Alexander Grothendieck

Techniques de construction en géométrie analytique. VI. Étude locale des morphismes : germes d'espaces analytiques, platitude, morphismes simples

Séminaire Henri Cartan, tome 13, n° 1 (1960-1961), exp. n° 13, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1960-1961__13_1_A9_0>

20 et 27 février 1961

TECHNIQUES DE CONSTRUCTION EN GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

par Alexander GROTHENDIECK

VI : ÉTUDE LOCALE DES MORPHISMES : GERMES D'ESPACES ANALYTIQUES, PLATITUDE, MORPHISMES SIMPLES

1. Germes d'espaces analytiques.

DÉFINITION 1.1. - On appelle germe (ponctuel) d'espace analytique, un espace analytique X muni d'un point marqué x. Si (X, x) et (Y, y) sont deux germes d'espaces analytiques, les germes en x de morphismes f de voisinages U de x dans Y, tels que $f(x) = y$, sont appelés morphismes du germe (X, x) dans le germe (Y, y).

On compose les morphismes de germes de façon évidente, de sorte qu'on obtient une catégorie, la catégorie des germes d'espaces analytiques. La notion d'isomorphisme de germes est donc définie. On laisse au lecteur le soin de vérifier que pour qu'un morphisme $f : X \to Y$ définisse un isomorphisme du germe (X, x) et du germe (Y, y), où $y = f(x)$, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage ouvert U de x et un voisinage ouvert V de y tels que f induise un isomorphisme de U et V. On dit alors que f est un isomorphisme local en x.

DÉFINITION 1.2. - On appelle algèbre analytique sur le corps valué complet k, une k-algèbre qui est isomorphe à un quotient non nul d'un anneau de séries convergentes $k\{t_1, \ldots, t_n\}$.

Ces algèbres forment une catégorie pour les homomorphismes de k-algèbres (nécessairement locaux [1], II, 2.6). A tout germe d'espace analytique (X, x), associons l'algèbre locale $\mathcal{O}_{X,x}$, qui est une algèbre analytique. A un morphisme de germes $(X, x) \to (Y, y)$ est associé de façon évidente un homomorphisme $\mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$, de sorte qu'on obtient un foncteur contravariant

$$(\text{Germes An})^{\circ} \to (\text{Alg An})$$

de la catégorie des germes d'espaces analytiques dans la catégorie des algèbres analytiques.

THÉORÈME 1.3. - Le foncteur précédent est une équivalence de la catégorie opposée à la catégorie des germes d'espaces analytiques avec la catégorie des algèbres analytiques.

Cette assertion se décompose en deux.

a. Le foncteur envisagé est pleinement fidèle, i. e. on a le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1.4. - Soient X et Y des espaces analytiques, x un point de X, et y un point de Y. Alors :

(i) Si f, g sont des morphismes d'un voisinage ouvert U de x dans Y, tels que $f(x) = g(x) = y$, et tels que les deux homomorphismes $f_x^*, g_x^* : \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ soient égaux, alors f et g coïncident dans un voisinage de x.

(ii) Etant donné un homomorphisme de k-algèbres $\varphi : \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$, il existe un morphisme d'un voisinage ouvert U de x dans Y, tel que $f(x) = y$ et $f_x^* = \varphi$.

DÉMONSTRATION de 1.4.

(i) La question étant locale sur Y, on peut supposer que Y est un sous-espace analytique d'un $\underset{\sim}{E}^n$, et même $Y = \underset{\sim}{E}^n$ (puisque deux morphismes à valeurs dans Y définissant le même morphisme à valeurs dans $\underset{\sim}{E}^n$, sont alors identiques). En vertu de [1], III, 1.1, f correspond à un système $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ de sections de $\mathcal{O}_U$, à savoir les $f^*(z_i)$, et de même g correspond à un système $(g_i)_{1\leq i\leq n}$ de sections de $\mathcal{O}_U$, et l'hypothèse $f_x^* = g_x^*$ implique que le germe en x de f_i est égal à celui de g_i. Donc sur un voisinage ouvert convenable U' de x, on aura $f_i = g_i$ pour $1 \leq i \leq n$ ce qui implique, par loco citato, que $f = g$ sur U'.

(ii) On peut encore supposer Y sous-espace analytique fermé d'un ouvert V d'un $\underset{\sim}{E}^n$, défini par un Idéal de type fini $\mathfrak{J}$ sur V. On a donc $\mathcal{O}_{Y,y} = \mathcal{O}_{V,y}/\mathfrak{J}_y$, et la donnée de φ équivaut à la donnée d'un homomorphisme $\psi : \mathcal{O}_{V,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ s'annulant sur $\mathfrak{J}_y$. Soient $f_{i,x} = \psi(z_{ix})$, et soient f_i des sections de $\mathcal{O}_X$ sur un voisinage ouvert U de x, correspondants aux germes $f_{i,x}$. Les f_i définissent donc, par loco citato un morphisme

$$g : U \to \underset{\sim}{E}^n ,$$

déterminé par la condition que $g^*(z_i) = f_i$, ce qui implique d'ailleurs (en prenant les augmentations) que $g(x) = y$. Par construction, g_x^* et ψ ont même valeur sur les $z_{i,y}$, ce qui implique qu'ils coïncident, puisque $\mathcal{O}_{V,y}$ est l'anneau des séries formelles en les $z_{i,x} - a_i$ (où $a_i = \varepsilon(z_{i,x})$). Par suite on a $g^*_x(\mathfrak{J}_y) = 0$, i. e. $g^*(\mathfrak{J})_x = 0$, ce qui signifie qu'il existe un voisinage ouvert U' de x dans U tel que $g(U') \subset V$ et que $g^*(\mathfrak{J})$ soit nul sur U' , i. e. que $g|U'$ se factorise à travers un morphisme $f : X \to Y$. On a alors $f^*_x = \varphi$ par construction.

b. Le foncteur envisagé est essentiellement surjectif, i. e. on a le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1.5. - Pour toute algèbre analytique A , il existe un espace analytique X et un point x de X , tels que $\mathcal{O}_{X,x}$ soit isomorphe à A .

En effet, d'après la définition 1.2, on a $A \cong \mathcal{O}_{Z,x}/I$, où Z est un espace $\underset{\sim}{E}^n$ et x est l'origine de $\underset{\sim}{E}^n$, enfin I un idéal de $\mathcal{O}_{Z,x}$ distinct de l'idéal unité. Comme $\mathcal{O}_{Z,x}$ est noethérien, I est de type fini, donc de la forme $\mathfrak{J}_x$, où $\mathfrak{J}$ est un Idéal de type fini sur un voisinage ouvert U de x dans Z . Soit X le sous-espace analytique de U défini par $\mathfrak{J}$. Alors (X , x) satisfait à la condition voulue.

Cela achève la démonstration de (1.3).

DÉFINITION 1.6. - Un morphisme d'espaces analytiques $f : X \to Y$ est dit immersion locale (resp. isomorphisme local) en un point $x \in X$, s'il existe un voisinage ouvert U de x et un voisinage ouvert V de $y = f(x)$, tels que f induise une immersion fermée (resp. un isomorphisme) d'espaces analytiques $U \to V$.

COROLLAIRE 1.7. - Soient $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces analytiques, x un point de X . Pour que f soit une immersion locale (resp. un isomorphisme local) en x , il faut et il suffit que l'homomorphisme $f^*_x : \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ (où $y = f(x)$) soit surjectif (resp. bijectif).

La nécessité étant évidente, prouvons la suffisance. Supposons d'abord que f_x soit bijectif, alors en vertu de (1.3), le morphisme de germes $(X , x) \to (Y , y)$ défini par f est un isomorphisme, ce qui signifie que f est un isomorphisme local en x comme on l'a dit au début du numéro. Supposons maintenant f_x surjectif, soit I son noyau, c'est un idéal de type fini puisque $\mathcal{O}_{Y,y}$ est noethérien, donc de la forme $\mathfrak{J}_y$, où $\mathfrak{J}$ est un Idéal de type fini sur un voisinage ouvert V de y dans Y , et on voit comme dans (1.5), qu'il existe un voisinage ouvert U de x dans X tel que $f|U$ se factorise par un morphisme $f' : U \to Y'$, où

Y' est le sous-espace analytique fermé de V défini par $\mathfrak{J}$. Par construction, f'_x est un isomorphisme, d'où il résulte par la première partie de la démonstration que, à condition de rétrécir au besoin U et V , f' est un isomorphisme de U sur Y' , donc f induit une immersion fermée de U dans V .

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 1.8 (résultat promis dans [1], II, 2.10). - Soit $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces analytiques. Pour que ce soit une immersion d'espaces analytiques, il faut et il suffit que ce soit une immersion d'espaces annelés, i. e. que ce soit un homéomorphisme de X sur une partie localement fermée de Y , et que pour tout $x \in X$, l'homomorphisme $f_x^* : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ soit surjectif.

En effet, il y a seulement à prouver la suffisance, et on peut supposer que $f(X)$ est fermé dans Y ; il faut alors montrer que l'Idéal $\mathfrak{J}$ qui définit X comme sous-espace annelé de Y est de type fini. Or cela résulte aussitôt du corollaire précédent.

Nous n'avons pas fait usage encore, dans le présent exposé (ni les précédents, à l'exception de [1], III, 3.2) du fait, signalé dans [1], II, Introduction, (b), que si un homomorphisme d'algèbres analytiques $A \to B$ est tel que B est quasi-fini sur A (i. e. $\hat{B}$ est un module de type fini sur $\hat{A}$, ou encore $B/\mathfrak{m}A$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $k = A/\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}$ désignant l'idéal maximal de A), alors B est un module de type fini sur A (C'est là une des différences typiques avec la géométrie algébrique). Utilisant le résultat cité, on peut mettre (1.7) sous la forme plus forte suivante :

PROPOSITION 1.9. - Soient $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces analytiques, x un point de X , et $y = f(x)$. Pour que f soit une immersion locale en x (resp. un isomorphisme local en x), il faut et il suffit que l'homomorphisme $\hat{\mathcal{O}}_{Y,y} \to \hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ déduit de f_x par passage aux complétés soit surjectif (respectivement bijectif).

(Dans le premier cas, utilisant le lemme de Nakayama, cela signifie aussi simplement que $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_y\mathcal{O}_{X,x}$ est isomorphe à k , ou encore (en vertu de (1.3)) que x est un point isolé de la fibre X_y de X en y , et son anneau local dans X_y est réduit à k).

Reprenant une terminologie déjà utilisée en géométrie algébrique, nous dirons qu'un morphisme $f : X \to Y$ d'espaces analytiques est <u>étale en</u> x si l'homomorphisme $\hat{\mathcal{O}}_{Y,y} \to \hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ qu'il définit est un isomorphisme. On voit donc qu'<u>en géométrie</u>

analytique (contrairement à ce qui a lieu en géométrie algébrique) "étale en x" est synonyme de "isomorphisme local en x".

COROLLAIRE 1.10. - Soit x un point d'un espace analytique X. Pour que l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ soit régulier, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage ouvert U de x isomorphe à un ouvert V d'un $\underset{\sim}{E}^n$ (On dit alors que x est un point simple de X).

Il n'y a qu'à prouver la **nécessité**, puisqu'on sait déjà que l'anneau local d'un point d'un $\underset{\sim}{E}^n$ est régulier, i. e. son complété est isomorphe à une algèbre de séries formelles sur k. Supposons donc $\mathcal{O}_{X,x}$ régulier, soient $f_1, \dots, f_n$ des éléments de son idéal maximal m formant une base modulo m^2, et désignons encore par les mêmes lettres des sections de $\mathcal{O}_X$ sur un voisinage ouvert U de x correspondants à ces germes. En vertu de [1], III, 1.1, les f_i définissent un morphisme $f : U \to \underset{\sim}{E}^n$ tel que $f(x) = y$ soit l'origine de $\underset{\sim}{E}^n$, et par construction f_x^* transforme les z_{iy} en les f_{ix}, donc (comme on a là des systèmes réguliers de générateurs pour les idéaux maximaux), induit un isomorphisme pour les complétés $\hat{\mathcal{O}}_{Y,y} \to \hat{\mathcal{O}}_{X,x}$. Donc en vertu de (1.9), f est un isomorphisme local en x, i. e. à condition de rétrécir U, définit un isomorphisme de U sur un ouvert V de $\underset{\sim}{E}^n$.

C. Q. F. D.

REMARQUE 1.11. - On prouverait de même, par application de (1.9), l'énoncé suivant : soient X un espace analytique, x un point de X, $f : X \to \underset{\sim}{E}^n$ un morphisme tel que $f(x) = y$ soit l'origine de $\underset{\sim}{E}^n$, i. e. tel que les composantes f_i de f aient des germes f_{ix} dans l'idéal maximal m_x de $\mathcal{O}_{X,x}$. Pour que f soit une immersion fermée en x, il faut et il suffit que les f_{ix} engendrent m_x, i. e. que leurs images engendrent l'espace vectoriel m_x/m_x^2.

2. Morphismes plats.

Rappelons la définition suivante :

DÉFINITION 2.1. - Soit $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces annelés, $\mathcal{F}$ un Module sur X, $x \in X$ et $y = f(x)$. On dit que $\mathcal{F}$ est **f-plat** en x, ou $\mathcal{F}$ est plat sur Y en x, si $\mathcal{F}_x$ est un $\mathcal{O}_{Y,y}$-module plat ([3], Chap. 0, § 6 et [2], IV). Si cette condition est vérifiée pour tout $x \in X$, on dit que $\mathcal{F}$ est **f-plat** ou encore que $\mathcal{F}$ est plat sur Y. Dans le cas où $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$, on dit aussi que f est plat en x (resp. que f est plat, ou que X est plat sur Y en x, resp. que X est plat sur Y).

Nous admettrons sans référence les propriétés élémentaires de la notion de platitude, rappelées dans loco citato, et leurs traductions en langage d'espaces annelés. Ainsi, si $\mathfrak{F}$ est **f-plat,** alors le foncteur $\mathcal{G} \rightsquigarrow \mathfrak{F} \otimes f^*(\mathcal{G})$ des Modules sur Y dans les Modules sur X est **non seulement exact** à droite, **mais exact, i. e.** il transforme aussi monomorphismes en monomorphismes. En particulier, si f est un morphisme plat, le foncteur image inverse de Modules par f est exact. Si on a une suite exacte de Modules $0 \to \mathfrak{F}' \to \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}'' \to 0$ sur X, et si $\mathfrak{F}''$ est f-plat, alors pour tout Module $\mathcal{G}$ sur Y, la suite

$$0 \to \mathfrak{F}' \otimes f^*(\mathcal{G}) \to \mathfrak{F} \otimes f^*(\mathcal{G}) \to \mathfrak{F}'' \otimes f^*(\mathcal{G}) \to 0$$

est encore exacte. Explicitons aussi la propriété de transitivité :

PROPOSITION 2.2. - Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ des morphismes d'espaces annelés, $\mathfrak{F}$ un Module sur X, x un point de X, et $y = f(x)$, $z = g(y)$. Si g est plat en y, et si $\mathfrak{F}$ est f-plat en x, alors $\mathfrak{F}$ est gf-plat en x.

Nous nous limitons pour la suite au cas des morphismes d'espaces analytiques $f : X \to Y$ et des Modules de présentation finie F sur X. Alors $\mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est un homomorphisme d'anneaux locaux noethériens, et $\mathfrak{F}_x$ est un module de type fini sur $\mathcal{O}_{X,x}$, et la situation est justiciable des résultats de [2], IV, n° 5. En particulier, le théorème 5.6 et le corollaire 5.8 de loco citato s'appliquent, et donnent le lemme suivant :

LEMME 2.3. - Soient $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces analytiques, $\mathfrak{F}$ un Module de présentation finie sur X, x un point de X et $y = f(x)$. Pour que $\mathfrak{F}$ soit f-plat en x, il faut et il suffit que pour tout entier n, le module

$$\hat{\mathfrak{F}}_x \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_{Y,y}} \hat{\mathcal{O}}_{Y,y}/\hat{\mathfrak{m}}_y^{n+1} = \hat{\mathfrak{F}}_x/\hat{\mathfrak{m}}_y^{n+1}\hat{\mathfrak{F}}_x \quad \text{sur} \quad \hat{\mathcal{O}}_{Y,y}/\hat{\mathfrak{m}}_y^{n+1}$$

soit plat (ou encore, libre).

[N. B. - $\hat{F}_x$ désigne le complété de F_x en tant que module sur $\mathcal{O}_{X,x}$].

Nous allons en déduire :

PROPOSITION 2.4. - Soient $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces analytiques, $\mathfrak{F}$ un Module de présentation finie sur X, $Y' \to Y$ un morphisme d'espaces analytiques,

$f' : X' = X \times_Y Y' \to Y'$ le morphisme déduit de f par changement de base, $\mathcal{F}'$ le Module sur X' image inverse de $\mathcal{F}$, x' un point de X', x, y, y' ses images dans X, Y, Y'. Si $\mathcal{F}$ est f-plat en x, alors $\mathcal{F}'$ est f'-plat en x'.

Considérons le diagramme d'anneaux locaux complets

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathcal{O}}_x & \longrightarrow & \hat{\mathcal{O}}_{x'} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \hat{\mathcal{O}}_y & \longrightarrow & \hat{\mathcal{O}}_{y'} \end{array} ,$$

le module $\hat{\mathcal{F}}_x$ sur $\hat{\mathcal{O}}_x$ et le module $\hat{\mathcal{F}}'_{x'}$ sur $\hat{\mathcal{O}}_{x'}$, qui s'identifie au module déduit de $\mathcal{F}_x$ par l'extension de base $\hat{\mathcal{O}}_x \to \hat{\mathcal{O}}_{x'}$ (se rappelant que l'opération de complétion d'un module de type fini sur un anneau local noethérien s'interprète aussi comme l'extension de base de l'anneau donné à son complété). En vertu de [1], III, 3.1, le diagramme d'anneaux envisagé identifie $\hat{\mathcal{O}}_{x'}$ à un produit tensoriel complété de $\hat{\mathcal{O}}_x$ et $\hat{\mathcal{O}}_{y'}$ sur $\hat{\mathcal{O}}_y$, donc pour tout n, $\hat{\mathcal{O}}_{x'}/\hat{m}_{y'}^{n+1}\hat{\mathcal{O}}_{x'}$ est un produit tensoriel complété de $\hat{\mathcal{O}}_x$ et $\hat{\mathcal{O}}_{y'}/\hat{m}_{y'}^{n+1}$ sur $\hat{\mathcal{O}}_y$, donc aussi un produit tensoriel ordinaire puisque $\hat{\mathcal{O}}_{y'}/\hat{m}_{y'}^{n+1}$ est fini sur $\hat{\mathcal{O}}_y$. Comme la platitude d'un module se conserve par l'extension de la base, donc celle de $\hat{\mathcal{F}}_x$ sur $\hat{\mathcal{O}}_y$ se conserve par l'extension de la base $\hat{\mathcal{O}}_y \to \hat{\mathcal{O}}_{y'}/\hat{m}_{y'}^{n+1}$, il s'ensuit que $\hat{\mathcal{F}}_{x'}/\hat{m}_{y'}^{n+1}\hat{\mathcal{F}}_{x'}$ est un module plat sur $\hat{\mathcal{O}}_{y'}/\hat{m}_{y'}^{n+1}$ pour tout n. Donc $\mathcal{F}_{x'}$ est plat sur $\mathcal{O}_{y'}$ en vertu de (2.3).

COROLLAIRE 2.5. – Sous les conditions préliminaires de (2.4), supposons que l'homomorphisme $\hat{\mathcal{O}}_y \to \hat{\mathcal{O}}_{y'}$ soit injectif (ce qui est le cas par exemple si $\mathcal{O}_{y'}$ est plat sur $\mathcal{O}_y$). Si $\mathcal{F}'$ est f'-plat en x', alors $\mathcal{F}$ est f-plat en x.

Le fait que l'homomorphisme $\hat{\mathcal{O}}_y \to \hat{\mathcal{O}}_{y'}$ soit injectif, i. e. que l'intersection des images inverses I_n dans $\hat{\mathcal{O}}_y$ des $\hat{m}_{y'}^{n+1}$ est nulle, implique (par un résultat bien connu de linéaire compacité) que ces images inverses tendent vers 0 dans $\mathcal{O}_y$. Utilisant encore le critère (2.3), on est ramené à prouver que $\hat{\mathcal{F}}_x/I_n\hat{\mathcal{F}}_x$ est plat sur $\hat{\mathcal{O}}_y/I_n$, sachant que le module $\hat{\mathcal{F}}_{x'}/\hat{m}_{y'}^{n+1}\hat{\mathcal{F}}_{x'}$ sur $\hat{\mathcal{O}}_{y'}/\hat{m}_{y'}^{n+1}$ qu'on en déduit par extension de la base l'est. Cela résulte évidemment du lemme suivant :

LEMME 2.5. – Soient A un anneau, m un idéal nilpotent de A, M un A-module, $A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux <u>injectif</u>. On suppose M/mM libre sur

A/m (ce qui est le cas si m est maximal), et $M \otimes_A A'$ plat sur A'. Alors M est libre sur A.

DÉMONSTRATION du lemme. - En relevant une base de M/mM sur A/m en des éléments de M, on trouve un homomorphisme de A-modules

$$u : L \to M \quad ,$$

avec L libre, tel que l'homomorphisme correspondant $L/mL \to M/mM$ soit un isomorphisme. Il en résulte déjà, m étant nilpotent, que u est surjectif. D'ailleurs l'homomorphisme $u' : L \otimes_A A' \to M \otimes_A A'$ déduit de u par extension de la base, est tel que après réduction $\mathrm{mod}\, mA' = m'$, il devient un isomorphisme. Comme $L \otimes_A A'$ et $M \otimes_A A'$ sont des A'-modules plats, on en conclut que l'homomorphisme pour les gradués associés pour la filtration m'-adique est un isomorphisme, donc u' est un isomorphisme puisque m' est nilpotent. Donc les éléments du noyau de $u : L \to M$ donnent 0 dans $L \otimes_A A'$, donc sont nuls puisque (L étant libre et $A \to A'$ injectif) $L \to L \otimes_A A'$ est injectif. Donc u est injectif, donc bijectif, donc M est libre,

C. Q. F. D.

REMARQUE 2.6. - Il est plausible que si $A \to B$ est un homomorphisme injectif d'algèbres analytiques, alors l'homomorphisme $\hat{A} \to \hat{B}$ correspondant est également injectif.

REMARQUE 2.7. - Nous laissons au lecteur le soin de donner la traduction, dans le cadre des espaces analytiques, des autres corollaires de [2], IV, 5.6, en particulier (5.9) (dont nous n'aurons probablement pas à nous servir dans ce Séminaire). Par contre, les résultats dans loco citato, n° 6, démontrés dans le cadre de la géométrie algébrique, soulèvent pour les espaces analytiques des problèmes non triviaux que le conférencier n'a pas résolus :

a. Soient $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces analytiques, $\mathfrak{F}$ un Module de présentation finie sur X. Est-il vrai que l'ensemble Z des points de X, en lesquels $\mathfrak{F}$ n'est pas f-plat, est un sous-ensemble analytique fermé, i. e. est l'ensemble sous-jacent à un sous-espace analytique fermé de X ?

b. Avec les notations précédentes, supposant F f-plat, et $\mathrm{supp}\, F = X$, est-il vrai que le morphisme f est une application ouverte ? On peut seulement dire pour l'instant que, pour tout $x \in X$, posant $y = f(x)$, l'application canonique de

$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_x)$ dans $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_y)$ est surjective (i. e. tout idéal premier de $\mathcal{O}_y$ est image inverse d'un idéal premier de $\mathcal{O}_x$) ; j'ignore si cette propriété d'un morphisme f en un point x implique (comme c'est le cas en géométrie algébrique, pour un morphisme de type fini de préschémas noethériens) que f transforme tout voisinage de x en un voisinage de y .

3. Morphismes simples.

THÉORÈME 3.1. - Soient $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces analytiques, x un point de X , $y = f(x)$. Les conditions qui suivent sont équivalentes :

(i) f est plat en x (Cf. 2.1), et x est un point simple (1.10) de la fibre $f^{-1}(y)$.

(ii) On a un isomorphisme de $\hat{\mathcal{O}}_y$-algèbres

$$\hat{\mathcal{O}}_x = \hat{\mathcal{O}}_y[[t_1 , \dots , t_n]] \quad .$$

(iii) Il existe un voisinage ouvert V de y , un voisinage ouvert U de x au-dessus de V, un ouvert W d'un espace $\underset{\sim}{E}^n$, enfin un V-isomorphisme

$$U \xrightarrow{\sim} V \times W \quad .$$

(iv) Pour tout espace analytique Y' sur Y , tout sous-espace analytique Y'_o de Y' , tout Y-morphisme $f_o : Y'_o \to X$ et tout $y' \in Y'_o$, il existe un Y-morphisme f d'un voisinage ouvert V' de y' dans Y' qui prolonge $f_o | V' \cap Y'_o$.

(iv bis) Pour tout espace analytique Y' sur Y , réduit à un point y' dont l'anneau local A est artinien, tout sous-espace analytique Y'_o de Y' défini par un idéal I de A de carré nul, et tout Y-morphisme $f_o : Y'_o \to X$, il existe un Y-morphisme $f : Y' \to X$ qui prolonge f_o .

DÉMONSTRATION. - Nous allons démontrer les implications

$$\text{(iii)} \implies \text{(iv)} \implies \text{(iv bis)} \implies \text{(ii)} \implies \text{(iii) et (i)} \iff \text{(ii)} .$$

L'implication (iv) $\implies$ (iv bis) est triviale.

(iii) $\implies$ (iv). On est ramené au cas où $X = Y \times \underset{\sim}{E}^n$, alors un Y-morphisme de Y'_o dans X , ou ce qui revient au même un morphisme de Y'_o dans $\underset{\sim}{E}^n$, est donné par n sections $(f_o)_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ de $\mathcal{O}_{Y'_o}$; ces dernières proviennent, au voisinage de y' dans Y'_o de sections f_i^o $(1 \leqslant i \leqslant n)$ de $\mathcal{O}_{Y'}$ sur un voisinage ouvert V' de y' dans Y' , définissant à leur tour un Y-morphisme $f : V' \to X$, qui est le morphisme cherché.

(N. B. - On montrerait de façon toute analogue l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iv bis), qui ici cependant va résulter des autres implications annoncées).

(ii) $\Longrightarrow$ (i). On le voit par exemple en utilisant le fait qu'un produit de modules plats sur un anneau noethérien A est plat, ce qui implique que $B = A[[t_1 , \dots , t_n]]$ est un A-module plat. Si A est local d'idéal maximal m , alors $B/mB \cong k[[t_1 , \dots , t]]$ est un anneau local régulier, ce qui achève de prouver (i).

(i) $\Longrightarrow$ (ii). Relevons les éléments d'un système régulier de générateurs de l'idéal maximal de $\mathcal{O}_x/m_y \mathcal{O}_x$ en des éléments f_i $(1 \leq i \leq n)$ de $\mathcal{O}_x$, d'où un homomorphisme de $\mathcal{O}_y$-algèbres :

$$u : B = \hat{\mathcal{O}}_y[[t_1 , \dots , t_n]] \to \hat{\mathcal{O}}_x$$

transformant les t_i en les f_i . Par construction, l'homomorphisme correspondant $B/\hat{m}_y B \to \mathcal{O}_x/\hat{m}_y \hat{\mathcal{O}}_x$ est un isomorphisme, et comme B et $\mathcal{O}_x$ sont plats sur $\mathcal{O}_y$, l'homomorphisme déduit de u par passage aux gradués associés à la filtration m_y-adique, est un isomorphisme également. On en conclut que u est lui-même un isomorphisme.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Dans la construction précédente, les f_i proviennent de sections, également notées f_i , de $\mathcal{O}_X$ sur un voisinage ouvert U de x . Ces sections définissent donc un Y-morphisme

$$f : U \to Y \times \underset{\sim}{E}^n = Z \qquad ,$$

et posant $z = f(x)$, le raisonnement précédent montre que f définit un isomorphisme $\hat{\mathcal{O}}_{Z,z} \xrightarrow{\sim} \hat{\mathcal{O}}_{X,x}$. En vertu de (1.9), f est donc un isomorphisme local en x , d'où aussitôt la conclusion voulue.

(iv bis) $\Longrightarrow$ (ii). L'hypothèse signifie aussi ceci : soit $A = \hat{\mathcal{O}}_y$, $B = \hat{\mathcal{O}}_x$; pour tout anneau local artinien D fini sur A , et tout idéal I de D de carré nul, tout A-homomorphisme $B \to D/I$ se relève en un A-homomorphisme $B \to D$. Soit alors m l'idéal maximal de A , n celui de B , considérons

$$V = n/(n^2 + mB) \qquad ,$$

et l'anneau des séries formelles par rapport aux éléments d'une base de V :

$$C = A[[t_1 , \dots , t_n]] \quad .$$

On a donc un homomorphisme

$$B \to C/(\mathfrak{n}_1^2 + \mathfrak{m}C)$$

(où $\mathfrak{n}_1$ est l'idéal maximal de C), induisant un isomorphisme

$$(*) \qquad \mathfrak{n}/(\mathfrak{n}^2 + \mathfrak{m}B) \to \mathfrak{n}_1/(\mathfrak{n}_1^2 + \mathfrak{m}C) \quad .$$

Utilisant l'hypothèse (iv bis), on peut relever de proche en proche cet homomorphisme en un homomorphisme

$$u : B \to C = A[[t_1 , \dots , t_n]] \quad ,$$

induisant un isomorphisme (*). Or on vérifie sans difficulté qu'un tel homomorphisme est nécessairement un isomorphisme (Cf. [2], III, 2.2).

Cela achève la démonstration de 3.1.

DÉFINITION 3.2. - Si les conditions équivalentes de (3.1) sont vérifiées, on dit que f est simple en x . On dit que le morphisme f est simple, s'il est simple en tout point x .

COROLLAIRE 3.3. - L'ensemble des points $x \in X$ en lesquels le morphisme f est simple est ouvert.

Cela résulte en effet du critère (iii).

REMARQUES 3.4. - Les critères (iii) et (iii bis) de simplicité s'expriment directement par une propriété d'exactitude du foncteur contravariant de $(An)_{/Y}$ dans la catégorie des ensembles, représenté par l'objet X de $(An)_{/Y}$. C'est ce qui explique l'importance de la notion de simplicité pour la théorie des modules. La condition (iv bis), de nature infinitésimale, s'exprime en pratique par la nullité de certaines classes d'obstruction, garantie souvent par la nullité de certains espaces de cohomologie (Cf. exposé suivant).

3.5. - L'entier n qui intervient dans le critère (ii) (resp. (iii)) est le même, et bien déterminé, étant égal à la dimension de l'anneau local de x dans la fibre $f^{-1}(y)$. On l'appelle la <u>dimension relative</u> de X sur Y en x .

PROPOSITION 3.6.

(i) Si f est un isomorphisme local en x, c'est un morphisme simple en x de dimension relative 0 en x.

(ii) Soit e l'objet final de (An). Pour que l'unique morphisme $f : X \to e$ d'un espace analytique X dans e soit simple au point x, il faut et il suffit que x soit un point simple de X (Cf. 1.10).

(iii) Soit $f : X \to Y$ un **morphisme** simple au point x, et $Y' \to Y$ un morphisme de changement de base, alors le morphisme correspondant $f' : X' = X \times_Y Y' \to Y'$ est simple en tout point x' de X' au-dessus de x.

(iv) Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ des morphismes d'espaces analytiques, x un point de X, $y = f(x)$. Si f est simple en x, et g est simple en y, fg est simple en x.

La démonstration est immédiate par n'importe lequel des critères de simplicité, et laissée au lecteur. On conclut, par exemple, de (iii) et (iv) :

COROLLAIRE 3.7. - Soient X et Y deux espaces analytiques simples sur un espace analytique S, alors $X \times_S Y$ est aussi simple sur S.

Soient X un espace analytique, x un point de X. On appelle <u>espace cotangent</u> à X en x l'espace vectoriel m_x/m_x^2 (où m_x est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_x$), <u>espace tangent</u> à X en x le dual du précédent. Si $f : X \to Y$ est un morphisme d'espaces analytiques, et si $y = f(x)$, on déduit de l'homomorphisme $f_x^* : \mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_x$ une application canonique $f_x : m_y/m_y^2 \to m_x/m_x^2$ pour les espaces cotangents, d'où par transposition une application canonique $f'^*_x : T_x(X) \to T_y(Y)$ pour les espaces tangents, appelée <u>application tangente à</u> f <u>en</u> x. Ceci posé :

PROPOSITION 3.8. - Soient $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces analytiques, x un point de X, $y = f(x)$, et supposons X simple en x et Y simple en y (Cf. 1.10). Pour que f soit simple en x, il faut et il suffit que l'application tangente à f en x soit <u>surjective</u>.

Cette condition signifie aussi que l'application cotangente $m_y/m_y^2 \to m_x/m_x^2$ est injective. La nécessité de cette condition se voit aussitôt sur le critère (3.1), (ii). Pour la suffisance, on considère des $f_i \in m_y$ formant une base mod m_y^2 $(1 \leqslant i \leqslant p)$, on peut alors compléter la suite de leurs images g_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ dans m_x par des g_i $(p + 1 \leqslant i \leqslant p + n)$ formant une base de m_x mod m_x^2.

Comme $\mathcal{O}_x$ et $\mathcal{O}_y$ sont réguliers, on obtient ainsi des isomorphismes

$$\hat{\mathcal{O}}_y \simeq k[[t_1 , \dots , t_p]] , \quad \hat{\mathcal{O}}_x = k[[t_1 , \dots t_p , \dots , t_{p+n}]] ,$$

définissant un isomorphisme de $\hat{\mathcal{O}}_y$-algèbres

$$\hat{\mathcal{O}}_x \simeq \hat{\mathcal{O}}_y[[t_{p+1} , \dots t_{p+n}]] ,$$

donc le critère (3.1), (ii), est bien vérifié.

REMARQUE 3.9. - C'est l'hypothèse de surjectivité pour l'application tangente d'un morphisme d'espaces analytiques simples $f : X \to Y$, qui sert à KODAIRA-SPENCER de définition de la notion de "famille complexe de variétés analytiques". Il y a intérêt à lui substituer la notion de morphisme simple introduite ici, qui garde un sens raisonnable sans hypothèse de non singularité sur l'espace analytique de base Y. Dans la plupart des problèmes de modules, les espaces modulaires peuvent avoir des singularités arbitraires, ce qui montre l'importance de disposer de notions de régularité "relatives" d'un espace analytique X sur un autre Y, qui ne fassent appel à aucune condition de régularité pour Y. Le plus souvent, il y a lieu (dans les questions de variations de structures complexes) d'imposer à f d'être un morphisme plat, plus des conditions de régularité sur les fibres de f (par exemple, pour obtenir la notion de morphisme simple, on exigera que les fibres soient des espaces analytiques non singuliers. Cf. critère (3.1), (i)).

BIBLIOGRAPHIE

[1] GROTHENDIECK (Alexander). - Techniques de construction en Géométrie analytique, II et III., Séminaire Cartan, t. 13, 1960/61, n° 9, 14 p. et n° 10, 11 p.

[2] GROTHENDIECK (Alexander). - Séminaire de Géométrie algébrique, n° III et IV. - Paris, Institut des hautes Etudes scientifiques, 1960.

[3] GROTHENDIECK (A.) et DIEUDONNÉ (J.). - Éléments de géométrie algébrique. - Paris, Presses universitaires de France, 1960 (Institut des hautes Etudes scientifiques, Publications mathématiques, 4).