

# SÉMINAIRE HENRI CARTAN

HENRI CARTAN

## Démonstration homologique des théorèmes de périodicité de Bott, III

*Séminaire Henri Cartan*, tome 12, n° 2 (1959-1960), exp. n° 18, p. 1-9

[http://www.numdam.org/item?id=SHC\\_1959-1960\\_\\_12\\_2\\_A8\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SHC_1959-1960__12_2_A8_0)

© Séminaire Henri Cartan  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1959-1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

DÉMONSTRATION HOMOLOGIQUE DES THÉORÈMES DE PÉRIODICITÉ DE BOTT, III.

par Henri CARTAN

Dans cet exposé, il nous reste à démontrer que les applications  $\Phi_i$  ( $0 \leq i \leq 6$ ) définies dans l'exposé 16 induisent des isomorphismes pour l'homologie à coefficients entiers. Lorsqu'il s'agit d'espaces dont l'homologie à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  est sans torsion (donc libre), il revient au même de prouver que  $\Phi_i$  induit un isomorphisme pour les cohomologies à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ . Au lieu d'étudier l'application induite par  $\Phi_i$  sur les homologies à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ , on pourra aussi considérer : 1° les homologies à coefficients dans  $\mathbb{Q}_2$  ; 2° les homologies à coefficients dans  $\mathbb{Z}_2$  ; il suffira de montrer que, dans chacun des deux cas, on obtient un isomorphisme des homologies (cf. la remarque de la fin du numéro 3 de l'exposé 16). Enfin, pour montrer que  $\Phi_i$  induit un isomorphisme des homologies à coefficients  $\mathbb{Q}_2$ , il revient au même de montrer que  $\Phi_i$  induit un isomorphisme des cohomologies à coefficients  $\mathbb{Q}_2$ .

Pour  $\Phi_0$ , la démonstration d'isomorphisme a déjà été donnée dans l'exposé 11 (théorème 5, page 10). On n'y revient pas.

Démonstration pour  $\Phi_6$  :  $\text{Sp}(X_H)/U(X) \rightarrow \Omega(\text{Sp}(X_H))$ .

Considérons le diagramme  $(\Delta_1)$  de l'exposé 16 (n° 4) ; on a vu qu'il est commutatif. En cohomologie à coefficients entiers, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 H^*(\Omega(\text{SU}(X \oplus X')) ; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{(\Phi_0)^*} & H^*(U(X \oplus X')/U(X) \times U(X') ; \mathbb{Z}) \\
 \downarrow (g_1)^* & & \downarrow (f_1)^* \\
 H^*(\Omega(\text{Sp}(X_H)) ; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{(\Phi_6)^*} & H^*(\text{Sp}(X_H)/U(X) ; \mathbb{Z})
 \end{array}$$

L'application  $(f_1)^*$  est surjective, d'après (23) de l'exposé 17. Puisque  $(\Phi_0)^*$  est bijective,  $(\Phi_6)^* \circ (g_1)^*$  est surjective, donc  $(\Phi_6)^*$  est surjective. Or les deux algèbres graduées  $H^*(\Omega(\text{Sp}(X_H)) ; \mathbb{Z})$  et  $H^*(\text{Sp}(X_H)/U(X) ; \mathbb{Z})$  sont  $\mathbb{Z}$ -libres et ont même rang en chaque degré, d'après (30) et (25) de l'exposé 17 ; il s'ensuit que l'application surjective  $(\Phi_6)^*$  est bijective.

Démonstration pour  $\Phi_3 : U(Y)/Sp(X) \rightarrow \Omega(SO(Y)/U(Y))$  .

Il suffira de montrer que l'application  $(\Phi_3)_*$  des algèbres d'homologie à coefficients dans  $Z$  est surjective ; en effet, les algèbres  $H_*(U(Y)/Sp(Y) ; Z)$  et  $H_*(\Omega(SO(Y)/U(Y)) ; Z)$  sont  $Z$ -libres et ont même rang en chaque degré, d'après (17) et (86) de l'exposé 17.

Soit  $p_3 : \Omega(SO(Y)/U(Y)) \rightarrow U(Y)$  l'application naturelle ; définissons  $h_3$  par la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} U(Y)/Sp(Y) & \xrightarrow{\Phi_3} & \Omega(SO(Y)/U(Y)) \\ & \searrow h_3 & \downarrow p_3 \\ & & U(Y) \end{array}$$

Si on se réfère à la définition explicite de  $\Phi_3$  (exposé 16, numéro 2), on trouve une explicitation de  $h_3$  :  $h_3$  associe à la classe de  $T \in U(Y)$  le commutateur  $[j_d, T]$ , où  $j_d$  désigne la multiplication à droite par  $j$  dans l'espace  $Y$ . Autrement dit,  $h_3 : U(Y)/Sp(Y) \rightarrow U(Y)$  est induit par l'application  $h'_3 : U(Y) \rightarrow U(Y)$  qui, à  $T$ , associe  $[j_d, T]$ .

LEMME 1. - L'application  $H_*(U(Y) ; Z) \rightarrow H_*(U(Y) ; Z)$  induite par  $h'_3$  multiplie par  $-2$  chaque générateur  $a_{4k+1} \in H_*(U(Y) ; Z)$  .

DÉMONSTRATION. - L'application  $h'_3$  est composée des applications

$$U(Y) \xrightarrow{\Delta} U(Y) \times U(Y) \xrightarrow{\alpha \times \sigma} U(Y) \times U(Y) \xrightarrow{P} U(Y)$$

où  $\Delta$  désigne l'application diagonale,  $P$  la loi de composition du groupe  $U(Y)$ ,  $\sigma$  l'application  $T \rightarrow T^{-1}$ , et  $\alpha$  l'application  $T \rightarrow -j_d T j_d$  (qui est endomorphisme du groupe  $U(Y)$ ). Si on applique le foncteur d'homologie (à coefficients entiers), on sait que  $\sigma_* : H_*(U(Y)) \rightarrow H_*(U(Y))$  transforme chaque générateur  $a_{2k+1}$  en son opposé  $-a_{2k+1}$ . Quant à  $\alpha_*$ , il transforme  $a_{2k+1}$  en  $\varepsilon^{k+1} a_{2k+1}$  (où  $\varepsilon = \pm 1$ ), d'après la fin du numéro 2 de l'exposé 17 ; il reste à déterminer  $\varepsilon$ . Pour cela, il suffit de regarder quel est l'effet de  $\alpha_*$  sur le générateur  $a_1$  ; or l'élément  $T$  qui consiste à multiplier les coordonnées, dans l'espace  $Y$ , par  $e^{i\theta}$ , se transforme en la multiplication par  $-j e^{i\theta} j^{-1} e^{-i\theta}$  ; donc  $a_1$  est changé en  $-a_1$ , et par suite  $\varepsilon = -1$ . Finalement,  $\Delta_*$  transforme  $a_{4k+1}$  en  $a_{4k+1} \otimes 1 + 1 \otimes a_{4k+1}$  ; si on applique  $\alpha_* \otimes \sigma_*$ , on obtient  $-a_{4k+1} \otimes 1 - 1 \otimes a_{4k+1}$ , et  $P_*$  transforme ceci en  $-2a_{4k+1}$ , ce qui démontre le lemme 1.

D'autre part, on a vu en (87) (exp. 17) que  $(p_3)_* : H_*(\Omega(SO(X)/U(X)) ; Z) \rightarrow H_*(U(X) ; Z)$  applique, en degré  $4k+1$ , les "indécomposables" de la première algèbre sur le double des indécomposables de la seconde. Par comparaison avec le lemme 1, on voit

que  $(p_3)_*$  induit une bijection des indécomposables de  $H_*(\Omega(SO(X)/U(X)) ; \mathbb{Z})$  sur l'image de  $(h_3)_*$  (modulo les décomposables). Il s'ensuit que  $(\Phi_3)_*$  est surjective modulo les décomposables, et comme c'est un homomorphisme d'algèbres,  $(\Phi_3)_*$  est surjective.

C. Q. F. D.

Démonstration pour  $\Phi_1 : B(\text{Sp}(Y)) \rightarrow \Omega(\text{SU}(Y \oplus Y')/\text{Sp}(Y \oplus Y'))$ .

Considérons le diagramme  $(\Delta_2)$  de l'exposé 16 (n° 4). Il est homotopiquement commutatif. En cohomologie à coefficients entiers, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^*(\Omega(\text{SU}(Y \oplus Y))) & \xrightarrow{(\Phi_0)^*} & H^*(\text{BU}(Y)) \\ \downarrow (g_2)^* & & \downarrow (f_2)^* \\ H^*(\Omega(\text{SU}(Y \oplus Y)/\text{Sp}(Y \oplus Y))) & \xrightarrow{(\Phi_1)^*} & H^*(\text{B}(\text{Sp}(Y))) \end{array}$$

L'application  $(f_2)^*$  est surjective, d'après (15) de l'exposé 17. Puisque  $(\Phi_0)^*$  est bijective, il s'ensuit que  $(\Phi_1)^*$  est surjective. Or  $H^*(\Omega(\text{SU}(Y \oplus Y)/\text{Sp}(Y \oplus Y)))$  et  $H^*(\text{B}(\text{Sp}(Y)))$  sont  $\mathbb{Z}$ -libres et ont même rang en chaque degré, d'après (83) et (10) de l'exposé 17. Il s'ensuit que l'application surjective  $(\Phi_1)^*$  est bijective.

C. Q. F. D.

Démonstration pour  $\Phi_2 : \text{BO}(V) \rightarrow \Omega(\text{SU}(V_{\mathbb{C}} \oplus V_{\mathbb{C}})/\text{SO}(V \oplus V))$ .

On va montrer successivement que  $\Phi_2$  induit un isomorphisme des cohomologies à coefficients  $\mathbb{Q}_2$ , et un isomorphisme des homologies à coefficients  $\mathbb{Z}_2$ .

Pour le cohomologie à coefficients  $\mathbb{Q}_2$ , on considère le diagramme  $(\Delta_3)$  de l'exposé 16 (numéro 4), qui est homotopiquement commutatif. On obtient un diagramme commutatif.

$$\begin{array}{ccc} H^*(\Omega(\text{SU}(V_{\mathbb{C}} \oplus V_{\mathbb{C}})) ; \mathbb{Q}_2) & \xrightarrow{(\Phi_0)^*} & H^*(\text{BU}(V_{\mathbb{C}}) ; \mathbb{Q}_2) \\ \downarrow (g_3)^* & & \downarrow (f_3)^* \\ H^*(\Omega(\text{SU}(V_{\mathbb{C}} \oplus V_{\mathbb{C}})/\text{SO}(V \oplus V)) ; \mathbb{Q}_2) & \xrightarrow{(\Phi_3)^*} & H^*(\text{BO}(V) ; \mathbb{Q}_2) \end{array}$$

L'application  $(f_3)^*$  est surjective, d'après (56) de l'exposé 17. Puisque  $(\Phi_0)^*$  est bijective, il s'ensuit que  $(\Phi_2)^*$  est surjective ; or

$H^*(\Omega(\underline{\text{SU}}(\underline{V}_C \oplus \underline{V}_C)/\underline{\text{SO}}(V \oplus V)) ; \underline{\mathbb{Q}}_2)$  et  $H^*(\underline{\text{BO}}(V) ; \underline{\mathbb{Q}}_2)$   
 ont même  $\underline{\mathbb{Q}}_2$ -rang en chaque degré, d'après (89) et le numéro 9 de l'exposé 17.  
 Il s'ensuit que  $(\Phi_2)^*$  est bijective.

Pour l'homologie à coefficients  $\underline{\mathbb{Z}}_2$ , soit

$$p_2 : \Omega(\underline{\text{SU}}(\underline{V}_C \oplus \underline{V}_C)/\underline{\text{SO}}(V \oplus V)) \rightarrow \underline{\text{SO}}(V \oplus V)$$

l'application naturelle ; définissons  $h_2$  par la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{BO}}(V) & \xrightarrow{\Phi_2} & \Omega(\underline{\text{SU}}(\underline{V}_C \oplus \underline{V}_C)/\underline{\text{SO}}(V \oplus V)) \\ & \searrow h_2 & \downarrow p_2 \\ & & \underline{\text{SO}}(V \oplus V) \end{array}$$

Si on se réfère à la définition explicite de  $\Phi_2$  (exposé 16, numéro 2), on trouve que  $h_2 : \underline{\text{O}}(V \oplus V)/\underline{\text{O}}(V) \times \underline{\text{O}}(V) \rightarrow \underline{\text{SO}}(V \oplus V)$  provient de  $h'_2 : \underline{\text{O}}(V \oplus V) \rightarrow \underline{\text{SO}}(V \oplus V)$  qui associe à  $T \in \underline{\text{O}}(V \oplus V)$  le commutateur  $[\alpha, T]$ , où  $\alpha$  désigne la transformation  $(x, y) \rightarrow (-x, y)$  de  $V \oplus V$ . Il résulte de l'exposé 5 (théorème 1, page 20) que

$$(h_2)_* : H_*(\underline{\text{BO}}(V) ; \underline{\mathbb{Z}}_2) \rightarrow H_*(\underline{\text{SO}}(V \oplus V) ; \underline{\mathbb{Z}}_2)$$

envoie les générateurs  $z_k$  de  $H_*(\underline{\text{BO}}(V) ; \underline{\mathbb{Z}}_2)$  sur les générateurs  $c_k$  de  $H_*(\underline{\text{SO}}(V \oplus V) ; \underline{\mathbb{Z}}_2)$ . Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_*(\underline{\text{BO}}(V) ; \underline{\mathbb{Z}}_2) & \xrightarrow{(\Phi_2)_*} & H_*(\Omega(\underline{\text{SU}}(\underline{V}_C \oplus \underline{V}_C)/\underline{\text{SO}}(V \oplus V)) ; \underline{\mathbb{Z}}_2) \\ & \searrow (h_2)_* & \downarrow (p_2)_* \\ & & H_*(\underline{\text{SO}}(V \oplus V) ; \underline{\mathbb{Z}}_2) \end{array}$$

Puisque  $(h_2)_* = (p_2)_* \circ (\Phi_2)_*$  est bijective sur les indécomposables, et que les espaces d'indécomposables de  $H_*(\Omega(\underline{\text{SU}}(\underline{V}_C \oplus \underline{V}_C)/\underline{\text{SO}}(V \oplus V)) ; \underline{\mathbb{Z}}_2)$  et de  $H_*(\underline{\text{SO}}(V \oplus V) ; \underline{\mathbb{Z}}_2)$  ont même rang en chaque degré (cf. (30) et (89') de l'exposé 17), il s'ensuit que  $(\Phi_2)_*$  induit une bijection des indécomposables. Comme c'est un homomorphisme d'algèbres,  $(\Phi_2)_*$  est surjective. Or  $(\Phi_2)_*$  applique une algèbre graduée sur une algèbre graduée qui a même rang en chaque degré, d'après (47) et (89') de l'exposé 17. Il s'ensuit que  $(\Phi_2)_*$  est bijective.

Démonstration pour  $\Phi_4 : U(\underline{V}_C)/O(V) \rightarrow \Omega(\text{Sp}(\underline{V}_H)/U(\underline{V}_C))$ .

On montrera successivement que  $\Phi_4$  induit un isomorphisme des cohomologies à coefficients  $\underline{\mathbb{Q}}_2$  et un isomorphisme des homologies à coefficients  $\underline{\mathbb{Z}}_2$ .

Pour la cohomologie à coefficients  $\underline{\mathbb{Q}}_2$ , soit  $p_4 : \Omega(\text{Sp}(\underline{V}_H)/U(\underline{V}_C)) \rightarrow U(\underline{V}_C)$  l'application naturelle ; définissons  $h_4$  par la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \underline{U}(\underline{V}_C)/O(V) & \xrightarrow{\Phi_4} & \Omega(\text{Sp}(\underline{V}_H)/\underline{U}(\underline{V}_C)) \\ & \searrow h_4 & \downarrow p_4 \\ & & \underline{U}(\underline{V}_C) \end{array}$$

Si on se réfère à la définition explicite de  $\Phi_4$ , on trouve que  $h_4$  provient, par passage au quotient, de l'application  $h'_4 : U(\underline{V}_C) \rightarrow U(\underline{V}_C)$  qui, à  $T \in U(\underline{V}_C)$ , associe le produit  $\overline{T}T^{-1}$ , en notant  $\overline{T}$  la transformation "imaginaire conjuguée" de  $T$ . On a vu (exposé 17, fin du numéro 2, exemple) que l'application  $H_*(U(\underline{V}_C); \underline{\mathbb{Z}}) \rightarrow H_*(U(\underline{V}_C); \underline{\mathbb{Z}})$  induite par  $T \rightarrow \overline{T}$  envoie  $a_{2k-1}$  en  $(-1)^k a_{2k-1}$ . En raisonnant exactement comme pour la démonstration du lemme 1, on prouve le :

LEMME 2. - L'application  $H_*(U(\underline{V}_C); \underline{\mathbb{Z}}) \rightarrow H_*(U(\underline{V}_C); \underline{\mathbb{Z}})$  induite par  $h'_4$  multiplie par  $-2$  chaque générateur  $a_{4k+1}$ .

Considérons alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^*(\underline{U}(\underline{V}_C); \underline{\mathbb{Q}}_2) & & \\ \downarrow (p_4)^* & \searrow (h_4)^* & \\ H^*(\Omega(\text{Sp}(\underline{V}_H)/\underline{U}(\underline{V}_C)); \underline{\mathbb{Q}}_2) & \xrightarrow{(\Phi_4)^*} & H^*(\underline{U}(\underline{V}_C)/O(V); \underline{\mathbb{Q}}_2) \end{array}$$

D'après le lemme 2, et la formule (74') de l'exposé 17,  $(h_4)^*$  est surjective. Il s'ensuit que  $(\Phi_4)^*$  est surjective ; en comptant les  $\underline{\mathbb{Q}}_2$ -rangs (cf. (74') et (84) de l'exposé 17), on conclut que  $(\Phi_4)^*$  est bijective.

Passons à l'homologie à coefficients  $\underline{\mathbb{Z}}_2$ . Considérons le diagramme  $(\Delta_4)$  de l'exposé 16. (numéro 4), qui est homotopiquement commutatif. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_*(\underline{U}(\underline{V}_C)/O(V); \underline{\mathbb{Z}}_2) & \xrightarrow{(\Phi_4)^*} & H_*(\Omega(\text{Sp}(\underline{V}_H)/\underline{U}(\underline{V}_C)); \underline{\mathbb{Z}}_2) \\ \downarrow (f_4)^* & & \downarrow (g_4)^* \\ H_*(BO(V); \underline{\mathbb{Z}}_2) & \xrightarrow{(\Phi_2)^*} & H_*(\Omega(\text{SU}(\underline{V}_C \oplus \underline{V}'_C)/\text{SO}(V \oplus V)); \underline{\mathbb{Z}}_2) \end{array}$$

D'après (75) de l'exposé 17, l'application  $(f_4)_*$  est **injective** ; et on sait déjà que  $(\Phi_2)_*$  est bijective. Il s'ensuit que  $(\Phi_4)_*$  est injective. Or les algèbres graduées  $H_*(U(V_C)/O(V) ; \mathbb{Z}_2)$  et  $H_*(\Omega(\text{Sp}(V_H)/U(V_C)) ; \mathbb{Z}_2)$  ont même rang en chaque degré, d'après (75) et (84') de l'exposé 17. Il s'ensuit que  $(\Phi_4)_*$  est bijective.

C. Q. F. D.

Démonstration pour  $\Phi_5 : \text{SO}(X)/U(X) \rightarrow \Omega(\text{Spin } X)$  .

On montrera successivement que  $\Phi_5$  induit un isomorphisme des cohomologies à coefficients  $\mathbb{Q}_2$  , et un isomorphisme des homologies à coefficients  $\mathbb{Z}_2$  .

Pour la cohomologie à coefficients  $\mathbb{Q}_2$  , considérons le diagramme commutatif  $(\Delta_5)$  de l'exposé 16 (numéro 4). On en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^*(\Omega(\text{SU}(X \oplus X')) ; \mathbb{Q}_2) & \xrightarrow{(\Phi_0)^*} & H^*(\text{BU}(X) ; \mathbb{Q}_2) \\ \downarrow (g_5)^* & & \downarrow (f_5)^* \\ H^*(\Omega(\text{Spin } X) ; \mathbb{Q}_2) & \xrightarrow{(\Phi_5)^*} & H^*(\text{SO}(X)/U(X) ; \mathbb{Q}_2) \end{array}$$

L'application  $(f_5)^*$  est surjective, d'après (70) ; et on sait que  $(\Phi_0)^*$  est bijective. Il s'ensuit que  $(\Phi_5)^*$  est surjective. Or les algèbres graduées  $H^*(\Omega(\text{Spin } X) ; \mathbb{Q}_2)$  et  $H^*(\text{SO}(X)/U(X) ; \mathbb{Q}_2)$  ont même rang en chaque degré, d'après (81) et (69) de l'exposé 17. On conclut que  $(\Phi_5)^*$  est bijective.

Passons à l'homologie à coefficients  $\mathbb{Z}_2$  . Puisque

$$(\Phi_5)_* : H_*(\text{SO}(X)/U(X) ; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_*(\Omega(\text{Spin } X) ; \mathbb{Z}_2)$$

est un homomorphisme d'algèbres graduées, et que ces algèbres ont même rang en chaque degré (d'après (71) et (81') de l'exposé 17), il suffira de montrer que  $(\Phi_5)_*$  est surjective modulo les éléments décomposables. Notons comme d'habitude  $Q(A)$  le quotient d'une algèbre graduée  $A$  par le sous-module des éléments décomposables ; on voit qu'il suffit de montrer le :

LEMME 3. - L'application composée

$$H_*(\text{SO}(X)/U(X) ; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{(\Phi_5)_*} H_*(\Omega(\text{Spin } X) ; \mathbb{Z}_2) \rightarrow Q(H_*(\Omega(\text{Spin } X) ; \mathbb{Z}_2))$$

est surjective.

DÉMONSTRATION du lemme 3. - Pour chaque entier  $n$ , considérons l'application

$$f : S^1 \times SO(2n+2) \rightarrow SO(2n+2)$$

définie comme suit : identifions  $\mathbb{R}^{2n+2}$  à  $\mathbb{C}^{n+1}$ , ce qui définit sur  $\mathbb{R}^{2n+2}$  la structure complexe suivante :

$$i(x_0, y_0, \dots, x_n, y_n) = (-y_0, x_0, \dots, -y_n, x_n) \quad .$$

Soit  $T \in SO(2n+2)$  ; on lui associe, pour chaque  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,

$$[\alpha(\theta), T] \in SO(2n+2) \quad ,$$

où  $\alpha(\theta)$  est la multiplication par  $e^{-i\theta/2}$ . On a bien  $[\alpha(\theta), T] = 1$  pour  $\theta = 0$  et  $\theta = 2\pi$  ; d'où  $f$ .

Soit  $p : SO(2n+2) \rightarrow S^{2n+1}$  l'application qui associe à  $T$  le point  $T(1, 0, \dots, 0)$ . Plongeons  $SO(2n+1)$  dans  $SO(2n+2)$  en envoyant  $\mathbb{R}^{2n+1}$  dans  $\mathbb{R}^{2n+2}$  par  $(y_0, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \rightarrow (0, y_0, x_1, \dots, y_n)$ . L'application composée

$$S^1 \times SO(2n+1) \rightarrow S^1 \times SO(2n+2) \xrightarrow{f} SO(2n+2) \xrightarrow{p} S^{2n+1}$$

est la suivante : à  $T' \in SO(2n+1)$  associons d'abord

$$T : (x_0, y_0, x_1, \dots) \rightarrow (x_0, \varphi(y_0, x_1, \dots), \psi(y_0, x_1, \dots)) \quad ,$$

où  $\varphi$  (à une composante) et  $\psi$  (à  $2n$  composantes) sont les applications définissant  $T'$  ; puis faisons  $\alpha(\theta) T \alpha(-\theta) T^{-1}$ , et prenons sa valeur au point  $(1, 0, \dots, 0)$ . Un calcul élémentaire montre que les coordonnées  $(x'_0, y'_0, \dots, x'_n, y'_n)$  du point obtenu sont données par les formules :

$$\begin{cases} x'_0 = \cos^2 \frac{\theta}{2} + y_0 \sin^2 \frac{\theta}{2}, & y'_0 = -(1 - y_0) \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \\ x'_i = \sin \frac{\theta}{2} (x_i \cos \frac{\theta}{2} + y_i \sin \frac{\theta}{2}), & y'_i = \sin \frac{\theta}{2} (-x_i \sin \frac{\theta}{2} + y_i \cos \frac{\theta}{2}), \end{cases}$$

( $1 \leq i \leq n$ ), où  $(y_0, \dots, x_n, y_n)$  désigne le point de  $\mathbb{R}^{2n+1}$ , transformé de  $(1, 0, \dots, 0)$  par  $T'$ . Si  $(y_0, x_1, \dots, y_n) \in S^{2n}$ , alors

$(x'_0, y'_0, \dots, x'_n, y'_n) \in S^{2n+1}$  ; on a donc défini une application continue :

$$S^1 \times S^{2n} \rightarrow S^{2n+1} \quad ,$$

et les formules explicites ci-dessus permettent de vérifier facilement que c'est un homéomorphisme [on vérifie qu'étant donné un point  $(x'_0, y'_0, \dots, x'_n, y'_n) \in S^{2n+1}$ , distinct de  $(1, 0, \dots, 0)$ , il existe un unique système  $(\theta, y_0, \dots, x_n, y_n)$  qui l'a comme image ; en fait, on a :



$$- \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{1 - x'_0}{y'_0}, \quad \text{ce qui détermine } \theta ;$$

puis

$$y_0 = x'_0 - \frac{y_0'^2}{1 - x'_0} ;$$

on observe que  $\sin \frac{\theta}{2} \neq 0$ , et on calcule ensuite les  $x_i$  et  $y_i$  par les relations

$$x_i \cos \frac{\theta}{2} + y_i \sin \frac{\theta}{2} = \frac{x'_i}{\sin \frac{\theta}{2}}, \quad -x_i \sin \frac{\theta}{2} + y_i \cos \frac{\theta}{2} = \frac{y'_i}{\sin \frac{\theta}{2}} \quad . ] .$$

Observons maintenant que le commutateur  $[\alpha(\theta), T]$  ne dépend que de la classe de  $T$  dans  $SO(2n)/U(n)$ , et que l'application

$$S^1 \times (SO(2n+2)/U(n+1)) \rightarrow SO(2n+2)$$

induite par  $f$  n'est autre que l'application (que nous noterons  $\psi_5$ ) qui a servi à définir  $\phi_5$  (cf. exposé 16, n° 2). En résumé, nous obtenons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} S^1 \times (SO(2n)/U(n)) & \xrightarrow{\psi_5} & SO(2n) & \longrightarrow & SO(2n+1) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ S^1 \times (SO(2n+1)/U(n)) & \xrightarrow{\lambda} & S^1 \times (SO(2n+2)/U(n+1)) & \longrightarrow & SO(2n+2) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ S^1 \times S^{2n} & \xrightarrow{\mu} & & & S^{2n+1} \end{array}$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont des homéomorphismes.

Or il est classique que si on a une application continue  $S^1 \times X \rightarrow Y$  ( $X$  et  $Y$  étant des espaces topologiques), l'image de  $H_*(S^1 \times X) \rightarrow H_*(Y)$  se compose d'éléments primitifs de l'homologie. Le diagramme précédent, auquel on applique l'homologie à coefficients  $\mathbb{Z}_2$ , permet alors de montrer, par récurrence sur  $n$ , que l'image de l'application

$$H_*(S^1 \times (SO(2n)/U(n)); \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{(\psi_5)_*} H_*(SO(2n); \mathbb{Z}_2)$$

se compose de tous les éléments primitifs dans les degrés impairs  $\geq 3$ . Ceci reste vrai à la limite quand  $n$  tend vers  $\infty$ .

L'application  $(\psi_5)_*$  se factorise comme suit :

$$H_*(S^1 \times (SO(X)/U(X)); \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\nu} H_*(\operatorname{Spin} X; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_*(SO(X); \mathbb{Z}_2) \quad ,$$

et puisque la seconde de ces applications induit une bijection des primitifs dans les degrés impairs  $\geq 3$  (cf. exposé 17, fin du numéro 7), il s'ensuit que  $\nu$  a

pour image l'espace de tous les éléments primitifs de  $H_*(\text{Spin } X; \mathbb{Z}_2)$ . Considérons alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 H_*(\text{SO}(X)/U(X); \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{(\Phi_5)_*} & H_*(\Omega(\text{Spin } X); \mathbb{Z}_2) \\
 \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma \\
 H_*(S^1 \times (\text{SO}(X)/U(X)); \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\nu} & H_*(\text{Spin } X; \mathbb{Z}_2)
 \end{array}$$

où  $\sigma$  désigne la suspension en homologie (le premier homomorphisme vertical est, comme bien connu, un isomorphisme). Le deuxième homomorphisme vertical induit une bijection de l'espace des "indécomposables"

$Q(H_*(\Omega(\text{Spin } X); \mathbb{Z}_2))$  sur l'espace des primitifs de  $H_*(\text{Spin } X; \mathbb{Z}_2)$ , ainsi que cela résulte du théorème V de l'exposé 7 (numéro 7). Et puisque l'image de  $\nu$  se compose de tous les éléments primitifs, le lemme 3 s'ensuit.

---