Alexander Grothendieck

Techniques de construction en géométrie analytique. II. Généralités sur les espaces annelés et les espaces analytiques

Séminaire Henri Cartan, tome 13, nº 1 (1960-1961), exp. nº 9, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1960-1961__13_1_A5_0>

16 janvier 1961

TECHNIQUES DE CONSTRUCTION EN GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

par Alexander GROTHENDIECK

II. GÉNÉRALITÉS SUR LES ESPACES ANNELÉS ET LES ESPACES ANALYTIQUES

INTRODUCTION. - Dans les prochains exposés, nous allons esquisser, aussi rapidement que possible, la partie plus ou moins formelle des fondements de la Géométrie analytique dont nous aurons besoin pour pouvoir formuler les problèmes d'existence les plus importants, et prouver les théorèmes annoncés dans les deux exposés précédents. L'exposition sera "self-contained" à peu de choses près, mais nécessairement fort incomplète sur divers points ; par exemple le formalisme différentiel sera réduit au strict minimum pour nos besoins. Tous ces résultats seront développés sur un corps valué complet k , a priori arbitraire. Des résultats plus profonds, notamment la théorie (du type "Gaga") des morphismes projectifs, due à GRAUERT-REMMERT, et le théorème de finitude de Grauert, sont par contre spéciaux au cas où le corps de base est le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Ils seront rappelés sans démonstration dans un exposé ultérieur.

Nous indiquerons parfois au passage, et insérerons entre deux signes * , certaines propriétés de nature locale des espaces analytiques, généralement bien connues dans le cas $k = \mathbb{C}$ (cf.[4] et [3]), et pour lesquels il serait désirable d'avoir un exposé simplifié, utilisant les méthodes de l'algèbre locale et tenant compte du cadre élargi de la Géométrie analytique. Nous n'aurons pas besoin de la plupart de ces résultats pour notre objet immédiat, qui est de développer certains théorèmes d'existence globaux en même temps que le langage où ils puissent se formuler ; on espère néanmoins qu'ils pourront faire l'objet d'un exposé ultérieur dans ce Séminaire. La liste de ceux de ces résultats dont nous aurons besoin se réduit, semble-t-il, à ceci (cf. [4] et [3]) :

a. L'anneau $A_n = k\{t_1 , \ldots , t_n\}$ des séries convergentes en n variables est un anneau local noethérien, dont le complété est isomorphe à l'anneau des séries formelles en les t_i ;

b. Soit $A \to B$ un homomorphisme d'algèbres locales analytiques sur k (i. e. isomorphes à des quotients non nuls d'anneaux A_n), tel que l'anneau complété $\hat{B}$ soit un module de type fini sur l'anneau complété $\hat{A}$ (on dit que B est quasi-fini sur A). Alors B est un module de type fini sur A ;

c. Le faisceau des fonctions analytiques dans l'espace k^n est un faisceau cohérent d'anneaux (Nous éviterons d'ailleurs aussi longtemps que possible de nous servir de ce dernier résultat).

1. Espaces annelés.

Rappelons qu'on appelle espace annelé un espace topologique X muni d'un faisceau d'anneaux, que nous noterons $\mathcal{O}_X$. Nous nous bornons ici au cas de faisceaux d'anneaux commutatifs. Un morphisme d'un espace annelé $(X , \mathcal{O}_X)$ dans un espace annelé $(Y , \mathcal{O}_Y)$ est par définition un couple $(f_o , f_1) = f$ formé d'une application continue

$$f_o : X \rightarrow Y$$

et d'un f_o-homomorphisme de faisceaux d'anneaux

$$f_1 : \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X \quad ,$$

i. e. d'un homomorphisme de faisceaux d'anneaux

$$f_1 : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_{o*}(\mathcal{O}_X) \quad ,$$

dont la donnée équivaut aussi à la donnée d'un homomorphisme de faisceaux d'anneaux

$$f_o^{-1}(\mathcal{O}_Y) \rightarrow \mathcal{O}_X \quad .$$

De cette façon, les espaces annelés sont les objets d'une catégorie, la catégorie des espaces annelés ; la composition des morphismes est définie de façon évidente.

On appelle espace annelé en anneaux locaux un espace annelé $(X , \mathcal{O}_X)$ tel que les fibres du faisceau structural $\mathcal{O}_X$ soient des anneaux locaux. On appelle morphisme d'espaces annelés en anneaux locaux d'un espace annelé en anneaux locaux $(X , \mathcal{O}_X)$ dans un autre $(Y , \mathcal{O}_Y)$, un morphisme $f = (f_o , f_1)$ d'espaces annelés, tel que, pour tout $x \in X$, posant $y = f_o(x)$, l'homomorphisme correspondant

$$f_1 : \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

soit un homomorphisme local d'anneaux locaux, i. e. applique l'idéal maximal dans l'idéal maximal. De cette façon, les espaces annelés en anneaux locaux forment une sous-catégorie (non pleine) de la catégorie des espaces annelés.

Il est d'usage de désigner par une même lettre un espace annelé et l'espace topologique (ou l'ensemble) sous-jacent, ou un morphisme d'espaces annelés et l'application ensembliste sous-jacente. On fera attention cependant qu'en général un morphisme d'espaces annelés $f = (f_o , f_1)$ n'est nullement déterminé par la connaissance de f_o (comme on voit en prenant les espaces sous-jacents à X et Y réduits à un point). C'est là le trait le plus saillant qui distingue la géométrie algébrique ou analytique "avec éléments nilpotents" de l'ancienne géométrie, où les faisceaux structuraux étaient toujours supposés réalisés comme des faisceaux d'applications dans un corps donné.

Soit X un espace annelé ; on appelle Module sur X un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules. Ils forment une catégorie abélienne. Si $f : X \to Y$ est un morphisme d'espaces annelés, le foncteur image directe de faisceaux

$$F \rightsquigarrow f_*(F)$$

induit un foncteur de la catégorie des X-Modules dans la catégorie des Y-Modules. On définit le foncteur image inverse de Modules comme l'adjoint du précédent, par la formule

$$\mathrm{Hom}_Y(G , f_*(F)) = \mathrm{Hom}_X(f^*(G) , F)$$

(isomorphisme de bifoncteurs en F , G) . Cette opération est liée à l'opération habituelle image inverse de faisceaux, notée f^{-1} , par la formule

$$f^*(G) = f^{-1}(G) \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)} \mathcal{O}_X \quad .$$

Sur cette formule, on reconnaît que le foncteur image inverse de Modules est exact à droite (ce qui est trivial aussi du fait que c'est un adjoint) ; on fera attention qu'il n'est pas en général exact à gauche, i. e. ne transforme pas en général monomorphisme en monomorphisme. Il en est ainsi toutefois si on suppose que le morphisme f est plat, i. e. que pour tout $x \in X$, $\mathcal{O}_{X,x}$ est un module plat sur l'anneau $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$. En particulier, si $\mathcal{J}$ est un Idéal de Y , i. e. un sous-Module de $\mathcal{O}_Y$, alors il n'est pas vrai en général que l'homomorphisme

$$f^*(\mathcal{J}) \to f^*(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_X$$

déduit de l'injection $\mathcal{J} \to \mathcal{O}_Y$ soit un monomorphisme. L'image de $f^*(\mathcal{J})$ dans $\mathcal{O}_X$ sera parfois notée $f^*(\mathcal{J}).\mathcal{O}_X$ ou simplement $\mathcal{J}.\mathcal{O}_X$, cette dernière notation se justifiant en remarquant que pour tout $x \in X$, la fibre de $f^*(\mathcal{J})\, \mathcal{O}_X$ en x n'est autre que $\mathcal{J}_y\, \mathcal{O}_{X,x}$, où $\mathcal{O}_{X,x}$ est considéré comme un module sur $\mathcal{O}_{Y,y}$ (et où $y = f(x)$).

Soit U un ouvert d'un espace annelé X ; munissons-le du faisceau d'anneaux induit $\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_X|U$; alors U devient un espace annelé dit <u>induit sur</u> l'ouvert U de l'espace annelé X . On dit aussi que U est un <u>sous-espace ~~analytique~~ annelé ouvert</u> de X . Il est muni d'un morphisme évident d'espaces annelés $i : U \longrightarrow X$.

Soit $\mathcal{J}$ un Idéal sur l'espace annelé X ; considérons $Y = \mathrm{supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J})$ et munissons Y du faisceau d'anneaux induit par $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$. On obtient un espace annelé, appelé le <u>sous-espace annelé de</u> X <u>défini par</u> $\mathcal{J}$. On appelle <u>sous-espace annelé fermé</u> de X un espace annelé défini de cette façon. On voit que ces espaces annelés correspondent biunivoquement aux Idéaux $\mathcal{J}$ sur X . Si $\mathrm{supp}\, X = X$, alors X peut être considéré comme le sous-espace annelé fermé défini par $\mathcal{J} = 0$. D'autre part, si $\mathcal{J} = \mathcal{O}_X$, on trouve le sous-espace annelé vide de X . Lorsque X est annelé en anneaux locaux, il en est de même de ses sous-espaces annelés.

Soit Y un sous-espace annelé fermé de X ; on a alors un morphisme canonique

$$i : Y \to X$$

dont la définition est évidente, et qui est d'ailleurs un morphisme d'espaces annelés en anneaux locaux lorsque X (donc Y) est annelé en anneaux locaux. L'application ensembliste sous-jacente à i est l'injection canonique de Y dans X , donc est injective, et les homomorphismes

$$\mathcal{O}_{X,i(y)} \to \mathcal{O}_{Y,y}$$

sont les homomorphismes canoniques sur les quotients, donc surjectifs. Il s'ensuit aussitôt que i est un <u>monomorphisme</u> dans la catégorie des espaces annelés (et a fortiori, le cas échéant, dans la catégorie des espaces annelés en anneaux locaux). On peut donc considérer Y comme un sous-objet de X dans la catégorie des espaces annelés. Si on a un morphisme quelconque d'espaces annelés

$$f : Z \to X \quad ,$$

on dira (conformément aux définitions générales) qu'il est <u>majoré</u> par le sous-espace annelé Y , s'il se factorise en $f = ig$, où $g : Z \to Y$ est un morphisme d'espaces annelés, qui est alors nécessairement unique. On vérifie aussitôt : <u>pour que</u> f <u>soit majoré par</u> Y , <u>il faut et il suffit que</u> $f^*(\mathcal{J}).\mathcal{O}_Z = 0$ <u>et que</u> $f(Z) \subset Y$, <u>cette dernière condition étant d'ailleurs superflue si</u> $\mathrm{supp}\, \mathcal{O}_X = X$.

Si d'ailleurs f est un morphisme d'espaces annelés en anneaux locaux, alors le morphisme g tel que $f = ig$ est également un morphisme d'espaces annelés en anneaux locaux, de sorte que le critère énoncé est également valable dans la catégorie des espaces annelés en anneaux locaux.

On en conclut par exemple ceci : soit Y' un autre sous-espace annelé fermé de X, défini par l'Idéal $\mathcal{J}'$; pour que $f : Z \to X$ soit majoré par Y et Y', il faut et il suffit que $f^*(\mathcal{J} + \mathcal{J}').\mathcal{O}_Z = 0$; donc le inf de deux sous-espaces annelés fermés Y, Y' de X, dans l'ensemble des sous-objets de X (dans la catégorie de tous les espaces annelés), **existe**, et est le sous-espace annelé fermé de X défini par $\mathcal{J} + \mathcal{J}'$, où $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}'$ sont les Idéaux qui définissent respectivement Y et Y'. Cet énoncé, qui détermine le produit fibré de Y et Y' au-dessus de X, peut aussi se déduire de l'énoncé suivant, qui résulte également de la caractérisation donnée plus haut des morphismes majorés par un sous-espace annelé : soient $g : X' \to X$ un morphisme d'espaces annelés, Y un sous-espace annelé de X défini par un Idéal $\mathcal{J}$ sur X, $\mathcal{J}' = g^*(\mathcal{J})\,\mathcal{O}_{X'}$ l'Idéal image inverse de $\mathcal{J}$ par g, et Y' le sous-espace annelé fermé de X' qu'il définit, i (resp. i') l'injection canonique de Y dans X (resp. de Y' dans X'), enfin $h : Y' \to Y$ le morphisme induit par gi', i. e. défini par la relation $ih = gi'$. Alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} Y & Y' \arrow[l, "h"'] \arrow[d, "i'"] \\ X \arrow[from=u, "i"'] & X' \arrow[l, "g"] \end{tikzcd}$$

fait de Y' le produit fibré de Y et X' au-dessus de X (dans la catégorie des espaces annelés, donc aussi dans la catégorie des espaces annelés en anneaux locaux si g est un morphisme d'espaces annelés en anneaux locaux). On dit aussi que Y' est le sous-espace annelé fermé de X', image inverse du sous-espace annelé Y de X par le morphisme g.

Les résultats analogues sont valables pour les sous-espaces annelés ouverts. Nous en laissons l'énoncé au lecteur.

On appelle sous-espace annelé d'un espace annelé X un espace annelé Y dont l'espace topologique sous-jacent est une partie localement fermée A de X, et qui est un sous-espace annelé fermé de l'ouvert induit $U = X - (\bar{A} - A)$ (= le plus grand ouvert de X dans lequel A soit fermé). Cette notion comprend comme cas particulier celle de sous-espace annelé ouvert et de sous-espace annelé fermé, et se ramène à ces notions en vertu de sa définition. Si Y est un sous-espace annelé de X, il est muni d'un morphisme canonique

$$i : Y \to X$$

qui est encore un monomorphisme. De cette façon, on obtient une application canonique de l'ensemble des sous-espaces annelés de X, dans l'ensemble des sous-objets de X (dans la catégorie des espaces annelés), et on constate facilement à partir des définitions que cette application est injective (c'est pour qu'il en soit ainsi que nous avons introduit dans la définition un ouvert U un peu artificiel). Bien entendu, si X est annelé en anneaux locaux, les sous-espaces annelés de X sont annelés en anneaux locaux, et s'identifient à des sous-objets de X dans la catégorie des espaces annelés en anneaux locaux.

Un morphisme $f : Y \to X$ est dit un morphisme d'immersion si c'est un monomorphisme isomorphe au morphisme canonique $f' : Y' \to X$ d'un sous-espace annelé Y' de X, i. e. si on peut factoriser f en

$$f = f' g : Y \xrightarrow{g} Y' \xrightarrow{f'} X$$

où g est un isomorphisme. On dit que c'est un morphisme d'immersion fermée (resp. d'immersion ouverte) si Y' est un sous-espace annelé fermé (resp. ouvert) de Y. Pour qu'un morphisme d'immersion soit une immersion fermée, il faut et il suffit que $f(Y)$ soit une partie fermée de X, mais on fera attention que l'énoncé analogue pour les immersions ouvertes est incorrect : si f est une immersion ouverte, $f(Y)$ est ouvert mais la réciproque n'est pas vraie (même en supposant que f soit une immersion, par exemple si X et Y sont réduits à un point !). Pour qu'un morphisme $f : Y \to X$ soit une immersion, il faut et il suffit que ce soit un homéomorphisme de Y sur un sous-espace localement fermé de X, et que pour tout $y \in Y$, l'homomorphisme $\mathcal{O}_{X,f(y)} \to \mathcal{O}_{Y,y}$ défini par f soit surjectif. Pour que ce soit même une immersion ouverte (resp. fermée) il faut et il suffit que f soit un homéomorphisme de Y sur une partie ouverte de X et que les homomorphismes $\mathcal{O}_{X,f(y)} \to \mathcal{O}_{Y,y}$ soient des isomorphismes (resp. que ce soit un homéomorphisme sur une partie fermée de X, et que les homomorphismes $\mathcal{O}_{X,f(y)} \to \mathcal{O}_{Y,y}$ soient surjectifs). On en conclut aussitôt : le composé de deux immersions (resp. de deux immersions fermées, de deux immersions ouvertes) est une immersion (resp. une immersion fermée, une immersion ouverte). Cela peut être précisé aussi de la façon suivante : si Y est un sous-espace annelé de X , il y a correspondance biunivoque entre les sous-espaces annelés de Y, et les sous-espaces annelés de X majorés par Y, cette correspondance étant induite par la correspondance biunivoque générale entre sous-objets d'un sous-objet Y de X, et les sous-objets de X majorés par Y.

Enfin, réunissant des faits déjà notés dans le cas des sous-espaces annelés ouverts ou fermés, on trouve ceci : soient $i : Y \to X$ et $g : X' \to X$ des morphismes d'espaces annelés, i étant une immersion ; alors le produit fibré de Y et X' sur X, dans la catégorie des espaces annelés, existe, soit Y', et le morphisme $i' : Y' \to X'$ est une immersion. De façon précise, si Y est défini par un Idéal $\mathcal{J}$ dans un ouvert U de X, alors Y' est défini par l'Idéal $\mathcal{J}' = \mathcal{J}.\mathcal{O}_{U'}$ dans l'ouvert $U' = g^{-1}(U)$ de X'.

Pour définir ces généralités sur les espaces annelés, il faut dire quelques mots sur les conditions de finitude. Un Module $\mathcal{F}$ sur un espace annelé X est dit de type fini (resp. de présentation finie) si on peut trouver, pour tout $x \in X$, un voisinage ouvert U de x, et une suite exacte

$$\mathcal{O}_U^n \to \mathcal{F}|U \to 0 \quad ,$$

resp. une suite exacte

$$\mathcal{O}_U^m \to \mathcal{O}_U^n \to \mathcal{F}|U \to 0 \quad ,$$

où m et n sont des entiers finis. Comme le foncteur image inverse de Modules, relativement à un morphisme $f : X \to Y$ d'espaces annelés, est exact à droite, on voit qu'il transforme Modules de type fini (resp. de présentation finie) en Modules de type fini (resp. de présentation finie). On dit, avec J.-P. SERRE, qu'un Module $\mathcal{F}$ est cohérent, s'il est de type fini, et si pour tout homomorphisme

$$\mathcal{O}_U^n \to \mathcal{F}|U$$

sur un ouvert U, le noyau dudit est de type fini. Cette notion ne semble avoir d'intérêt pratique que lorsque $\mathcal{O}_X$ est un faisceau cohérent d'anneaux, i. e. est cohérent en tant que Module sur lui-même. Dans ce cas, il y a identité entre Modules cohérents et Module de présentation finie, comme il résulte du fait général que le noyau et le conoyau (donc l'image et la coimage) d'un homomorphisme de faisceaux cohérents est également cohérent [5]. Il en résulte aussi que si $\mathcal{F}$ est cohérent, les sous-faisceaux cohérents de $\mathcal{F}$ sont exactement ceux qui sont de type fini (à condition toujours que $\mathcal{O}_X$ soit cohérent) ; en particulier, si $\mathcal{O}_X$ est cohérent, les Idéaux cohérents sont les Idéaux de type fini.

REMARQUES. - Lorsque, dans la définition des Modules de présentation finie, on ramplace les entiers m, n par des ensembles d'indices I, J quelconques, on obtient la notion de Modules quasi-cohérents, importante en géométrie algébrique, qui doit être rangée parmi les notions de finitude. Nous n'en aurons probablement pas besoin dans ce Séminaire. Pour tout ce qui concerne les espaces annelés, le lecteur pourra se reporter à FAC déjà cité, et à [2], notamment le chapitre 0, paragraphes 4 et 5.

Un sous-espace annelé Y de X est dit sous-espace annelé de présentation finie (ou mieux : localement de présentation finie) si l'Idéal $\mathcal{J}$ dans $U = X - (\overline{Y} - Y)$ qui le définit est de type fini (ce qui implique que l'image directe de $\mathcal{O}_Y$ dans U est un Module de présentation finie). Un morphisme $f : Y \to X$ est dit morphisme d'immersion (localement) de présentation finie si le sous-espace annelé Y' de X image de f est de présentation finie. Ce sont là des conditions locales sur Y. On voit tout de suite que le composé de deux immersions de présentation finie est de présentation finie. En effet, on est ramené au cas d'immersions fermées, et alors cela se ramène à l'assertion suivante : soient $\mathcal{J}$ un Idéal de type fini sur X, et $\mathcal{J}'$ un Idéal le contenant tel que $\mathcal{J}'/\mathcal{J}$ soit un Idéal de type fini sur le sous-espace annelé Y de X défini par $\mathcal{J}$, ou, ce qui revient au même, soit un Module de type fini sur X. Alors $\mathcal{J}'$ est de type fini. Or cela résulte du fait qu'une extension de deux Modules de type fini est de type fini, comme on vérifie aussitôt. On voit de même, grâce au fait que la propriété "type fini" se conserve par image inverse, que l'image inverse par un morphisme $g : X' \to X$ d'une immersion de présentation finie $i : Y \to X$ est une immersion de présentation finie $i' : Y' \to X'$.

2. Définition des espaces analytiques. Morphismes.

Nous supposons donné par la suite un corps valué complet k. Soient n un entier > 0, et U un ouvert de k^n ; rappelons qu'on appelle fonction analytique sur U une application de U dans k qui est donnée, au voisinage de chaque point de U, par un développement en série entière convergent. C'est là une condition de nature locale, de sorte que, pour U variable, on obtient un sous-faisceau du faisceau des applications de k^n dans k, que l'on appelera faisceau des fonctions holomorphes sur k^n. Muni de ce faisceau, k^n devient donc un espace annelé, que nous noterons $\underset{\sim}{E}^n$. On notera que son faisceau structural $\mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^n}$ est non seulement un faisceau d'anneaux, mais un faisceau de k-algèbres. Ce fait peut aussi s'exprimer en disant qu'on a un morphisme d'espaces annelés

$$\underset{\sim}{E}^n \to e$$

où e est un espace annelé réduit à un point, et dont le faisceau structural est le faisceau constant défini par k. (D'ailleurs e est isomorphe à $\underset{\sim}{E}^o$). Par la suite, nous sous-entendrons dans $\underset{\sim}{E}^n$ cette structure supplémentaire d'espace annelé <u>au-dessus de</u> e, ou comme on dit aussi, <u>au-dessus de</u> k, i. e. la structure de k-Algèbre du faisceau structural.

Notons que pour tout $x \in X = \underset{\sim}{E}^n$, $\mathcal{O}_x$ est une <u>algèbre locale, dont le corps résiduel est isomorphe à</u> k en tant que k-algèbre, comme on constate trivialement. Rappelons aussi les faits suivants, moins faciles [cf. [3] (exposé 11) et [3] (exposé 15)] : <u>l'anneau local</u> $\mathcal{O}_x$ <u>est noethérien, et le faisceau structural</u> $\mathcal{O}_X$ <u>est cohérent</u>. Signalons tout de suite que beaucoup des développements qui vont suivre n'utilisent pas le fait que $\mathcal{O}_X$ est cohérent, et que pour cette raison il nous arrivera de préférer parler de Modules de présentation finie plutôt que de Modules cohérents, ou d'Idéaux de type fini plutôt que d'Idéaux cohérents, bien que, en l'occurrence les deux propriétés soient en fait équivalentes, et que le terme "cohérent" soit plus court et plus maniable.

DÉFINITION 2.1. - On appelle <u>espace analytique</u> sur un corps valué complet k un espace annelé en k-algèbres, tel que, pour tout point, il existe un voisinage ouvert qui soit isomorphe, pour la structure induite, à un <u>sous-espace annelé de présentation finie d'un espace</u> $\underset{\sim}{E}^n$.

REMARQUE. - On notera que nous n'exigeons pas que l'espace topologique sous-jacent soit séparé. En fait, il y a des problèmes universels intéressants dont les solutions sont des espaces analytiques non séparés. L'exemple le plus courant d'espace analytique non séparé s'obtient en partant d'un espace analytique Y et d'un point non isolé a de Y, (par exemple $Y = \underset{\sim}{E}^1$ et l'origine), et en recollant deux exemplaires de Y suivant l'ouvert $Y - (a)$ par l'application identique : dans l'espace analytique X ainsi obtenu, a définit deux points a' et a'' distincts, et tout voisinage de l'un contient l'autre. Cet exemple et ses variantes (relatives au recollement d'une famille quelconque de copies de Y, i. e. de la démultiplication de a par une famille d'indices quelconque) se rencontrent effectivement dans l'étude des espaces de Picard.

Comme exemples, donnons tout de suite les $\underset{\sim}{E}^n$ eux-mêmes, ainsi que les variétés analytiques sur k munies de leurs faisceaux de fonctions analytiques (qui peuvent être considérés comme les espaces analytiques dont tout point admet un voisinage ouvert isomorphe, pour la structure induite, à un ouvert induit d'un $\underset{\sim}{E}^n$). De plus, il résulte aussitôt de la définition qu'un sous-espace annelé de présentation finie d'un espace analytique est également un espace analytique. En particulier, pour tout ouvert U d'un espace analytique X , U est un espace analytique pour la structure induite ; et pour tout Idéal $\mathcal{J}$ de type fini sur X , le sous-espace annelé de X qu'il définit est également un espace analytique.

DÉFINITION 2.2. - Soit X un espace analytique. On appelle sous-espace analytique de X tout sous-espace annelé de présentation finie de X .

On voit donc ce qu'il faut entendre par sous-espace analytique ouvert, resp. fermé, de X . Ils sont en correspondance biunivoque avec les parties ouvertes de X , resp. avec les Idéaux $\mathcal{J}$ de type fini sur X .

De la définition et des propriétés que nous avons rappelées pour les modèles $\underset{\sim}{E}^n$ résulte aussitôt :

PROPOSITION 2.3. - Soit X un espace analytique. Alors :

a. Pour tout $x \in X$, l'anneau $\mathcal{O}_x$ est une algèbre locale noethérienne, dont le corps résiduel est isomorphe à k en tant que k-algèbre.

b. $\operatorname{Supp} \mathcal{O}_X = X$.

c. Le faisceau structural $\mathcal{O}_X$ est cohérent.

Nous éviterons de nous servir sans nécessité de ce dernier fait.

DÉFINITION 2.4. - Soient X et Y deux espaces analytiques. On appelle morphisme de X dans Y tout morphisme d'espaces annelés en k-algèbres de X dans Y .

Cette définition n'est raisonnable qu'à cause du résultat suivant (signalé par SERRE) :

PROPOSITION 2.5. - Un morphisme d'espaces analytiques est un morphisme d'espaces annelés en anneaux locaux.

Cela résulte aussitôt du

LEMME 2.6. - Soient A , B deux anneaux locaux qui sont des algèbres sur un corps k , et soit $u : A \to B$ un k-homomorphisme. Supposons que le corps résiduel de B soit k-isomorphe à k . Alors u est un homomorphisme local, et le corps résiduel de A est k-isomorphe à k .

Soit en effet ε l'homomorphisme canonique de B sur son corps résiduel, identifié à k . Alors εu est un k-homomorphisme de A dans k , dont le noyau est donc un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A tel que $A/\mathfrak{m}$ soit k-isomorphe à k . Comme A est local, $\mathfrak{m}$ est son unique idéal maximal, d'où la conclusion.

Ainsi, les espaces analytiques sont les objets d'une catégorie, la catégorie des espaces analytiques, qu'on peut considérer indifféremment comme une sous-catégorie pleine de la catégorie des espaces annelés au-dessus de k , ou des espaces annelés en anneaux locaux au-dessus de k .

EXEMPLE 2.7. - Soient U un ouvert de k^n , et f une application de U dans k^m qui est analytique, i. e. dont les composantes f_i $(1 \leq i \leq m)$ sont des fonctions analytiques dans U . Considérons le f-homomorphisme de faisceaux d'algèbres

$$f^* : \mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^m} \to \mathcal{O}_U$$

(où U est muni du faisceau induit par le faisceau structural de $\underset{\sim}{E}^n$), défini par

$$f^*(g) = g \circ (f|f^{-1}(V))$$

pour toute section de $\mathcal{O}_{E^m}$ sur un ouvert V , i. e. toute application analytique g de V dans k . On obtient ainsi un morphisme d'espaces annelés en algèbres, i. e. un morphisme d'espaces analytiques

$$\psi(f) : U \to \underset{\sim}{E}^m \quad .$$

On verra dans l'exposé suivant un théorème qui implique que tout morphisme de U dans $\underset{\sim}{E}^m$ est de cette forme (évidemment d'une seule manière).

EXEMPLE 2.8. - Soit A une algèbre de rang fini sur k , locale, de corps résiduel k (cette dernière condition étant d'ailleurs conséquence des autres si k est algébriquement clos). Soit X un espace annelé réduit à un point, et dont le faisceau est défini par la k-algèbre A . Je dis que c'est un espace analytique.

En effet, si m est l'idéal maximal de A et si n est le rang sur k de m/m^2, on sait (ou on vérifie aussitôt) que A est une algèbre quotient de l'algèbre de séries formelles $k[[T_1, \dots, T_n]]$, donc aussi de l'anneau $\mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^n, a}$ (où a est un point de $\underset{\sim}{E}^n$, par exemple le point origine), dont l'anneau précédent est en effet, le complété. (Dans cet argument, intervient le fait que A est artinien). Soit $\mathcal{J}_a$ l'idéal de $\mathcal{O}_{X,a}$ par lequel on divise, et posons $\mathcal{J}_b = \mathcal{O}_{X,b}$ pour $b \neq a$, où on a posé $X = \underset{\sim}{E}^n$. Il est évident que les $\mathcal{J}_x (x \in X)$ sont les fibres d'un Idéal sur X ; de plus cet Idéal est de type fini. En effet, on voit tout de suite qu'il existe un entier N tel que $\mathcal{J}_a$ contienne l'idéal engendré par les T_i^N, où les T_i sont les éléments de $\mathcal{O}_{X,a}$ correspondants aux fonctions analytiques ξ_i projections de $X = \underset{\sim}{E}^n$ sur ses n facteurs. Or l'Idéal $\mathcal{J}'$ engendré par les ξ_i^N est contenu dans $\mathcal{J}$ et coïncide avec $\mathcal{J}$ en tous les points distincts de a. Ainsi, (a, A) apparaît comme un sous-espace analytique fermé de l'espace analytique fermé X' de X défini par $\mathcal{J}'$, donc est un sous-espace analytique de X.

* Lorsque k est algébriquement clos, il est probablement vrai que tout espace analytique réduit à un point est de la forme qu'on vient d'indiquer, ce qui serait une des variantes du "Nullstellensatz" analytique ([4], exposé 8). Signalons par contre tout de suite que rien de tel n'est vrai si k n'est pas algébriquement clos, par exemple si k est le corps des réels $\underset{\sim}{R}$. Ainsi, le sous-espace analytique de $\underset{\sim}{R}^2 = \underset{\sim}{E}^2$ défini par l'Idéal engendré par $x^2 + y^2$ est réduit au point origine, mais son anneau local en ce point n'est pas artinien, mais de dimension de Krull égale à 1. L'intérêt des espaces analytiques, lorsque k n'est pas algébriquement clos, est d'ailleurs douteux. *

Soit enfin, de façon générale, T un espace analytique réduit à un point, défini donc essentiellement par l'anneau local A dudit point. La donnée d'un morphisme de T dans un espace analytique donné X est donc équivalente à la donnée d'un <u>point</u> x de X (savoir l'image de l'unique point a de T), et d'un homomorphisme de k-algèbres de $\mathcal{O}_{X,x}$ dans A. Les éléments de $\mathrm{Hom}(T, X)$ s'appellent aussi parfois les <u>points de</u> X <u>à valeurs dans</u> A, ou même points de X à valeurs dans T, et il peut être commode d'utiliser cette terminologie même lorsque T n'est pas réduit à un point. Ces "points généralisés" avaient déjà été introduits par A. WEIL sous le nom de <u>points proches d'espèce</u> A, mais ils ne donnent lieu à un formalisme transparent qu'une fois insérés dans une géométrie avec éléments nilpotents. Nous n'insisterons pas ici sur ces points, qui relèvent du formalisme différentiel, et nous bornerons à expliciter le cas typique où

$$A = k[T]/(T^2) \quad ,$$

algèbre de rang 2 sur k , ayant une base formée de l'élément unité et d'un objet ε soumis à la relation

$$\varepsilon^2 = 0 \quad .$$

Cette algèbre est parfois appelée algèbre des nombres duaux. Un point de X à valeurs dans A n'est pas autre chose qu'un point x de X , muni d'un homomorphisme de m_x/m_x^2 dans k (où m_x est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$). C'est aussi ce qu'on peut appeler un vecteur tangent à X en x . Nous reviendrons ultérieurement sur ces questions.

EXEMPLE 2.9. - Les exemples précédents montrent suffisamment qu'un morphisme d'espaces analytiques n'est pas déterminé par la connaissance de l'application ensembliste sous-jacente. La raison essentielle en est dans la présence possible d'éléments nilpotents dans les faisceaux structuraux des espaces annelés envisagés. Nous dirons qu'un espace annelé (en particulier un espace analytique) est réduit si les anneaux de sections de son faisceau structural sur des ouverts n'ont pas d'éléments nilpotents, ou ce qui revient au même, si les fibres du faisceau structural sont des anneaux sans éléments nilpotents.*Ceci dit, si k est algébriquement clos, il doit être vrai que lorsque l'espace analytique X est réduit, toute section f de son faisceau structural telle que $f_x \in m_x$ pour tout $x \in X$, est nulle. (C'est une des variantes du "Nullstellensatz" analytique). Il revient au même de dire qu'un morphisme de X dans un espace analytique est alors connu quand on connaît l'application ensembliste sous-jacente.* Nous n'aurons pas besoin de résultats de ce genre, et de façon générale nous n'aurons que rarement à nous demander si les espaces analytiques que nous rencontrerons sont réduits ; notre objet étant précisément de développer une syntaxe qui n'ait pas à faire de telles distinctions.

* Pour finir, signalons également le résultat suivant, qui est une formulation équivalente du théorème de Oka sur la cohérence du faisceau d'idéaux défini par un sous-ensemble analytique ([3] exposé 15). Soient X un espace analytique, $\mathfrak{N}$ l'Idéal des éléments nilpotents de $\mathcal{O}_X$, $X_{\text{réd}}$ l'espace annelé $(X , \mathcal{O}_X/\mathfrak{N})$; alors $\mathfrak{N}$ est cohérent, donc $X_{\text{réd}}$ est également un espace analytique. Ce théorème, qui est connu lorsque $k = \mathbb{C}$, est vrai chaque fois que k est algébriquement

clos (Cf. Exposé 21).Notons qu'il devient faux pour $k = \mathbb{R}$, par exemple, cf. [1].*

REMARQUE 2.10. - Un morphisme $f : X \to Y$ d'espaces analytiques est appelé morphisme d'immersion s'il définit un isomorphisme de X sur un sous-espace analytique de Y . Cette terminologie n'est en accord avec celle introduite au paragraphe 1 pour les espaces annelés quelconques qu'une fois démontré que tout sous-espace annelé X d'un espace analytique Y , tel que X soit également un espace analytique, est de présentation finie, i. e. si X est fermé dans Y (cas auquel on peut toujours se ramener) l'Idéal qui le définit est de type fini. Cet énoncé d'ailleurs est vrai, et fort élémentaire. Nous le démontrerons en passant, dans l'exposé 13 (p. 4, cor. 1.8). Utilisant les généralités de la fin du paragraphe 1, on voit en tout cas, avec la définition ci-dessus : le composé de deux immersions d'espaces analytiques est une immersion d'espaces analytiques ; si $f : Y \to X$ et $g : X' \to X$ sont des morphismes d'espaces analytiques, f étant une immersion, alors le produit fibré de Y et X' sur X existe dans la catégorie des espaces analytiques (et c'est même un produit fibré dans la catégorie de tous les espaces annelés en anneaux locaux, ou dans la catégorie de tous les espaces annelés), soit Y' ; de plus, $f' : Y' \to X'$ est une immersion.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRUHAT (F.) et CARTAN (H.). - Sur la structure des sous-ensembles analytiques réels ; sur les composantes irréductibles d'un sous-ensemble analytique réel, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 244, 1957, p. 988-990 et p. 1123-1126.

[2] GROTHENDIECK (A.) et DIEUDONNÉ (J.). - Éléments de géométrie algébrique, I : Le langage des schémas. - Paris, Presses universitaires de France, 1960 (Institut des Hautes Etudes scientifiques, Publications mathématiques, 4).

[3] Séminaire CARTAN, t. 4, 1951/52 : Fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. - Paris, Ecole Normale Supérieure (multigraphié).

[4] Séminaire CARTAN, t. 6, 1953/54 : Variétés analytiques complexes et fonctions automorphes. - Paris, Ecole Normale Supérieure (multigraphié).

[5] SERRE (Jean-Pierre). - Faisceaux algébriques cohérents, Annals of Math., Series 2, t. 61, 1955, p. 197-278.