'un module de type fini sur un anneau intègre. Si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{O}_S$ sont cohérents, $\check{\check{\mathcal{M}}}$ l'est aussi, d'où la propriété.

En tenant compte de la proposition 6 de l'exposé 19, le théorème résulte alors du

LEMME 2. - Soit A une algèbre analytique intègre et soit B une A-algèbre finie et sans torsion. Pour tout idéal maximal $\mathfrak{n}$ de B, l'anneau local $B_{\mathfrak{n}}$ est équidimensionnel de dimension $\dim(A)$.

Comme on sait que pour tout idéal maximal $\mathfrak{n}$ de B, le localisé $B_{\mathfrak{n}}$ est encore fini et sans torsion sur A (exposé 19, proposition 6, corollaire 2), on peut supposer que B est local (en le remplaçant par l'un des $B_{\mathfrak{n}}$). Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier minimal de B ; posons $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap A$; c'est un idéal premier de A. L'anneau local $A_{\mathfrak{q}}$ est intègre et son idéal maximal est $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}}$; $B_{\mathfrak{p}}$ est fini et sans torsion sur $A_{\mathfrak{q}}$, et $\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}} \cap A_{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}}$, donc $\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}$ est maximal (théorème de Cohen-Seidenberg) ; comme il est aussi minimal, ceci prouve que $\dim(B_{\mathfrak{p}}) = 0$, et par suite $\dim(A_{\mathfrak{q}}) = 0$. Donc $A_{\mathfrak{q}}$ est un corps et $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap A = 0$. Alors $B/\mathfrak{p}$ est fini sur A et l'homomorphisme $A \to B/\mathfrak{p}$ est injectif, ce qui entraîne $\dim(B/\mathfrak{p}) = \dim(A)$.

COROLLAIRE 1. - Soit X un espace analytique. Pour tout entier n, désignons par X_n l'ensemble des points $x \in X$ tels que $\dim(X, x) \geqslant n$; c'est un sous-ensemble analytique fermé de X. Pour qu'un point x soit intérieur à X_n, il faut et il suffit que pour tout idéal premier minimal $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_{X,x}$ on ait $\dim(\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{p}) \geqslant n$.

La question étant locale, plaçons-nous au voisinage d'un point $x \in X$ et désignons par (p_i) la famille des idéaux premiers minimaux de $\mathcal{O}_{X,x}$. Pour tout i, soit

$$n_i = \dim(\mathcal{O}_{X,x}/p_i) \quad .$$

Comme au début de la démonstration du théorème, on utilise un voisinage W de x tel que

$$|W| = \cup |W_i|$$

et

$$\dim(X , y) = \sup(\dim(W_i , y)) \quad \text{pour tout} \quad y \in W \quad ,$$

où W_i est pour chaque i un sous-espace analytique fermé de W tel que $(|W_i| , x) = W(p_i)$; de plus on peut, d'après le théorème, choisir W assez petit pour que $\dim(W_i , y) = n_i$ quel que soit $y \in W_i$. On voit donc que pour tout $y \in W$, on a

$$\dim(X , y) = \sup_{y \in W_i} n_i$$

et par suite

$$X_n \cap |W| = \bigcup_{n_i \geq n} |W_i| \quad ;$$

ceci prouve le corollaire.

COROLLAIRE 2. - <u>Supposons le corps de base</u> k <u>algébriquement clos. Pour tout entier</u> n <u>et pour tout point</u> $x \in X$, <u>le fermé</u> $(X_n)_x$ <u>de</u> $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ <u>qui correspond à</u> X_n <u>est la réunion des composantes irréductibles de</u> $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ <u>dont la dimension est</u> $\geq n$.

On emploie ici les notations de l'exposé 19, n° 4.

<u>Codimension</u>. - Soient (X , x) un germe analytique, et (Y , x) un sous-germe analytique irréductible (c'est-à-dire tel que $\mathcal{J}(Y , x) = \mathrm{Ker}(\mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{Y,x})$ soit un idéal primaire ; si k est algébriquement clos, ceci signifie que $(|Y| , x)$ est un germe de partie analytique irréductible (cf. exposé 19, n° 4). On appelle <u>codimension</u> de (Y , x) dans (X , x) la <u>hauteur</u> de l'idéal premier

$p = r(J(Y\ ,\ x))$ correspondant, c'est-à-dire la dimension du localisé $(\mathcal{O}_{X,x})_p$ (si k est algébriquement clos, p est défini par $W(p) = (|Y|\ ,\ x)$).

Cette codimension vaut

$$\mathrm{ht}(p) = \sup_i(\dim(\mathcal{O}_{X,x}/p_i) - \dim(\mathcal{O}_{X,x}/p)) \qquad ,$$

c'est-à-dire

$$\sup_i(\dim(X_i\ ,\ x) - \dim(Y\ ,\ x)) \qquad ,$$

où les p_i sont les idéaux premiers minimaux de $\mathcal{O}_{X,x}$ contenus dans p , et les $(X_i\ ,\ x)$ les sous-germes analytiques de $(X\ ,\ x)$ correspondants (si k est algébriquement clos, les $(|X_i|\ ,\ x)$ sont les composantes irréductibles de $(X\ ,\ x)$ qui contiennent $(|Y|\ ,\ x)$). En effet $\mathcal{O}_{X,x}$ est quotient d'un anneau régulier, donc il satisfait à la condition des chaînes d'idéaux premiers de NAGATA qui dit que la longueur commune des chaînes saturées d'idéaux premiers joignant p à un idéal premier $p' \subset p$ est $\dim(\mathcal{O}_{X,x}/p') - \dim(\mathcal{O}_{X,x}/p)$ (cf. [4], proposition 6).

Considérons maintenant un sous-germe analytique quelconque $(Y\ ,\ x)$ de $(X\ ,\ x)$. Sa codimension dans $(X\ ,\ x)$ est par définition la borne inférieure des codimensions des sous-germes analytiques irréductibles de $(X\ ,\ x)$ contenus dans $(Y\ ,\ x)$. Si $(X\ ,\ x)$ est équidimensionnel, on voit que la codimension de $(Y\ ,\ x)$ dans $(X\ ,\ x)$ est $\dim(X\ ,\ x) - \dim(Y\ ,\ x)$; mais si $(X\ ,\ x)$ n'est pas équidimensionnel, la codimension de $(Y\ ,\ x)$ peut être strictement inférieure à ce nombre.

Soit Y un sous-espace analytique d'un espace analytique X ; si $x \in Y$, on désigne par $\mathrm{codim}_x(Y\ ;\ X)$ la codimension de $(Y\ ,\ x)$ dans $(X\ ,\ x)$; c'est la codimension de Y au point x . Si le corps de base k est algébriquement clos, la codimension de Y ne dépend que de l'ensemble analytique sous-jacent $|Y|$; on pose : $\mathrm{codim}_x(|Y|\ ;\ X) = \mathrm{codim}_x(Y\ ;\ X)$; pour tout sous-ensemble analytique T de X et pour tout point $x \in T$, on a

$$\mathrm{codim}_x(T\ ;\ X) = \inf_{p \in T_x} \dim(\mathcal{O}_{X,x})_p$$

(exposé 19, théorème 1, corollaire 1), c'est-à-dire

$$\mathrm{codim}_x(T\ ;\ X) = \mathrm{codim}(T_x\ ;\ \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})) \qquad .$$

LEMME 3. - Soit X un espace analytique, et soit Y un sous-espace analytique de X, irréductible en un point $x \in Y$. Il existe un voisinage ouvert de x dans Y dans lequel la codimension de Y dans X est constante.

On peut évidemment supposer Y intègre en x ; soit (X', x) une composante irréductible de (X, x) contenant (Y, x) et telle que

$$\operatorname{codim}_x(Y ; X) = \dim(X', x) - \dim(Y, x) \quad .$$

Il existe un voisinage U de x dans X en tout point y duquel les propriétés suivantes sont vraies :

- (X', y) est équidimensionnel de dimension $n = \dim(X', y)$ (théorème 1) ;
- (X', y) est réunion de composantes irréductibles de (X, y) (grâce à la propriété précédente) ;
- $(Y, y) \subset (X', y)$, et $\dim(Y, y) = \dim(Y, x)$ si $y \in Y \cap U$.

Alors, pour $y \in Y \cap U$, on a

$$\operatorname{codim}_y(Y ; X) = \operatorname{codim}_y(Y ; X') = \dim(X', y) - \dim(Y, y)$$

qui est constant.

COROLLAIRE 1. - Soient X un espace analytique, Y un sous-espace analytique fermé et s un entier positif. L'ensemble $D_s(Y)$ des points $y \in Y$ tels que $\operatorname{codim}_y(Y ; X) \leq s$ est un sous-ensemble analytique fermé.

La question est locale ; on se place au voisinage d'un point x de Y. Considérons les sous-germes intègres (Y_i, x) de (X, x) définis par les idéaux premiers minimaux de $\mathcal{O}_{X,x}$ parmi ceux qui contiennent $J(Y, x)$ ("composantes irréductibles" de (Y, x)). Il existe un voisinage U de x tel que, pour tout $y \in Y \cap U$, l'idéal $\bigcap J(Y_i, y)$ soit nilpotent, et tel que l'on ait

$$\operatorname{codim}_y(Y_i ; X) = \operatorname{codim}_x(Y_i ; X) = c_i$$

pour $y \in Y_i \cap U$ quel que soit i (d'après le lemme 1). On constate alors sans peine que

$$(D_s(Y), x) = \bigcup_{c_i \leq s} Y_i \quad ;$$

ce qui prouve le résultat.

Si le corps de base k est algébriquement clos, l'ensemble $D_s(Y)$ ne dépend que de l'ensemble analytique $|Y|$ sous-jacent à Y. On pose $D_s(|Y|) = D_s(Y)$. Si S est un préschéma, par exemple le spectre premier d'une algèbre analytique, et si T est une partie fermée de S, nous désignerons encore, pour tout entier s, par $D_s(T)$ l'ensemble des points $x \in T$ tels que $\operatorname{codim}_x(T ; S) \leq s$. Avec ces notations et celles de l'exposé 19, n° 4. on a le

COROLLAIRE 2. - Soient X un espace analytique, T une partie analytique fermée de X et s un entier positif. Si le corps de base k est algébriquement clos, pour tout point $x \in T$ on a $D_s(T)_x = D_s(T_x)$, c'est-à-dire que pour tout idéal premier p de $\mathcal{O}_{X,x}$ les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $W(p) \subset (D_s(T) , x)$;

(ii) $\operatorname{codim}_p(T_x ; \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})) \leq s$.

B. Propriétés des faisceaux cohérents.

1. Support d'un faisceau cohérent.

PROPOSITION 1. - Soit X un espace annelé. Considérons un $\mathcal{O}_X$-Module $\mathcal{E}$ de présentation finie ; son support est l'ensemble sous-jacent au sous-espace annelé fermé défini par l'Idéal $\operatorname{Ann}(\mathcal{E})$ annulateur de $\mathcal{E}$:

$$\operatorname{Supp}(\mathcal{E}) = \operatorname{Supp}(\mathcal{O}_X/\operatorname{Ann}(\mathcal{E})) \quad .$$

Si $\mathcal{E}$ est cohérent, $\operatorname{Ann}(\mathcal{E})$ est de type fini et le sous-espace annelé correspondant est de présentation finie.

En effet $\operatorname{Ann}(\mathcal{E})$ est par définition le noyau de l'homomorphisme canonique

$$\mathcal{O}_X \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E} , \mathcal{E}) \quad ;$$

donc si $\mathcal{E}$ est de présentation finie,

$$(\operatorname{Ann}(\mathcal{E}))_x = \operatorname{Ann}(\mathcal{E}_x) \quad \text{pour tout point } x \in X \quad ,$$

car

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E} , \mathcal{E})_x \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{E}_x , \mathcal{E}_x) \quad .$$

Les points x du support de $\mathcal{E}$ sont ceux en lesquels $\mathcal{E}_x \neq 0$ c'est-à-dire $\mathrm{Ann}(\mathcal{E})_x = \mathrm{Ann}(\mathcal{E}_x) \neq \mathcal{O}_{X,x}$. De plus, si $\mathcal{E}$ est cohérent, $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ est aussi cohérent (cf. [3], chapître 1, § 2, proposition 6), donc $\mathrm{Ann}(\mathcal{E})$ est de type fini.

COROLLAIRE. - Soit X un espace annelé. Considérons un homomorphisme $u : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ de $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents. Désignons par $S(u)$ (resp. $S'(u)$, $S''(u)$) le complémentaire du plus grand ouvert U tel que $u|U$ soit un isomorphisme (resp. injectif, surjectif) ; c'est l'ensemble sous-jacent à un sous-espace annelé fermé de présentation finie.

Car

$$S(u) = S'(u) \cup S''(u)$$

et

$$S'(u) = \mathrm{Supp}(\mathrm{Ker}(u)) \ , \quad S''(u) = \mathrm{Supp}(\mathrm{Coker}(u)) \qquad ;$$

comme $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont cohérents, il en est de même de $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Coker}(u)$ ([3], théorème 2).

PROPOSITION 2. - Soit X un espace analytique sur un corps k valué complet non discret et algébriquement clos. Considérons un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent $\mathcal{E}$ et un point $x \in X$; on a $\mathrm{Supp}(\mathcal{E})_x = \mathrm{Supp}(\mathcal{E}_x)$ dans $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$. Autrement dit, pour tout idéal premier p de $\mathcal{O}_{X,x}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $W(p) \subset (\mathrm{Supp}(\mathcal{E}), x)$;

(ii) $(\mathcal{E}_x)_p \neq 0$.

(Pour les notations $\mathrm{Supp}(\mathcal{E})_x$ et $W(p)$, on renvoie à l'exposé 19, n° 4.)

D'après la proposition 1, on a

$$(\mathrm{Supp}(\mathcal{E}), x) = W(\mathrm{Ann}(\mathcal{E})_x) = W(\mathrm{Ann}(\mathcal{E}_x)) \qquad ,$$

donc

$$\mathrm{Supp}(\mathcal{E})_x = V(\mathrm{Ann}(\mathcal{E}_x)) = \mathrm{Supp}(\mathcal{E}_x)$$

grâce au corollaire 1 du théorème 1, exposé 19 (Nullstellensatz).

Nous allons donner des variantes de cet énoncé.

PROPOSITION 2'. - Soit X un espace analytique (k algébriquement clos). Considérons un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent $\mathcal{E}$. Pour tout $\mathcal{O}_X$-Idéal $\mathcal{J}$ les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\operatorname{Supp}(\mathcal{E}) \subset \operatorname{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J})$;

(ii) Pour tout point $x \in X$, il existe un voisinage U de x et un entier n tels que $\mathcal{J}^n \mathcal{E}|U = 0$.

Ceci résulte de la proposition 1 et du corollaire 3 du théorème 1, exposé 19.

PROPOSITION 2". - Avec les mêmes notations, pour toute section f de $\mathcal{O}_X$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\operatorname{Supp}(\mathcal{E}) \subset W(f) = \operatorname{Supp}(\mathcal{O}_X/(f))$, ensemble des points x tels que $f(x) = 0$;

(ii) Pour tout $x \in X$, il existe un entier n_x tel que $f_x^n \mathcal{E}_x = 0$ dès que $n \geq n_x$.

COROLLAIRE. - Soit X un espace analytique (k algébriquement clos). Considérons un homomorphisme $u : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ de $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents et un point $x \in X$; on a alors, avec les notations du corollaire de la proposition 1 et celles de l'exposé 19, n° 4,

$$S(u)_x = S(\tilde{u}_x) , \quad S'(u)_x = S'(\tilde{u}_x) , \quad S''(u)_x = S''(\tilde{u}_x) \quad ,$$

$\tilde{u}_x$ désignant l'homomorphisme $\tilde{\mathcal{M}}_x \to \tilde{\mathcal{N}}_x$ de faisceaux cohérents sur $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ induit par u. Autrement dit, pour tout idéal premier p de $\mathcal{O}_{X,x}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $W(p) \not\subset (S(u), x)$ (resp. $W(p) \not\subset (S'(u), x)$, resp. $W(p) \not\subset (S''(u), x)$) ;

(ii) $(u_x)_p : (\mathcal{M}_x)_p \to (\mathcal{N}_x)_p$ est un isomorphisme (resp. est injectif, resp. est surjectif).

2. Ensemble singulier d'un faisceau cohérent.

PROPOSITION 3. - Soient X un espace annelé en anneaux locaux, $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_X$-Module de type fini et n un entier ≥ 1. Pour que $\mathcal{E}$ soit localement libre de rang n, il faut et il suffit que $\Lambda^n \mathcal{E}$ soit inversible (c'est-à-dire localement libre de rang 1).

Il est évident que si $\mathcal{E}$ est localement libre de rang n, $\Lambda^n \mathcal{E}$ est inversible, car $\Lambda^n \mathcal{O}_X^n$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{O}_X$. Prouvons la réciproque ;

si $\Lambda^n \mathcal{E}$ est inversible, pour tout $x \in X$, la fibre réduite

$$\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_x/\mathfrak{m}_x\, \mathcal{E}_x = \mathcal{E}_x \otimes \varkappa(x)$$

est de rang n sur le corps résiduel $\varkappa(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ puisque $\Lambda^n \mathcal{E}(x)$ est de rang 1. Il existe un voisinage U de x et des sections $f_1, \dots, f_n \in \Gamma(U, \mathcal{E})$ telles que les classes $\mathrm{mod}\ \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x$ de leurs germes $f_{1,x}, \dots, f_{n,x} \in \mathcal{E}_x$ au point x forment une base de $\mathcal{E}(x)$ sur $\varkappa(x)$; d'après le lemme de Nakayama, $f_{1,x}, \dots, f_{n,x}$ engendrent $\mathcal{E}_x$ sur $\mathcal{O}_{X,x}$, et comme $\mathcal{E}$ est de type fini, il existe un voisinage $V \subset U$ de x tel que l'homomorphisme $f : \mathcal{O}_V^n \to \mathcal{E}|V$ défini par $f_1, \dots, f_n$ soit surjectif ([3], proposition 1). On va montrer que f est aussi injectif ; pour cela, il suffit de voir que, pour tout $y \in V$, l'homomorphisme $f_y : \mathcal{O}_{X,y}^n \to \mathcal{E}_y$ est injectif. Soit u un élément du noyau de f_y ; comme la puissance extérieure $\Lambda^n f_y : \Lambda^n \mathcal{O}_{X,y}^n \to \Lambda^n \mathcal{E}_y$ est un homomorphisme surjectif de modules libres de même rang (= 1), c'est un isomorphisme, et on a donc, pour $1 \leq i \leq n$,

$$u \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \hat{e}_i \wedge \dots \wedge e_n = 0 \qquad ,$$

en désignant par $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathcal{O}_{X,y}^n$ puisque l'image par $\Lambda^n f_y$ de cet élément est nulle. Il en résulte que u est nul ; ainsi $\mathrm{Ker}(f_y) = 0$, et f est un isomorphisme.

PROPOSITION 4. - Soient X un espace annelé en anneaux locaux, et $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_X$-Module de type fini. Pour que $\mathcal{L}$ soit inversible, il faut et il suffit que l'homomorphisme canonique : $\check{\mathcal{L}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L} \to \mathcal{O}_X$ soit un isomorphisme.

Pour voir que la condition est nécessaire, on peut supposer que $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$ et la démonstration est immédiate. Inversement, on va montrer que s'il existe un faisceau $\mathcal{F}$ et un isomorphisme $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_X$, le faisceau $\mathcal{L}$ (supposé de type fini) est inversible. En effet, on voit d'abord que, pour tout $x \in X$, la fibre réduite $\mathcal{L}(x)$ est de rang 1 sur le corps résiduel $\varkappa(x)$; par le raisonnement de la proposition 3, on en déduit l'existence d'un voisinage V de x et d'un homomorphisme surjectif $f : \mathcal{O}_V \to \mathcal{L}|V$. Le noyau $\mathfrak{J}$ de f annule $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}|V \simeq \mathcal{O}_V$, puisque $\mathcal{L}|V \simeq \mathcal{O}_V/\mathfrak{J}$; donc $\mathfrak{J} = 0$ et f est un isomorphisme, ce qui établit la proposition.

PROPOSITION 5. - Soient X un espace annelé en anneaux locaux dont le faisceau structural $\mathcal{O}_X$ est cohérent, et $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent. Pour tout $n \geq 0$, désignons par $S_n(\mathcal{E})$ (resp. $S(\mathcal{E})$) le complémentaire du plus grand ouvert dans lequel $\mathcal{E}$ est localement libre de rang n (resp. localement libre). C'est l'ensemble sous-jacent à un sous-espace annelé fermé de présentation finie.

Pour $n = 0$, dire que $\mathcal{E}|U$ est localement libre de rang 0 , c'est dire que $\mathcal{E}|U = 0$; donc $S_o(\mathcal{E}) = \mathrm{Supp}(\mathcal{E})$; on applique la proposition 1.

Soit $n \geqslant 1$; posons $\mathcal{L}_n = \Lambda^n \mathcal{E}$. D'après la proposition 3, pour que $\mathcal{E}|U$ soit localement libre de rang n , il faut et il suffit que $\mathcal{L}_n|U$ soit inversible, c'est-à-dire que $u_n|U$ soit un isomorphisme, en désignant par u_n l'homomorphisme canonique $u_n : \check{\mathcal{L}}_n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}_n \to \mathcal{O}_X$ (proposition 4). Ainsi $S_n(\mathcal{E}) = S(u_n)$ avec la notation du corollaire de la proposition 1 qui donne la démonstration puisque $\mathcal{O}_X$ et $\check{\mathcal{L}}_n \otimes \mathcal{L}_n$ sont cohérents.

Enfin

$$S(\mathcal{E}) = \bigcap_{n \geqslant 0} S_n(\mathcal{E}) \quad .$$

Pour tout $x \in X$, posons

$$n_x = [\mathcal{E}(x) : \kappa(x)] \quad ;$$

d'après le raisonnement de la proposition 3, il existe un voisinage V de x et un homomorphisme surjectif $\mathcal{O}_V^{n_x} \to \mathcal{E}|V$; donc $S_n(\mathcal{E}) \supset V$ dès que $n > n_x$, et

$$S(\mathcal{E}) \cap V = \bigcap_{n \leqslant n_x} S_n(\mathcal{E}) \cap V$$

est sous-jacent à un sous-espace annelé fermé de présentation finie.

PROPOSITION 6. Soit X un espace analytique sur un corps k valué complet non discret et algébriquement clos. Considérons un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent $\mathcal{E}$ et un point $x \in X$; pour tout $n \geqslant 0$ on a $S_n(\mathcal{E})_x = S_n(\tilde{\mathcal{E}}_x)$ et $S(\mathcal{E})_x = S(\tilde{\mathcal{E}}_x)$. Autrement dit, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_{X,x}$ les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $W(\mathfrak{p}) \not\subset (S_n(\mathcal{E}) , x)$ (resp. $W(\mathfrak{p}) \not\subset (S(\mathcal{E}) , x)$) ;

(ii) $(\mathcal{E}_x)_{\mathfrak{p}}$ est libre de rang n (resp. libre) sur $(\mathcal{O}_{X,x})_{\mathfrak{p}}$.

Si $n = 0$, c'est la proposition 2. Supposons $n \geq 1$; on a alors (cf. proposition 5)

$$S_n(\mathcal{E}) = S(u_n) \qquad ,$$

d'où

$$S_n(\mathcal{E})_x = S(u_n)_x = S((u_n)_x^{\sim}) = S_n(\tilde{\mathcal{E}}_x)$$

en utilisant le corollaire de la proposition 2, et en remarquant que $(u_n)_x^{\sim}$ définit l'homomorphisme canonique

$$(u_n)_x^{\sim} : \ (\Lambda^n \tilde{\mathcal{E}}_x)^{\vee} \otimes (\Lambda^n \tilde{\mathcal{E}}_x) \to \tilde{\mathcal{O}}_{X,x}$$

(faisceau structural de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$).

Enfin

$$S(\mathcal{E})_x = \bigcap_{n \leq n_x} S_n(\mathcal{E})_x = \bigcap_{n \leq n_x} S_n(\tilde{\mathcal{E}}_x) = S(\tilde{\mathcal{E}}_x)$$

(pour $n > n_x$, on a $S_n(\tilde{\mathcal{E}}_x) = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$).

C. Compléments sur les différentielles.

1. Ramifications. Différente.

Rappelons (cf. exposé 14) qu'à tout morphisme $f : X \to Y$ d'espaces analytiques, on associe un $\mathcal{O}_X$-Module $\Omega^1_{X/Y}$ appelé faisceau des 1-différentielles relatives ; c'est un faisceau cohérent.

Si $x \in X$ et si $y = f(x)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est une immersion locale en x ;

(ii) $\mathcal{O}_{X_y,x} \cong k$, c'est-à-dire que $m_y\mathcal{O}_{X,x}$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$ si m_y est celui de $\mathcal{O}_{Y,y}$;

(iii) $\Omega^1_{X/Y,x} = 0$ (cf. exposé 14, proposition 3.1).

On en déduit le résultat suivant :

PROPOSITION 7. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces analytiques. L'ensemble des points $x \in X$ en lesquels f est une immersion locale est le complémentaire de l'ensemble analytique fermé $\mathrm{Supp}(\Omega^1_{X/Y})$, défini par l'Idéal $\mathfrak{d}_{X/Y}$ annulateur de $\Omega^1_{X/Y}$ (que l'on appelle Idéal différente de X au-dessus de Y).*

Si le corps de base k est algébriquement clos, on obtient, en tenant compte du corollaire 2 du théorème 1, exposé 19 :

COROLLAIRE. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme surjectif d'espaces analytiques sur un corps algébriquement clos. Si Y est réduit, l'ensemble des points $x \in X$ où f est un isomorphisme local est le complémentaire du support de $\Omega^1_{X/Y}$, ensemble analytique fermé défini par l'Idéal différente $\mathfrak{d}_{X/Y}$.*

2. Différentielles relatives d'un spectre analytique.

PROPOSITION 8. — *Soient Y un espace analytique, $\mathcal{A}$ une $\mathcal{O}_Y$-Algèbre finie et $X = \mathrm{Specan}(\mathcal{A})$. On a $\Omega^1_{X/Y} \simeq \Omega^1_{\mathcal{A}/\mathcal{O}_Y}$ avec la notation de l'exposé 19, n° 1* (et notant $\Omega^1_{\mathcal{A}/\mathcal{O}_Y}$ le faisceau des $\mathcal{O}_Y$-différentielles de l'Algèbre $\mathcal{A}$).

En effet $X \times_Y X$ est le spectre analytique de $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{A}$ (exposé 19, n° 2, proposition 2(ii)) et le morphisme diagonal $\mathrm{diag}_{X/Y} : X \to X \times_Y X$ est une immersion fermée, transformée par le foncteur Specan de la multiplication $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. En désignant par $\mathfrak{J}$ le noyau de cette multiplication, on voit alors que X s'identifie par $\mathrm{diag}_{X/Y}$ au sous-espace analytique fermé de $X \times_Y X$ défini par l'Idéal $\mathfrak{J}\mathcal{O}_{X \times_Y X}$ ([3]). Donc $\Omega^1_{X/Y}$ est l'image inverse par $\mathrm{diag}_{X/Y}$ du faisceau

$$\mathfrak{J}\mathcal{O}_{X\times_Y X}/(\mathfrak{J}\mathcal{O}_{X\times_Y X})^2 = (\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2)\mathcal{O}_{X\times_Y X} \qquad \text{(exposé 14, n° 1)} \quad .$$

D'autre part, on a, par définition, $\Omega^1_{\mathcal{A}/\mathcal{O}_Y} = \mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$. Il reste à vérifier que lorsque l'on considère $\mathcal{O}_{X\times_Y X}$ comme une $\mathcal{O}_X$-Algèbre au moyen de la première projection $X \times_Y X \to X$, et $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{A}$ comme une $\mathcal{A}$-Algèbre au moyen de la première injection canonique $\mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{A}$, on a un isomorphisme de $\mathcal{O}_X$-Algèbres

$$\mathrm{diag}^{-1}_{X/Y}(\mathcal{O}_{X\times_Y X}) \simeq (\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{A})^{\sim} \quad .$$

Ceci provient du fait que $\mathfrak{a}$ est finie, car

$$\mathcal{O}_{X\times_Y X,(x,x)} \cong \mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \mathcal{O}_{X,x} \cong \mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \mathfrak{a}_y \cong \mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathfrak{a}_y} (\mathfrak{a}_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \mathfrak{a}_y)$$

(exposé 19, proposition 6, n° 3, et corollaire 2), si x est un point de X au-dessus de $y \in Y$.

COROLLAIRE. - *Sous les hypothèses de la proposition 8, pour tout* $x \in X$ *au-dessus de* $y \in Y$, *on a* $\Omega^1_{X/Y,x} \cong \Omega^1_{\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{O}_{Y,y}}$ *(module des* $\mathcal{O}_{Y,y}$*-différentielles de Kähler de* $\mathcal{O}_{X,x}$*).*

Car ([3])

$$\Omega^1_{X/Y,x} \cong \Omega^1_{\mathfrak{a}/\mathcal{O}_Y,y} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \mathcal{O}_{X,x} \cong \Omega^1_{\mathfrak{a}_y/\mathcal{O}_{Y,y}} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \mathcal{O}_{X,x} \cong \Omega^1_{\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{O}_{Y,y}} .$$

PROPOSITION 9. - *Soit* $f : X \to Y$ *un morphisme fini d'espaces analytiques sur un corps algébriquement clos. Désignons par* Z *l'ensemble des points de* X *où* f *n'est pas une immersion locale, et considérons un point* $x \in X$ *; posons* $f(x) = y$. *Le fermé* Z_x *de* $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ *correspondant à* Z *est identique à l'ensemble des* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ *où* $\mathcal{O}_{X,x}$ *est ramifié sur* $\mathcal{O}_{Y,y}$. *Autrement dit, pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* $\mathcal{O}_{X,x}$, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $W(\mathfrak{p}) \not\subset (Z, x)$;

(ii) $(\mathcal{O}_{X,x})_{\mathfrak{p}}$ *est non ramifié sur* $(\mathcal{O}_{Y,y})_{\mathfrak{q}}$ *(avec* $\mathfrak{q}$ = *image réciproque de* $\mathfrak{p}$ *dans* $\mathcal{O}_{Y,y}$*).*

Comme le corps de base est algébriquement clos, et comme f est fini, on peut, d'après le théorème 2 de l'exposé 19, n° 5, appliquer les résultats précédents

$$\Omega^1_{X/Y,x} \cong \Omega^1_{\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{O}_{Y,y}} .$$

D'autre part

$$Z = \mathrm{Supp}(\Omega^1_{X/Y}) \qquad \text{(proposition 7)} ,$$

donc

$$Z_x = \mathrm{Supp}(\Omega^1_{X/Y})_x = \mathrm{Supp}(\Omega^1_{X/Y,x}) \quad \text{(n° 1, proposition 2)} ,$$

ce qui donne

$$Z_x = \mathrm{Supp}(\Omega^1_{\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{O}_{Y,y}})$$

qui est précisément l'ensemble des points de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ où $\mathcal{O}_{X,x}$ est ramifié sur $\mathcal{O}_{Y,y}$ (cf. [2], chapître I, n° 3).

Nous dirons que Z est l'ensemble de ramification de f.

COROLLAIRE. - Soit $f : X \to Y$ un morphisme fini et surjectif d'espaces analytiques sur un corps algébriquement clos. Supposons Y normal et désignons par Z l'ensemble des points de X où f n'est pas un isomorphisme local. Pour tout point $x \in X$, le fermé Z_x de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ correspondant à Z est identique à l'ensemble des $p \in \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ où $\mathcal{O}_{X,x}$ n'est pas étale sur $\mathcal{O}_{Y,y}$ avec $y = f(x)$. Autrement dit, pour tout idéal premier p de $\mathcal{O}_{X,x}$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $W(p) \not\subset (Z, x)$;

(ii) $(\mathcal{O}_{X,x})_p$ est étale sur $(\mathcal{O}_{Y,y})_q$ (avec q = image réciproque de p dans $\mathcal{O}_{Y,y}$).

Raisonnement analogue, en remplaçant la proposition 2 du n° 1 par son corollaire, et en utilisant le corollaire 9.12 de loco citato.

Exemple. - A titre d'exemple, utile dans la suite, nous allons étudier les différentielles relatives et la différente de $X = \mathrm{Specan}(\mathcal{A})$ lorsque $\mathcal{A} = \mathcal{O}_Y[t]/(P)$, où $P \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)[t]$ est un polynôme unitaire. Alors X s'identifie au sous-espace analytique fermé de $Y \times E$ défini par l'Idéal $P\mathcal{O}_{Y\times E}$; soit $i : X \to Y \times E$ le morphisme d'immersion. D'après l'exposé 14, corollaire 4.2, on a une suite exacte :

$$P\mathcal{O}_{Y\times E}/P^2\mathcal{O}_{Y\times E} \xrightarrow{d} i^*(\Omega^1_{Y\times E/Y}) \longrightarrow \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow 0 ,$$

qui montre que $\Omega^1_{X/Y}$ s'identifie au quotient de $\Omega^1_{Y\times E/Y}$ par l'Idéal $P\mathcal{O}_{Y\times E} + d(P\mathcal{O}_{Y\times E})$.

On sait que $\Omega^1_{Y\times E/Y}$ est libre sur $\mathcal{O}_{Y\times E}$ et admet pour base dt, en désignant par t la section de $\mathcal{O}_{Y\times E}$ qui correspond à la projection $Y \times E \to E$ (exposé 14, propositions 2.1 et 2.8). En identifiant $\Omega^1_{Y\times E/Y}$ à $\mathcal{O}_{Y\times E}$ au moyen de cette base, et en désignant par u la section de $\mathcal{O}_X$ image réciproque de t (u correspond au morphisme composé $X \to Y \times E \to E$), on voit que $\Omega^1_{X/Y}$ s'identifie à $\mathcal{O}_X/P'(u)\,\mathcal{O}_X$, où $P' \in \Gamma(Y\,,\,\mathcal{O}_Y)[t]$ est le polynôme dérivé de P .

On en déduit immédiatement que l'Idéal différente de X au-dessus de Y est engendré par $P'(u)$, c'est-à-dire que $\mathfrak{d}_{X/Y} = P'(u)\,\mathcal{O}_X$. Par suite l'ensemble de ramification Z de $f : X \to Y$ est l'ensemble des points $x \in X$ où s'annule la section $P'(u)$ de $\mathcal{O}_X$, c'est-à-dire où $P'(u)(x) = 0$. Dans $X - Z$, le morphisme f induit un isomorphisme local (ou est étale), d'après la proposition 6 de l'exposé 19, n° 3. La projection sur Y de l'ensemble de ramification Z est contenue dans le support du faisceau cohérent $\mathcal{A}/P'(u) = \mathcal{O}_Y[t]/(P\,,\,P')$ (ici u désigne l'image de t dans $\mathcal{A}$) ; si $\mathcal{A}$ est à extensions résiduelles triviales (en particulier si le corps de base est algébriquement clos), la projection de Z est même identique à ce support.

3. Différentielles en caractéristique $p > 0$; morphisme de Frobenius.

Plaçons-nous sur un corps k valué complet non discret et parfait ; nous désignerons par p l'exposant caractéristique de k . Pour tout espace analytique X sur k , considérons l'espace k-annelé $X^{(p)}$ ainsi défini : l'espace annelé sous-jacent à $X^{(p)}$ est le même que pour X , soit $(X\,,\,\mathcal{O}_X)$; la structure de k-Algèbre sur $\mathcal{O}_{X^{(p)}}$ (identique à $\mathcal{O}_X$ en tant que faisceau d'anneaux) est déduite de celle de $\mathcal{O}_X$ par restriction des scalaires, au moyen de l'automorphisme $\varphi : k \to k$ qui transforme $\lambda \in k$ en $\varphi(\lambda) = \lambda^{1/p}$.

Il est clair que $X^{(p)}$ est encore un espace analytique sur k . Le morphisme $F : X \to X^{(p)}$ d'espaces annelés, dont l'application continue sous-jacente est l'application identique de X , et dont l'application sur les faisceaux $\mathcal{O}_{X^{(p)}} \to \mathcal{O}_X$ transforme une section f de $\mathcal{O}_{X^{(p)}}$ en f^p est évidemment k-linéaire (car $(\lambda^{1/p}.f)^p = \lambda.f^p$), donc c'est un morphisme d'espaces analytiques.

On dit que $F : X \to X^{(p)}$ est le morphisme de Frobenius de X . C'est un morphisme fini (l'application continue sous-jacente est l'application identique de X ; cf. exposé 19, n° 5). Il est clair que F dépend fonctoriellement de X , c'est-à-dire que tout morphisme $f : X \to Y$ d'espaces analytiques définit un morphisme $f^{(p)} : X^{(p)} \to Y^{(p)}$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F"] \arrow[d, "f"'] & X^{(p)} \arrow[d, "f^{(p)}"] \\ Y \arrow[r, "F"] & Y^{(p)} \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Supposons maintenant le corps de base k algébriquement clos. D'après les résultats de l'exposé 19, n° 5, on voit que $\mathcal{O}_X$ est une $\mathcal{O}_{X^{(p)}}$-Algèbre finie, dont X est le spectre analytique au-dessus de $X^{(p)}$.

On en déduit la

PROPOSITION 10. - *Soit X un espace analytique sur un corps k algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. L'ensemble des points $x \in X$ tels que $\mathcal{O}_{X,x}$ soit réduit est le complémentaire d'un ensemble analytique fermé.*

On va voir en effet que l'ensemble des $x \in X$, où $\mathcal{O}_{X,x}$ est réduit, est identique au complémentaire du support du noyau $\mathfrak{I}$ de $\mathcal{O}_{X^{(p)}} \to \mathcal{O}_X$ qui est un $\mathcal{O}_{X^{(p)}}$-Idéal cohérent d'après les remarques précédentes.

Car dire que $x \notin \mathrm{Supp}(\mathfrak{I})$, c'est dire que l'élévation à la puissance p-ième, $\mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X,x}$, est injective. Comme $p > 0$, ceci équivaut à dire que $\mathcal{O}_{X,x}$ est réduit.

On démontrera plus loin ce résultat sans faire d'hypothèse sur la caractéristique de k (théorème de Cartan-Oka).

PROPOSITION 11. - *Soit X un espace analytique sur un corps parfait de caractéristique $p > 0$. L'homomorphisme canonique $\underset{\sim}{\Omega}^1_X \to \underset{\sim}{\Omega}^1_{X/X^{(p)}}$ est un isomorphisme.*

En effet, dans la suite exacte

$$F^*(\underset{\sim}{\Omega}^1_{X^{(p)}}) \to \underset{\sim}{\Omega}^1_X \to \underset{\sim}{\Omega}^1_{X/X^{(p)}} \to 0$$

de l'exposé 14, corollaire 4.5, on voit immédiatement que l'homomorphisme $F^*(\underset{\sim}{\Omega}^1_{X^{(p)}}) \to \underset{\sim}{\Omega}^1_X$ est nul ($\underset{\sim}{\Omega}^1_{X^{(p)}}$ est engendré sur $\mathcal{O}_{X^{(p)}}$ par les df, où f est une section variable de $\mathcal{O}_{X^{(p)}}$; donc l'image de $F^*(\underset{\sim}{\Omega}^1_{X^{(p)}})$ dans $\underset{\sim}{\Omega}^1_X$ est engendré par les $d(f^p)$ qui sont nuls).

COROLLAIRE. - *Soit X un espace analytique sur un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Pour tout point $x \in X$ on a un isomorphisme*

$$\Omega^1_{X,x} \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{O}^p_{X,x}}$$

(module des $\mathcal{O}^p_{X,x}$-différentielles de Kähler de $\mathcal{O}_{X,x}$).

On applique la proposition 11 et le corollaire de la proposition 8.

D. Points simples et points singuliers.

Rappelons qu'un point x d'un espace analytique X est dit simple si son anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est régulier, ce qui revient à dire que le morphisme canonique $X \to \underset{\sim}{E}^0$ est simple en x , ou encore que x possède un voisinage ouvert isomorphe à un ouvert d'un espace $\underset{\sim}{E}^n$ (avec $n = \dim \mathcal{O}_{X,x}$). Les points simples de X forment donc un ouvert qui est une variété analytique. Si un point x n'est pas simple, on dit qu'il est singulier. L'ensemble $S(X)$ des points singuliers de X , ou lieu singulier de X , est fermé.

THÉORÈME 2. - Le lieu singulier $S(X)$ d'un espace analytique X est un ensemble analytique fermé.

La question étant locale, nous nous plaçons au voisinage d'un point $x \in X$. Si

$$0 = \bigcap_{i=1}^{r} q_i$$

est une décomposition primaire de 0 dans $\mathcal{O}_{X,x}$, il existe un voisinage ouvert U de x dans X et des $\mathcal{O}_U$-Idéaux $\mathfrak{I}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ tels que

$$(\mathfrak{I}_i)_x = q_i \qquad \text{pour } i = 1 , \dots , r$$

et

$$\bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{I}_i = 0 \qquad .$$

Désignons par X_i le sous-espace analytique fermé de U défini par l'Idéal $\mathfrak{I}_i$; on a

$$U = \bigcup_{i=1}^{r} X_i$$

et X_i est irréductible en x , donc équidimensionnel au point x . D'après le théorème 1, il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de x dans lequel tous les X_i ont une dimension constante. Etudions $S(X) \cap U = S(U)$; si un point $y \in U$

est simple, $\mathcal{O}_{X,y}$ est régulier, donc intègre. De $0 = \bigcap (\mathfrak{I}_i)_y$, on déduit que l'un des $(\mathfrak{I}_i)_y$, soit $(\mathfrak{I}_j)_y$, est nul, et ensuite on voit que

$$\mathcal{O}_{X_{j,y}} = \mathcal{O}_{X,y}/(\mathfrak{I}_j)_y = \mathcal{O}_{X,y}$$

est régulier. Inversement, s'il existe un indice j tel que $(\mathfrak{I}_j)_y = 0$ et que $y \notin S(X_j)$, y est simple sur X , car X_j en est un voisinage ouvert dans X . Ceci prouve que

$$S(U) = \bigcap_{i=1}^{r} (\mathrm{Supp}(\mathfrak{I}_i) \cup S(X_i)) \quad .$$

On sait que $\mathrm{Supp}(\mathfrak{I}_i)$ est un ensemble analytique fermé (proposition 1) ; si l'on prouve que $S(X_i) \cap V = S(X_i \cap V)$ est aussi un ensemble analytique fermé, on démontre que $S(V) = S(X) \cap V$ est analytique fermé.

On est ainsi ramené à établir le théorème pour un espace analytique de dimension constante $X_i \cap V$. Dans la suite de la démonstration, nous considérons un espace analytique X de dimension constante n . Nous utilisons le critère jacobien de simplicité (exposé 14, corollaire 3.3) :

Pour que l'espace analytique X *soit simple en* x , *il faut et il suffit que* $\underset{\sim}{\Omega}^1_{X,x}$ *soit libre de rang* n (*avec* $n = \dim \mathcal{O}_{X,x}$).

On en déduit que $S(X) = S_n(\underset{\sim}{\Omega}^1_X)$ avec la notation de B , n° 2, proposition 5. Cette proposition donne le résultat.

PROPOSITION 12. - *Soit* X *un espace analytique sur un corps algébriquement clos* k . *Si* X *est intègre en un point* x , *on a* $(S(X) , x) \neq (|X| , x)$ *c'est-à-dire que* x *n'est pas intérieur à* $S(X)$.

La démonstration de cette proposition est différente suivant la caractéristique du corps de base k .

1° k *est de caractéristique* 0 . - Choisissons un système de paramètres de $\mathcal{O}_{X,x}$; il lui correspond un homomorphisme injectif $\mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^n,0} \to \mathcal{O}_{X,x}$ tel que $\mathcal{O}_{X,x}$ soit fini sur $\mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^n,0}$ $(n = \dim \mathcal{O}_{X,x})$, et un morphisme fini $\varphi_1 : U_1 \to V_1$ d'un voisinage U_1 de x dans X sur un voisinage V_1 de 0 dans $\underset{\sim}{E}^n$, tel que $\varphi_1(x) = 0$; le faisceau $\mathfrak{A} = \varphi_{1*}(\mathcal{O}_{U_1})$ est une $\mathcal{O}_{V_1}$-Algèbre finie telle que $\mathfrak{A}_0 = \mathcal{O}_{X,x}$ (exposé 19, n° 3, proposition 6, corollaire 1).

Le corps des fractions K de $\mathcal{O}_{X,x}$ est une extension finie et séparable (caractéristique 0) du corps des fractions L de $\mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^n,o}$; c'est donc une extension monogène, et on peut choisir un générateur ξ de K sur L appartenant à l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$. Il existe un voisinage $V_2 \subset V_1$ de 0 et une section f de $\mathcal{A}$ dans V_2 telle que $f_o = \xi$; alors $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{V_2}[f]$ est une sous-$\mathcal{O}_{V_2}$-Algèbre finie de $\mathcal{A}|V_2$. La fibre en 0 du noyau de l'homomorphisme $\mathcal{O}_{V_2}[t] \to \mathcal{B}$ qui transforme t en f est engendrée par le polynôme minimal $P_o \in \mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^n,o}[t]$ de ξ sur L. Il existe un voisinage $V \subset V_2$ de 0 tel que le noyau de $\mathcal{O}_V[t] \to \mathcal{B}|V$ soit engendré par un polynôme unitaire $P \in \Gamma(V , \mathcal{O}_V)[t]$, de degré $d = [K : L]$, dont le germe en 0 est P_o ; ainsi

$$\mathcal{B}|V \cong \mathcal{O}_V[t]/(P) \quad .$$

Posons

$$U = \overset{-1}{\varphi_1}(V) \qquad \text{et} \quad \varphi = \varphi_1|U \quad .$$

Comme la fibre en 0 du quotient $(\mathcal{A}|V)/(\mathcal{B}|V)$ est

$$\mathcal{A}_c/\mathcal{B}_o = \mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^n,o}$$

qui est un $\mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^n,o}$-module de torsion, le support T de ce quotient induit un fermé

$$T_o = \mathrm{Supp}(\mathcal{A}_o/\mathcal{B}_o) \neq \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^n,o}) \qquad \text{dans} \quad \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^n,o})$$

(cf. B, proposition 2). Donc

$$(T , 0) \neq (k^n , 0)$$

par le Nullstellensatz (exposé 19, n° 4, théorème 1, corollaire 1). Si $y \in V - T$, on a $\mathcal{A}_y = \mathcal{B}_y$, ce qui montre que $U - \overset{-1}{\varphi}(T)$ est isomorphe au spectre analytique de $\mathcal{B}|(V - T)$. D'autre part $P_o'(\xi) \neq 0$ puisque ξ est séparable ; il en résulte que $W(P'(f)) \neq (|X| , x)$, où f désigne (par abus) la section de $\mathcal{O}_X$ qui correspond au générateur f de $\mathfrak{B}$ (exposé 19, n° 4, théorème 1). Désignons par Z le support de $\mathcal{O}_U/P'(f)\,\mathcal{O}_U$, ensemble analytique défini par l'annulation de $P'(f)$. D'après l'exemple de C, n° 2, $Z \cap (U - \varphi^{-1}(T))$ est l'ensemble de ramification de $U - \varphi^{-1}(T)$ au-dessus de $V - T$, et φ est un isomorphisme local en tout point $x' \in U - \varphi^{-1}(T) - Z$; par conséquent

$$S(X) \cap U \subset \varphi^{-1}(T) \cup Z \qquad ,$$

ce qui donne

$$(S(X) , x) \subset (\varphi^{-1}(T) , x) \cup (Z , x) \neq (|X| , x)$$

puisque $(|X| , x)$ est irréductible et que $(\varphi^{-1}(T) , x) \neq (|X| , x)$ (à cause de $(T , 0) \neq (k^n , 0)$ et de la surjectivité de φ) et

$$(Z , x) = W(P'(f)) \neq (|X| , x) \qquad .$$

2° k <u>est de caractéristique</u> $p > 0$ (d'après A. GROTHENDIECK). - La propriété à démontrer $(S(X) , x) \neq (|X| , x)$ est équivalente à $S(X)_x \neq \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ (exposé 19, n° 4). Il s'agit donc de prouver que le point générique $\mathfrak{p} = (0)$ de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ n'appartient pas à $S(X)_x = S_n(\underset{\sim}{\Omega}^1_X)_x = S_n(\tilde{\underset{\sim}{\Omega}}^1_{X,x})$ ($n = \dim \mathcal{O}_{X,x}$; on utilise le critère jacobien, cf. théorème 2, grâce au fait que X est équidimensionnel en x , donc de dimension constante n au voisinage ; la notation est celle de B, n° 2, et on applique la proposition 6 de ce paragraphe). D'autre part

$$\underset{\sim}{\Omega}^1_{X,x} = \Omega^1_{\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{O}^p_{X,x}} \quad \text{(corollaire de la proposition 11)} \qquad .$$

On est donc ramené à prouver que

$$\Omega^1_{\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{O}^p_{X,x}} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} K$$

est libre de rang n sur le localisé K de $\mathcal{O}_{X,x}$ en l'idéal premier (0) , c'est-à-dire son corps des fractions.

Comme

$$\Omega^1_{\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{O}^p_{X,x}} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} K \simeq \Omega^1_{K/K^p} \qquad ,$$

le résultat cherché provient du

LEMME 4. - Soit L un corps de caractéristique $p > 0$, admettant une p-base à n éléments. Si K est une extension finie de L, il possède une p-base à n éléments.

Si l'extension est séparable, c'est évident car

$$\Omega^1_K \simeq \Omega^1_L \otimes_L K \qquad .$$

Sinon, on se ramène immédiatement au cas où K est radiciel sur L, puis au cas où K est engendré par une racine p-ième $K = L(\xi)$ avec $\xi^p \in L$, $\xi \notin L$. Posons $a = \xi^p \notin L^p$; on a $da \neq 0$ (l'ensemble des éléments annulés par d étant $k(L^p)$) ; donc il existe des éléments $a_2, \ldots, a_n \in L$ tels que $(a, a_2, \ldots, a_n)$ soit une p-base de L, ce qui équivaut à dire que les monômes $a^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n}$ avec $0 \leq \alpha_i < p$ pour $i = 1, \ldots, n$ forment une base de L sur $k(L^p)$ ($= L^p$ puisque k est parfait). Comme $1, \xi, \ldots, \xi^{p-1}$ est une base de K sur L et que $a = \xi^p \in K^p$, on voit que les monômes $\xi^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n}$, avec $0 \leq \alpha_i < p$ pour $i = 1, \ldots, n$, forment une base de K sur K^p, c'est-à-dire que $(\xi, a_2, \ldots, a_n)$ est une p-base de K.

Pour appliquer ce lemme au corps des fractions K d'une algèbre analytique intègre $\mathcal{O}_{X,x}$, on choisit un système de paramètres de $\mathcal{O}_{X,x}$, auquel correspond un homomorphisme injectif $\mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^n,o} \to \mathcal{O}_{X,x}$ tel que $\mathcal{O}_{X,x}$ soit fini sur $\mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^n,o}$. Comme le corps des fractions L de $\mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^n,o} \simeq k\{t_1, \ldots, t_n\}$ a visiblement $(t_1, \ldots, t_n)$ pour p-base, il résulte du lemme que K admet une p-base à n éléments, donc que $[\Omega^1_{K/K^p} : K] = n$, ce qui établit la propriété.

THÉORÈME 3 (ABHYANKAR). - Soit X un espace analytique sur k un corps algébriquement clos. Soit $S(X)$ le lieu singulier de X ; si $x \in X$, on a

$$S(X)_x = S(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}))$$

(<u>lieu singulier de</u> $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$). <u>En d'autres termes, pour tout idéal premier</u> p <u>de</u> $\mathcal{O}_{X,x}$, <u>les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

(i) $W(p) \not\subset (S(X) , x)$;

(ii) $(\mathcal{O}_{X,x})_p$ <u>est régulier</u>

(cf. [1] ; la démonstration qui suit est due à A. GROTHENDIECK).

Considérons un idéal premier p de $\mathcal{O}_{X,x}$; il existe un voisinage ouvert U de x et un faisceau cohérent d'idéaux $\mathfrak{J}$ dans U tel que $\mathfrak{J}_x = p$; nous désignerons par Y le sous-espace analytique fermé de U défini par $\mathfrak{J}$. Il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de x tel que

$$\mathrm{codim}_y(Y \; ; X) = \mathrm{ht}(p) = p$$

pour $y \in Y \cap V$ (A, lemme 3).

Comme le germe (Y , x) est irréductible, si Z est un sous-ensemble analytique de Y tel que $(Z , x) \neq (|Y| , x)$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $W(p) = (|Y| , x) \not\subset (S(X) , x)$;

(i') $(|Y| - Z , x) \not\subset (S(X) , x)$.

En effet, de $(|Y| - Z , x) \subset (S(X) , x)$ on déduit

$$(|Y| , x) = (|Y| \cap S(X) , x) \cup (Z , x) \qquad ,$$

d'où

$$(|Y| , x) = (|Y| \cap S(X) , x) \qquad ,$$

c'est-à-dire

$$(|Y| , x) \subset (S(X) , x) \qquad .$$

Nous appliquerons cette remarque avec $Z = S(Y) \cup S_{p'}(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2)$, où p' est le rang de $p(\mathcal{O}_{X,x})_p/p^2(\mathcal{O}_{X,x})_p$ sur $(\mathcal{O}_{X,x})_p/p(\mathcal{O}_{X,x})_p$ (dimension de l'espace tangent de Zariski). L'ensemble Z est analytique et $(Z , x) \neq (|Y| , x)$, car (Y , x) est irréductible, et on a séparément

$$(S(Y)\ ,\ x) \neq (|Y|\ ,\ x) \qquad \text{(proposition 7 ; } (Y\ ,\ x) \text{ est intègre)}$$

et

$$(S_{p'}(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2)\ ,\ x) \neq (|Y|\ ,\ x) \quad \text{d'après le Nullsteliensatz} \qquad ,$$

car

$$p \notin S_{p'}(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2)_x = S_{p'}(p/p^2) \qquad .$$

(En effet

$$(p/p^2)_p = p(\mathcal{O}_{X,x})_p/p^2(\mathcal{O}_{X,x})_p$$

est libre de rang p' .)

Si $y \in (|Y| - Z) \cap V$, c'est un point simple de Y et $\operatorname{codim}_y(Y\ ;\ X) = p$; d'autre part $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ est libre de rang p' au voisinage de y . Ceci va nous permettre d'achever la démonstration grâce au

LEMME 5. - Soit A un anneau local noethérien. Si q est un idéal de A tel que A/q soit régulier, les propriétés suivantes sont équivalentes

a. A est régulier.

b. q/q^2 est libre sur A/q , de rang $p = ht(q)$.

Puisque A/q est régulier, donc intègre, l'idéal q est premier. Si q/q^2 admet un système de générateurs sur A/q ayant $p = ht(q) = \dim A_q$ éléments, il en est de même de $(q/q^2)_q = qA_q/q^2A_q$ sur A_q/qA_q , ce qui montre que A_q est régulier et que q/q^2 est libre sur A/q . Ainsi la condition (b) est équivalente à

b'. q/q^2 est engendré sur A/q par $p = ht(q)$ éléments.

Soit $q = \dim(A/q)$, et soient $f_1 , \dots , f_q$ des éléments de l'idéal maximal m de A qui relèvent ceux d'un système régulier de paramètres de A/q . Si $(g_1 , \dots , g_{p'})$ est un système minimal de générateurs de q , m admet $(f_1 , \dots , f_q , g_1 , \dots , g_{p'})$ comme système minimal de générateurs. Si A est régulier, on a donc

$$q + p' = \dim A = q + p \qquad ,$$

d'où

$$p' = p = \mathrm{ht}(q) \qquad ;$$

ainsi (a) entraîne (b').

Réciproquement, si (b) est vrai, on a $p' = p$ et m est engendré par $q + p = \dim(A_q) + \dim(A/q) \leq \dim(A)$ élements, ce qui prouve que A est régulier.

Nous appliquons le lemme 5 à $A = \mathcal{O}_{X,y}$ et $q = \mathfrak{J}_y$ pour $y \in (|Y| - Z) \cap V$. Alors $A/q = \mathcal{O}_{Y,y}$ est bien régulier ; Y est irréductible en y, donc

$$p = \mathrm{codim}_y(Y \,;\, X) = \mathrm{ht}(q) \qquad ;$$

$q/q^2 = (\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2)_y$ est libre de rang p' sur $\mathcal{O}_{Y,y}$. Par suite, pour que y soit simple sur X, il faut et il suffit que $p = p'$, c'est-à-dire que $(\mathcal{O}_{X,x})_p$ soit régulier. On a donc prouvé que la condition

(ii) $(\mathcal{O}_{X,x})_p$ est régulier

entraîne

(i") $(|Y| - Z) \cap S(X) \cap V = \emptyset$;

et que $(|Y| - Z) \cap V \not\subset S(X)$ entraîne (ii).

Le théorème est établi.

COROLLAIRE 1. - <u>Le lieu singulier</u> $S(\mathcal{O}_{X,x})$ <u>de</u> $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ <u>est fermé, c'est-à-dire qu'il existe un idéal</u> $\alpha \subset \mathcal{O}_{X,x}$ <u>tel que les idéaux premiers</u> p <u>qui donnent un localisé</u> $(\mathcal{O}_{X,x})_p$ <u>régulier soient caractérisés par</u> $p \not\supset \alpha$.

COROLLAIRE 2. - <u>Soit</u> A <u>une algèbre analytique intègre de dimension</u> ≥ 2. <u>Il existe un idéal premier</u> $p \neq 0$ <u>de</u> A <u>tel que</u> A_p <u>soit régulier.</u>

Puisque A est intègre, l'idéal α du corollaire 1 n'est pas nul ; on utilise alors le fait que l'intersection des idéaux premiers $\neq 0$ de A est nulle (si $f \in A$ est différent de 0, il existe un système de paramètres $(f_1, \dots, f_n)$ de A tel que $f_n = f \neq f_1$, car $n = \dim A \geq 2$; il existe alors un idéal premier p associé à $A/f_1 A$ (donc non nul) tel que $f \notin p$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ABHYANKAR (S.). - Concepts of order and rank on a complex space and a condition for normality, Math. Annalen, t. 141, 1960, p. 171-192.

[2] GROTHENDIECK (Alexander). - Séminaire de Géométrie algébrique, 1960/61. - Paris, Institut des hautes Études scientifiques, 1961.

[3] SERRE (Jean-Pierre). - Faisceaux algébriques cohérents, Annals of Math., Series 2, t. 61, 1955, p. 197-278.

[4] SERRE (Jean-Pierre). - Sur la dimension homologique des anneaux et des modules noethériens, Proceedings of the international symposium on algebraic number theory [1955. Tokyo and Nikko] ; p. 175-189. - Tokyo, Science Council of Japan, 1956.