Henri Cartan

Démonstration homologique des théorèmes de périodicité de Bott, II. Homologie et cohomologie des groupes classiques et de leurs espaces homogènes

Séminaire Henri Cartan, tome 12, n° 2 (1959-1960), exp. n° 17, p. 1-32

<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1959-1960__12_2_A7_0>

Séminaire H. CARTAN - J. C. MOORE
12e année, 1959/60, n° 17

DÉMONSTRATION HOMOLOGIQUE DES THÉORÈMES DE PÉRIODICITÉ DE BOTT, II. HOMOLOGIE ET COHOMOLOGIE DES GROUPES CLASSIQUES ET DE LEURS ESPACES HOMOGÈNES

par Henri CARTAN

Avant d'aborder la démonstration des théorèmes de Bott suivant les principes énoncés dans l'exposé précédent (numéro 16), nous ferons, dans le présent exposé, une revue complète des algèbres d'homologie et de cohomologie des groupes classiques (infinis), de leurs espaces classifiants et des espaces homogènes correspondants, en explicitant chaque fois l'application diagonale. Nous calculerons aussi les algèbres d'homologie de leurs espaces de lacets.

NOTATIONS. - Les notations V, X, Y, etc. de l'exposé 16 sont conservées. $E(u_{k_1}, \ldots, u_{k_n}, \ldots)$ désigne une algèbre extérieure engendrée par des éléments $u_{k_1}, \ldots, u_{k_n}, \ldots$ de degrés respectifs $k_1, \ldots, k_n, \ldots$. De même, $L(v_{k_1}, \ldots, v_{k_n}, \ldots)$ désigne une algèbre de polynômes engendrée par des éléments dont l'indice indique le degré. L'anneau des coefficients est sous-entendu ; en fait, cet anneau sera toujours $\underset{\sim}{Z}$, $\underset{\sim}{Z}_2$ ou $\underset{\sim}{Q}_2$.

1. Groupe unitaire $U(X)$ (cf. exposé 11 pour les démonstrations).

(1) $H_*(U(X) ; \underset{\sim}{Z}) = E(a_1, a_3, \ldots, a_{2k-1}, \ldots)$, les générateurs a_{2k-1} étant <u>primitifs</u> ;

(2) $H^*(U(X) ; \underset{\sim}{Z}) = E(a'_1, a'_3, \ldots, a'_{2k-1}, \ldots)$, les générateurs a'_{2k-1} étant <u>primitifs</u>.

Les conditions précédentes déterminent les a_{2k-1} (resp. les a'_{2k-1}) au facteur ± 1 près. On précisera tout à l'heure le choix des signes. Dès maintenant, on convient que :

$$\langle a_{2k-1}, a'_{2k-1} \rangle = 1 ,$$

ce qui détermine les a'_{2k-1} une fois choisis les a_{2k-1}, ou vice-versa.

(3) $H_*(BU(X)\ ;\ \underset{\sim}{Z}) = L(x_2\ ,\ x_4\ ,\ \dots\ ,\ x_{2k}\ ,\ \dots)$, avec l'application diagonale $\Delta x_{2k} = \sum_{i+j=k} x_{2i} \otimes x_{2j}$ (on convient que $x_0 = 1$).

(4) $H^*(BU(X)\ ;\ \underset{\sim}{Z}) = L(x'_2\ ,\ x'_4\ ,\ \dots\ ,\ x'_{2k}\ ,\ \dots)$, avec l'application diagonale $\Delta x'_{2k} = \sum_{i+j=k} x'_{2i} \otimes x'_{2j}$ (même convention).

La dualité entre les deux algèbres de Hopf (3) et (4) est définie comme suit : connaissant $H_*(BU(X)\ ;\ \underset{\sim}{Z})$, les x'_{2k} sont définis par :

(5) $\langle (x_2)^k\ ,\ x'_{2k}\rangle = 1$, x'_{2k} orthogonal à tous les monômes $\neq (x_2)^k$.

Connaissant $H^*(BU(X)\ ;\ \underset{\sim}{Z})\ ;\ Z)$, les x_{2k} sont définis par :

(6) $\langle x_{2k}\ ,\ (x'_2)^k\rangle = 1$, x_{2k} orthogonal à tous les monômes $\neq (x'_2)^k$.

Rappelons comment sont définis les générateurs des algèbres $H_*(BU(X)\ ;\ \underset{\sim}{Z})$ et $H^*(BU(X)\ ;\ \underset{\sim}{Z})$. Dans l'exposé 9, on a démontré qu'il existe des $x'_{2k} \in H^{2k}(BU(X)\ ;\ \underset{\sim}{Z})$ tels que (4) ait lieu, avec l'application diagonale précisée ci-dessus. On définit alors les x_{2k} par (6), et on montre d'une manière purement algébrique (cf. exposé 10) que (3) a lieu, avec l'application diagonale précisée ci-dessus. Considérons d'autre part l'espace projectif complexe :

$$P(X) = U(X \oplus \underset{\sim}{C})/U(X) \times U(1) \qquad ;$$

il s'envoie naturellement dans $U(X \oplus X')/U(X)\times U(X') = BU(X)$. L'homomorphisme d'algèbres $H^*(BU(X)\ ;\ \underset{\sim}{Z}) \to H^*(P(X)\ ;\ \underset{\sim}{Z})$ envoie les générateurs x'_{2k} (pour $k \geqslant 2$) en 0 , et envoie x'_2 sur $\pm u'$, u' étant le générateur de l'algèbre de polynômes $H^*(P(X)\ ;\ \underset{\sim}{Z})$. Choisissons le signe de u' de façon que x'_2 aille en u' ; par dualité, on va expliciter facilement l'application de coalgèbres :

$$H_*(P(X)\ ;\ \underset{\sim}{Z}) \to H_*(BU(X)\ ;\ \underset{\sim}{Z}) \qquad .$$

Soit u le générateur de $H_2(P(X)\ ;\ \underset{\sim}{Z})$, tel que $\langle u\ ,\ u'\rangle = 1$; on sait que le générateur $\gamma_k(u)$ de $H_{2k}(P(X)\ ;\ \underset{\sim}{Z})$ est défini par $\langle \gamma_k(u)\ ,\ u'^k\rangle = 1$, $\gamma_k(u)$ orthogonal aux monômes $\neq u'^k$; l'application diagonale est donnée par :

$$\Delta\gamma_k(u) = \sum_{i+j=k} \gamma_i(u) \otimes \gamma_j(u) \quad \text{(on convient que } \gamma_0(u) = 1\ ,\ \gamma_1(u) = u \text{)}$$

Alors <u>l'application</u> $H_*(P(X)\ ;\ \underset{\sim}{Z}) \to H_*(BU(X)\ ;\ \underset{\sim}{Z})$ <u>envoie</u> $\gamma_k(u)$ <u>sur le générateur</u> x_{2k} <u>de</u> $L(x_2\ ,\ x_4\ ,\ \dots\ ,\ x_{2k}\ ,\ \dots)$.

Ceci fixe entièrement les x_{2k} (et par suite les x'_{2k} grâce à (5)), du moins au signe près. D'une façon précise, le changement de u en $-u$ transforme x_{2k} en $(-1)^k x_{2k}$ et x'_{2k} en $(-1)^k x'_{2k}$; en particulier, x_{4k} et x'_{4k} sont déterminés sans ambigüité de signe.

Comme on sait, la suspension :

$$\sigma^* : H^{2k}(BU(X) ; \underset{\sim}{Z}) \to H^{2k-1}(U(X) ; \underset{\sim}{Z})$$

envoie le générateur x'_{2k} sur un générateur primitif, donc sur $\pm a'_{2k-1}$. Si on a choisi les signes des x'_{2k} (cf. ci-dessus), et qu'on convient que $\sigma^*(x'_{2k}) = a'_{2k-1}$, ceci fixe le choix des signes des a'_{2k-1}, et par suite celui des a_{2k-1}. Nous ferons toujours cette convention.

Rappelons que les x'_{2k} sont les <u>classes de Chern</u> du fibré universel de groupe $U(X)$.

D'après l'exposé 10, l'espace des éléments primitifs de $H_*(BU(X) ; \underset{\sim}{Z})$ a pour base les éléments :

(7) $p_2 = x_2 \ , \ \dots \ , \ p_{2k} = (-1)^{k+1} k x_{2k} + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1} x_{2j} \, p_{2k-2j} \ , \ \dots$

qui satisfont à $\langle p_{2k} , x'_{2k} \rangle = 1$. Il en résulte que la suspension :

$$\sigma_* : H_{2k-1}(U(X) ; \underset{\sim}{Z}) \to H_{2k}(BU(X) ; \underset{\sim}{Z})$$

envoie a_{2k-1} en p_{2k}.

2. <u>Comparaison des groupes</u> $U(X)$ et $U(X')$.

Il s'agit de préciser dans quel sens les groupes $H_*(U(X))$, $H^*(U(X))$, $H_*(BU(X))$, $H^*(BU(X))$ <u>ne dépendent pas du choix de l'espace</u> X, supposé de dimension infinie.

Considérons d'abord deux espaces X et X' de même dimension finie. Ils sont isomorphes. Alors tous les isomorphismes $X \to X'$ induisent <u>le même</u> isomorphisme $H_*(U(X)) \approx H_*(U(X'))$. En effet, tout revient à montrer qu'un automorphisme intérieur du groupe $U(X)$ induit l'automorphisme identique de $H_*(U(X))$; or c'est évident parce que, le groupe $U(X)$ étant connexe, tout automorphisme intérieur est homotope à l'identité. Mêmes résultats pour $H^*(U(X))$, $H_*(BU(X))$, etc.

Lorsque X et X' sont tous deux de dimension infinie, on définit un isomorphisme canonique de $H_*(U(X))$ sur $H_*(U(X'))$; pour cela, on remarque que les deux injections $X \to X \oplus X'$ et $X' \to X \oplus X'$ définissent des isomorphismes $H_*(U(X)) \approx H_*(U(X \oplus X'))$ et $H_*(U(X')) \approx H_*(U(X \oplus X'))$. On vérifie alors que si X , X' et X'' sont de dimension infinie, l'isomorphisme canonique

$$H_*(U(X)) \approx H_*(U(X''))$$

est bien composé des isomorphismes canoniques $H_*(U(X)) \approx H_*(U(X'))$ et $H_*(U(X')) \approx H_*(U(X''))$. De plus, <u>si l'on a un isomorphisme</u> $f : X \to X'$, <u>il induit bien l'isomorphisme canonique</u> $H_*(U(X)) \approx H_*(U(X'))$; en effet, soit $g : X' \to X$ l'isomorphisme réciproque ; $(x , x') \to (gx' , fx)$ est un automorphisme de $X \oplus X'$ qui induit l'automorphisme identique de $H_*(U(X \oplus X'))$ (pour le voir, passer à la limite sur les sous-espaces de dimension finie) ; on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_*(U(X)) & \longrightarrow & H_*(U(X')) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_*(U(X \oplus X')) & \xrightarrow{\text{id.}} & H_*(U(X \oplus X')) \end{array}$$

où les isomorphismes verticaux sont définis par les injections, et le premier homomorphisme horizontal est induit par f .

De tout cela résulte qu'une fois choisis les générateurs a_{2k-1} (et de même a'_{2k-1} , x_{2k} , x'_{2k}) pour un espace X particulier (de dimension infinie), ils définissent des générateurs bien déterminés de $H_*(U(X'))$, resp. $H^*(U(X'))$, resp. $H_*(BU(X'))$, resp. $H^*(BU(X'))$, pour tout espace X' de dimension infinie. On emploiera <u>les mêmes</u> notations a_{2k-1} , etc. pour désigner ces générateurs ; cela ne présente aucun risque de confusion, vu ce qui précède.

Soit maintenant α un automorphisme du groupe $U(X)$ (pas nécessairement un automorphisme intérieur). A priori, il transforme a_{2k-1} et $\varepsilon_k\, a_{2k-1}$ (où $\varepsilon_k = \pm 1$). Mais il résulte du numéro 1 que $\varepsilon_k = (\varepsilon_1)^k$ (en effet, x_{2k} est transformé en $\varepsilon_k\, x_{2k}$, et il suffit d'écrire que l'automorphisme de $H_*(BU(X))$ est compatible avec l'application diagonale). Donc il y a seulement deux cas possibles : ou bien l'automorphisme α de $U(X)$ induit l'identité de $H_*(U(X))$, ou bien il transforme a_{2k-1} en $(-1)^k\, a_{2k-1}$. Dans le premier cas, α induit l'identité pour $H_*(BU(X))$, etc. ; dans le second cas, il transforme x_{2k} en $(-1)^k\, x_{2k}$, etc.

EXEMPLE. - Supposons $X = V_{\underset{\sim}{C}}$; à chaque $T \in U(X)$, associons la transformation <u>imaginaire conjuguée</u> $\overline{T}$. En regardant le cas où X est de dimension 1, on voit que $T \to \overline{T}$ induit $H_*(U(X)) \to H_*(U(X))$ qui transforme a_1 en $-a_1$. Donc, pour X de dimension infinie, $T \to \overline{T}$ <u>induit l'automorphisme non trivial</u> :

$$a_{2k-1} \to (-1)^k a_{2k-1} \quad .$$

3. <u>Groupe symplectique</u> $Sp(Y)$.

(8) $H_*(Sp(Y) ; \underset{\sim}{Z}) = E(b_3 , b_7 , \dots , b_{4k-1} , \dots)$, les générateurs b_{4k-1} étant <u>primitifs</u>,

(9) $H^*(Sp(Y) ; \underset{\sim}{Z}) = E(b'_3 , b'_7 , \dots , b'_{4k-1} , \dots)$, les générateurs b'_{4k-1} étant <u>primitifs</u>. (cf. exposés 3 et 5).

Les b_{4k-1} et b'_{4k-1} sont déterminés au facteur ± 1 près. Les signes seront précisés plus loin ; dès maintenant, on convient que $\langle b_{4k-1} , b'_{4k-1} \rangle = 1$.

On a vu (exposé 9) que :

(10) $H^*(B(Sp(Y)) ; \underset{\sim}{Z}) = L(y'_4 , y'_8 , \dots , y'_{4k} , \dots)$, avec l'application diagonale

$$\Delta y'_{4k} = \sum_{i+j=k} y'_{4i} \otimes y'_{4j} \qquad (y'_0 = 1) \quad .$$

En raisonnant exactement comme on vient de le faire au numéro 1 pour le groupe unitaire, on trouve ce qui suit :

(11) $H_*(B(Sp(Y)) ; \underset{\sim}{Z}) = L(y_4 , y_8 , \dots , y_{4k} , \dots)$, avec l'application diagonale

$$\Delta y_{4k} = \sum_{i+j=k} y_{4i} \otimes y_{4j} \qquad (y_0 = 1) \quad .$$

L'application $P(Y) \to B(Sp(Y))$ définit un homomorphisme de coalgèbres $H_*(P(Y) ; \underset{\sim}{Z}) \to H_*(B(Sp(Y)) ; \underset{\sim}{Z})$ qui envoie $\gamma_k(v)$ en y_{4k} (v désignant le générateur de $H_4(P(Y) ; \underset{\sim}{Z})$) , du moins pour un choix convenable des signes (qui seront précisés plus loin). La relation entre les y_{4k} et les y'_{4k} est donnée par :

(12) $\langle (y_4)^k , y'_{4k} \rangle = 1$, y'_{4k} orthogonal à tous les monômes $\neq (y_4)^k$,

(13) $\langle y_{4k} , (y'_4)^k \rangle = 1$, y_{4k} orthogonal à tous les monômes $\neq (y'_4)^k$.

La suspension σ^* envoie y'_{4k} en $\pm b'_{4k-1}$; on convient que $\sigma^*(y'_{4k}) = b'_{4k-1}$, ce qui fixe les signes des b'_{4k-1} (et par suite ceux des b_{4k-1}), une fois choisis les signes des y'_{4k} . L'espace des éléments primitifs de $H_*(B(Sp(Y)) ; \underset{\sim}{Z})$ a pour base les éléments :

(14) $p_4 = y_4$, ... , $p_{4k} = (-1)^{k+1} ky_{4k} + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1} y_{4j}\, p_{4k-4j}$, ...

Pour éviter toute confusion de notation avec les primitifs de $H_*(BU(X) ; \underset{\sim}{Z})$, on écrira $p_{4k}(y)$, resp. $p_{2k}(x)$. On a :

$$\langle p_{4k}(y) , y'_{4k}\rangle = 1 , \qquad \sigma_*(b_{4k-1}) = p_{4k}(y) \quad .$$

Comme au numéro 2, on montre que si Y et Y' sont deux espaces quaternioniens de dimension infinie, on a un isomorphisme canonique de $H_*(Sp(Y))$ sur $H_*(Sp(Y'))$, de $H_*(B(Sp(Y)))$ sur $H_*(B(Sp(Y')))$, etc.

4. Comparaison de $Sp(Y)$ et $U(Y)$.

Considérons l'inclusion naturelle $Sp(Y) \subset U(Y)$. En regardant les fibrations de $Sp(k)$ et de $U(2k)$ sur la sphère S^{4k-1} , on voit par récurrence sur k , que le générateur b_{4k-1} de $H_*(Sp(Y) ; \underset{\sim}{Z})$ va sur $\varepsilon_k\, a_{4k-1} \in H_*(U(Y) ; \underset{\sim}{Z})$, avec $\varepsilon_k = \pm 1$. Par suspension, $p_{4k}(y)$ va en $\varepsilon_k\, p_{4k}(x)$. Un calcul facile de dualité montre que x'_{4k-2} va dans 0 (pour des raisons de degré) et que x'_{4k} va en $\varepsilon_k\, y'_{4k}$. En écrivant que l'application $H^*(BU(Y) ; \underset{\sim}{Z}) \to H^*(B(Sp(Y)) ; \underset{\sim}{Z})$ est compatible avec les diagonales, telles qu'elles sont données par (4) et (10), on obtient les relations $\varepsilon_i\, \varepsilon_j = \varepsilon_{i+j}$, d'où $\varepsilon_k = (\varepsilon_1)^k$.

Nous choisirons y_4 (ou, ce qui revient au même, b_3) de façon que $\varepsilon_1 = 1$. Alors $\varepsilon_k = 1$ pour tout k . Avec ce choix :

(15) b_{4k-1} va en a_{4k-1} , $\quad x'_{4k+2}$ va en 0 , $\quad x'_{4k}$ va en y'_{4k} .

Les y'_{4k} sont les classes symplectiques du fibré universel de groupe $Sp(Y)$. Par agrandissement du groupe structural de $Sp(Y)$ à $U(Y)$, elles s'expriment à l'aide des classes de Chern x'_{4k} comme le montre (15).

Cherchons quelle est l'image de y_{4k} dans $H_*(BU(Y) ; \underset{\sim}{Z})$ par l'application $H_*(B(Sp(Y)) ; \underset{\sim}{Z}) \to H_*(BU(Y) ; \underset{\sim}{Z})$. On l'obtient en écrivant que $p_{4k}(y)$ va en $p_{4k}(x)$, et utilisant les formules (7) et (14). Le calcul montre que :

(16) $\quad (-1)^k\, y_{4k}$ va en $\displaystyle\sum_{i+j=2k} (-1)^i\, x_{2i}\, x_{2j}$

$$= (-1)^k (x_{2k})^2 + 2 \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i\, x_{2i}\, x_{4k-2i}$$

ce qui s'exprime formellement comme suit :

$$\sum_k (-1)^k y_{4k} \quad \text{va en} \quad (\sum_i (-1)^i x_{2i})(\sum_j x_{2j}) \quad .$$

Considérons le fibré :

$$Sp(Y) \to U(Y) \to U(Y)/Sp(Y) \quad .$$

On connaît l'application $H_*(Sp(Y) ; \underset{\sim}{Z}) \to H_*(U(Y) ; \underset{\sim}{Z})$, qui envoie b_{4k-1} en a_{4k-1} ; elle est injective, donc les différentielles de la suite spectrale du fibré sont nulles, et $H_*(U(Y)/Sp(Y))$ s'identifie au quotient de $H_*(U(Y) ; \underset{\sim}{Z})$ par l'idéal engendré par les images des éléments de degré > 0 de $H_*(Sp(Y) ; \underset{\sim}{Z})$. Ainsi :

(17) $H_*(U(Y)/Sp(Y) ; \underset{\sim}{Z}) = E(a_1 , a_5 , \dots , a_{4k+1} , \dots)$, les générateurs a_{4k+1} étant <u>primitifs</u>. Par dualité :

(18) $H^*(U(Y)/Sp(Y) ; \underset{\sim}{Z}) = E(a'_1 , a'_5 , \dots , a'_{4k+1} , \dots)$, les générateurs a'_{4k+1} étant <u>primitifs</u>.

Par abus de langage, on utilise la même notation a_{4k+1} pour les générateurs de $H_*(U(Y) ; \underset{\sim}{Z})$ et pour leurs images dans $H_*(U(Y)/Sp(Y) ; \underset{\sim}{Z})$. De même pour les a'_{4k+1} ; $H^*(U(Y)/Sp(Y) ; \underset{\sim}{Z})$ s'identifie à une sous-algèbre de Hopf de $H^*(U(Y) ; \underset{\sim}{Z})$.

5. <u>Comparaison de</u> $U(X)$ <u>et</u> $Sp(X_H)$.

Démontrons la proposition suivante :

(19) <u>L'inclusion</u> $U(X) \subset Sp(X_H)$ <u>induit un homomorphisme</u> $H_*(U(X) ; \underset{\sim}{Z}) \to H_*(Sp(X_H) ; \underset{\sim}{Z})$ <u>qui envoie</u> a_{4k+1} en 0 , et a_{4k-1} en $2b_{4k-1}$.

D'abord, les primitifs vont sur des primitifs, et comme il n'y a pas de primitif de degré $4k+1$ dans $H_*(Sp(X_H))$, a_{4k+1} va en 0 . Pour montrer que a_{4k-1} va en $2b_{4k-1}$, on observe que l'inclusion $Sp(X_H) \to U(X_H)$ envoie b_{4k-1} en a_{4k-1} , et par suite il suffira de prouver :

(20) <u>La composée des inclusions</u> $U(X) \to Sp(X_H) \to U(X_H)$ <u>envoie</u> a_{4k-1} <u>dans</u> $2a_{4k-1}$ (et a_{4k+1} dans 0).

DÉMONSTRATION de (20). - $\underset{\sim}{X_H}$ s'identifie, comme $\underset{\sim}{C}$-espace vectoriel à droite, à $X \oplus X'$, où X' désigne un second exemplaire de X , muni de la structure $\underset{\sim}{C}$-vectorielle $(x , c) \to x\bar{c}$ (le produit $x\bar{c}$ étant pris au sens de la structure vectorielle de X). L'injection $U(X) \to U(\underset{\sim}{X_H})$ associe à $T : X \to X$ l'application

$X \oplus X' \to X \oplus X'$ qui envoie (x, y) dans $(T(x), T(y))$. Prenons une $\underset{\sim}{C}$-base (e_i) de X ; on définit un isomorphisme $X \to X'$ en associant à $\sum_i e_i c_i$ $(c_i \in \underset{\sim}{C})$ l'élément $\sum_i e_i \bar{c}_i$. Par cet isomorphisme, T se transforme en $\overline{T}$ (définie par la matrice imaginaire conjuguée). Ainsi on a un $\underset{\sim}{C}$-isomorphisme $X_H \approx X \oplus X$, et l'injection $U(X) \to U(X_H)$ devient l'application $U(X) \to U(X \oplus X)$ qui, à T, associe l'application $(x, y) \to (T(x), \overline{T}(y))$ de $X \oplus X$ dans lui-même. Elle induit un homomorphisme :

$$f : H_*(U(X)) \to H_*(U(X \oplus X)) \quad ;$$

on va montrer qu'il envoie a_{2k-1} en $a_{2k-1} + (-1)^k a_{2k-1}$. Or f se factorise comme suit :

$$H_*(U(X)) \overset{\Delta}{\to} H_*(U(X)) \otimes H_*(U(X)) \xrightarrow{1 \otimes \lambda} H_*(U(X)) \otimes H_*(U(X)) \xrightarrow{\mu_1 \otimes \mu_2}$$

$$\to H_*(U(X \oplus X)) \otimes H_*(U(X \oplus X)) \overset{P}{\to} H_*(U(X \oplus X)) \quad ,$$

où Δ est l'application diagonale (qui envoie a_{2k-1} en $a_{2k-1} \otimes 1 + 1 \otimes a_{2k-1}$), λ désigne l'application induite par $T \to \overline{T}$ (qui transforme a_{2k-1} en $(-1)^k a_{2k-1}$, comme on l'a vu à la fin du numéro 2), μ_1 et μ_2 sont induites par les deux injections $x \to (x, 0)$ et $x \to (0, x)$ de X dans $X \oplus X$, et où P est la multiplication dans l'algèbre d'homologie. On sait que μ_1 et μ_2 envoient a_{2k-1} en a_{2k-1} (cf. numéro 2), et en composant toutes les applications ci-dessus on voit bien que f envoie a_{2k-1} en $a_{2k-1} + (-1)^k a_{2k-1}$.

De (19) il résulte, par suspension, que $H_*(BU(X) ; \underset{\sim}{Z}) \to H_*(B(Sp(X_H)) ; \underset{\sim}{Z})$ envoie le primitif $p_{4k+2}(x)$ en 0, et le primitif $p_{4k}(x)$ en $2p_{4k}(y)$. Utilisant (7) et (14), on en déduit facilement, par récurrence sur k :

(21) $H_*(BU(X)) \to H_*(B(Sp(X_{\underset{\sim}{H}}))$ envoie x_{4k+2} en 0, et x_{4k} en $(-1)^k y_{4k}$.

La situation est donc duale de celle décrite en (15) ; par suite, on a la situation duale de celle de (16) :

(22) $H^*(B(Sp(X_H)) \to H^*(BU(X))$ envoie y'_{4k} en $\sum_{i+j=2k} (-1)^i x'_{2i} x'_{2j}$; de même, $p_{4k}(y')$ va en $(-1)^k p_{4k}(x')$.

Pour calculer <u>l'homologie et la cohomologie de l'espace homogène</u> $Sp(X_{\underset{\sim}{H}})/U(X)$, on considère le fibré :

$$(*) \qquad Sp(X_{\underset{\sim}{H}})/U(X) \to BU(X) \to B(Sp(X_{\underset{\sim}{H}})) \quad .$$

En cohomologie à coefficients dans $\underset{\sim}{Z}$, $H^*(B(Sp(X_H)) \to H^*(BU(X))$ est une application injective d'après (22) (c'est la duale de l'application surjective (21)), donc les différentielles de la suite spectrale de cohomologie sont nulles ; donc :

(23) <u>L'algèbre de Hopf</u> $H_*(Sp(X_H)/U(X) ; \underset{\sim}{Z})$ <u>s'identifie au quotient de l'algèbre de Hopf</u> $H^*(BU(X) ; \underset{\sim}{Z}) = L(x'_2 , x'_4 , \ldots , x'_{2k} , \ldots)$ <u>par l'idéal engendré par les éléments</u> $\sum_{i+j=2k} (-1)^i x'_{2i} x'_{2j}$. On voit que $H^*(Sp(X_H)/U(X))$ est engendrée, comme algèbre, par les classes de Chern du fibré $Sp(\widehat{\underset{\sim}{X_H}}) \to Sp(\underset{\sim}{X_H})/U(X)$, de groupe structural $U(X)$.

On va voir que $H^*(Sp(\underset{\sim}{X_H})/U(X))$ est <u>sans torsion</u> (donc $\underset{\sim}{Z}$-libre), en explicitant l'algèbre d'homologie duale. Dans le fibré (*) ci-dessus, $H_*(BU(X)) \xrightarrow{f} H_*(B(Sp(\underset{\sim}{X_H}))$ est une application surjective ; donc $H_*(Sp(\underset{\sim}{X_H})/U(X))$ s'identifie au "noyau" (au sens des algèbres de Hopf) de la surjection f. Ce "noyau" est formé des éléments α tels que l'application composée g :

$$H_*(BU(X)) \xrightarrow{\Delta} H_*(BU(X)) \otimes H_*(BU(X)) \xrightarrow{1 \otimes f} H_*(BU(X)) \otimes H_*(B(Sp(X_H)))$$

(où Δ est l'application diagonale) transforme α en $\alpha \otimes 1$. L'application g est multiplicative. Définissons par récurrence :

(24) $$u_2 = x_2 , \ldots , u_{4k+2} = x_{4k+2} - \sum_{i=0}^{k-1} u_{4i+2}\, x_{4k-4i} , \ldots \quad ;$$

on vérifie par récurrence que $g(u_{4k+2}) = u_{4k+2} \otimes 1$, donc u_{4k+2} appartient au "noyau". L'algèbre $H_*(BU(X)) = L(x_2 , x_4 , \ldots , x_{2k} , \ldots)$ est engendrée par $u_2 , x_4 , u_6 , \ldots , x_{4k} , u_{4k+2} , \ldots$ On voit tout de suite qu'un polynôme en les u_{4k+2} et les x_{4k} n'est dans le "noyau" que s'il ne contient aucun des x_{4k}. Finalement :

(25) <u>L'algèbre</u> $H_*(Sp(\underset{\sim}{X_H})/U(X) ; \underset{\sim}{Z})$ <u>est une algèbre de polynômes</u> $L(u_2 , u_6 , \ldots , u_{4k+2} , \ldots)$, où, par identification avec une sous-algèbre de $H_*(BU(X) ; \underset{\sim}{Z})$, les u_{4k+2} sont les éléments de $H_*(BU(X) ; \underset{\sim}{Z})$ définis par récurrence par les formules (24).

L'application diagonale de $H_*(Sp(\underset{\sim}{X_H})/U(X) ; \underset{\sim}{Z})$ est compliquée. Toutefois, par réduction modulo 2 :

(26) <u>L'algèbre</u> $H_*(Sp(\underset{\sim}{X_H})/U(X) ; \underset{\sim}{Z_2})$ <u>est engendrée par des éléments primitifs de degrés</u> $2 , 6 , \ldots , 4k + 2 , \ldots$

En effet, à coefficients entiers, les primitifs $p_{4k+2}(x)$ définis en (7) sont évidemment dans le "noyau" de $H_*(BU(X)) \to H_*(B(Sp(\underset{\sim}{X_H}))$, et on voit facilement que, par réduction modulo 2, ils forment un système de générateurs de

$L(u_2 , \dots , u_{4k+2} , \dots)$. A noter que, modulo 2 , $p_{4k}(x)$ est le carré de $p_{2k}(x)$.

Revenons à la cohomologie $H^*(Sp(X_H)/U(X))$; par réduction modulo 2 , (23) montre que $H^*(Sp(X_H)/U(X) ; \mathbb{Z}_2)$ s'identifie au quotient de $L(x'_2 , x'_4 , \dots , x'_{2k} , \dots)$ par l'idéal engendré par les $(x'_{2k})^2$. Ainsi :

(27) $H^*(Sp(X_H)/U(X) ; \mathbb{Z}_2) = E(x'_2 , x'_4 , \dots , x'_{2k} , \dots)$, l'application diagonale étant : $\Delta x'_{2k} = \sum_{i+j=k} x'_{2i} \otimes x'_{2j}$.

(Par dualité, on retrouve le fait que $H_*(Sp(X_H)/U(X) ; \mathbb{Z}_2)$ est engendrée par des éléments primitifs de degrés $4k + 2$).

6. Groupes orthogonaux $O(V)$ et $SO(V)$.

On sait que (cf. exposé 5, numéro 3, théorème 5) que si V est de dimension infinie :

(28) $H_*(SO(V) ; \mathbb{Q}_2)$ est une algèbre extérieure engendrée par des éléments primitifs de degré $4k - 1$;

(29) $H^*(SO(V) ; \mathbb{Q}_2)$ est l'algèbre extérieure duale.

Par ailleurs, (exposé 5, numéro 5, théorèmes 1, 2, et 3) :

(30) $H_*(SO(V) ; \mathbb{Z}_2) = E(c_1 , c_2 , c_3 , \dots , c_k , \dots)$, $\Delta c_k = \sum_{i+j=k} c_i \otimes c_j$,

(31) $H^*(SO(V) ; \mathbb{Z}_2) = L(c'_1 , c'_3 , \dots , c'_{2k+1} , \dots)$ engendrée par des c'_{2k+1} primitifs. Les c_k sont définis comme suit : posant $V = V' \oplus \mathbb{R}$, on a une application :

$$(32) \qquad P(V') = O(V' \oplus \mathbb{R})/O(V') \times O(1) \to SO(V' \oplus \mathbb{R})$$

déduite de l'application $O(V' \oplus R) \to SO(V' \oplus R)$ qui, à T , associe le crochet $[u , T]$, en notant u l'application $(x , c) \to (x , - c)$ de $V' \oplus \mathbb{R}$ dans lui-même. L'application (32) induit $H_*(P(V') ; Z_2) \to H_*(SO(V) ; Z_2)$; et c_k est l'image de l'unique élément $\neq 0$ de $H_k(P(V') ; Z_2)$. L'application diagonale de (30) provient de l'application diagonale de l'espace projectif réel.

Quant aux c'_{2k+1} , ils sont définis comme suit : pour tout entier k (pair ou impair), définissons c'_k par la condition :

(33) $\langle c_k , c'_k \rangle = 1$, c'_k orthogonal aux monômes $\neq c_k$.

Les c'_k sont primitifs (orthogonaux aux éléments décomposables) et on vérifie immédiatement que $(c'_k)^2 = c'_{2k}$. La relation (31) se déduit de (30) par dualité.

Rappelons encore (exposé 5, numéro 5, théorème 2) :

(34) $\beta c_{2k} = c_{2k-1}$ (β désignant l'opérateur de Bockstein), d'où par dualité :

(35) $\beta' c'_{2k-1} = (c'_k)^2$ (β' désignant le Bockstein en cohomologie).

Enfin (loco citato), l'espace des éléments primitifs de $H_*(SO(V) ; \mathbb{Z}_2)$ a pour base les éléments :

(36) $p_1 = c_1$, $p_3 = c_3 + c_1 c_2$, ... , $p_{2k+1} = c_{2k+1} + \sum_{\substack{i+j=2k+1 \\ 0<i<j}} c_i c_j$

$$= \sum_{\substack{i+j=2k+1 \\ 0<i<j}} c_i c_j .$$

<u>Calcul de la</u> β-<u>homologie de</u> $H_*(SO(V) ; \mathbb{Z}_2)$: comme β-algèbre différentielle graduée, $H_*(SO(V) ; \mathbb{Z}_2)$ est un produit tensoriel :

$$\bigotimes_k E(c_{2k} , c_{2k-1}) ,$$

où β est défini par (34). Donc l'algèbre de β-homologie s'identifie au produit tensoriel des β-algèbres d'homologie des $E(c_{2k}, c_{2k-1})$, c'est à dire au produit tensoriel des algèbres extérieures $E(c_{2k} c_{2k-1})$. Ainsi l'algèbre extérieure engendrée par les produits $c_{2k} c_{2k-1}$ est une sous-algèbre de $H_*(SO(V) ; Z_2)$, contenue dans le noyau de β , et qui s'envoie isomorphiquement sur $\operatorname{Ker} \beta/\operatorname{Im} \beta$. Or (36) donne :

(37) $$p_{4k-1} = c_{2k} c_{2k-1} + \beta\Big(\sum_{\substack{i+j=2k \\ 0\leq i<j}} c_{2i} c_{2j}\Big) .$$

Il s'ensuit que les primitifs p_{4k-1} engendrent une sous-algèbre extérieure A de $H_*(SO(V) ; Z_2)$, contenue dans $\operatorname{Ker} \beta$, et qui s'envoie isomorphiquement sur $\operatorname{Ker} \beta/\operatorname{Im} \beta$. A est une sous-algèbre de Hopf.

D'après (28), A et $H_*(SO(V) ; \mathbb{Q}_2)$ ont même rang en chaque degré ; il s'ensuit que les éléments de torsion de $H_*(SO(V) ; \mathbb{Z})$ sont d'ordre 2 (cf. exposé 5, Appendice). De plus $\overline{H}_*(SO(V) ; \mathbb{Z}) = H_*(SO(V) ; \mathbb{Z})/\operatorname{Tors} H_*(SO(V) ; \mathbb{Z})$ est une algèbre extérieure engendrée par des éléments primitifs $\overline{e}_{4k-1}$ (cf. exposé 4, corollaire du théorème 4) ; ceci détermine les $\overline{e}_{4k-1}$ au facteur ± 1 près. Ainsi :

(38) $\overline{H}_*(SO(V) ; \mathbb{Z}) = E(\overline{e}_3 , \overline{e}_7 , \ldots , \overline{e}_{4k-1} , \ldots)$ engendrée par des $\overline{e}_{4k-1}$ <u>primitifs</u>.

Par dualité :

(39) $\overline{H}^*(SO(V) ; \mathbb{Z}) = E(\overline{e}'_3 , \overline{e}'_7 , \ldots , \overline{e}'_{4k-1} , \ldots)$ engendrée par des $\overline{e}'_{4k-1}$ <u>primitifs</u>,

et on choisira les signes des générateurs de façon que :

(40) $$\langle \bar{e}_{4k-1} , \bar{e}'_{4k-1} \rangle = 1$$

(les signes seront définitivement choisis plus loin). En outre (cf. Appendice au présent exposé), les éléments de $H_*(SO(V) ; \mathbb{Z})$ dont l'image dans $H_*(SO(V) ; \mathbb{Z}_2)$ appartient à la sous-algèbre de Hopf A forment une algèbre de Hopf isomorphe à $\bar{H}_*(SO(V) ; \mathbb{Z})$. Ainsi l'algèbre extérieure $\bar{H}_*(SO(V) ; \mathbb{Z})$ se plonge canoniquement dans l'algèbre $H_*(SO(V) ; \mathbb{Z})$, et dans ce plongement $\bar{e}_{4k-1}$ vient en un élément (que nous noterons e_{4k-1}) dont l'image dans $H_*(SO(V) ; \mathbb{Z}_2)$ est l'élément primitif $p_{4k-1}(c)$.

REMARQUE. - On ne peut pas plonger $\bar{H}^*(SO(V) ; \mathbb{Z})$ comme <u>sous-algèbre</u> de $H^*(SO(V) ; \mathbb{Z})$, car, dans $H^*(SO(V) ; \mathbb{Z}_2) = L(c'_1 , c'_3 , \dots , c'_{2k-1} , \dots)$, le carré d'un élément non nul n'est jamais nul.

<u>Opérations de Steenrod</u> dans $H^*(SO(V) ; \mathbb{Z}_2)$. - Il suffit de calculer les $Sq^i\, c'_k$. Ce sont des éléments primitifs, donc on a, a priori :

(41) $$Sq^i\, c'_k = \varepsilon(k , i)\, c'_{k+i} ,$$

où $\varepsilon(k , i) = 0$ ou 1. Pour déterminer $\varepsilon(k , i)$, transposons :

$$Sq_i\, c_{k+i} = \varepsilon(k , i)\, c_k .$$

Il suffit de faire ce calcul dans l'homologie de l'espace projectif réel ; par dualité, on voit que les formules (41) seront les mêmes que dans la cohomologie de l'espace projectif réel, ce qui donne aussitôt :

(41') $\varepsilon(k , i) = (k - i , i)$ (coefficient binomial).

7. <u>Groupe spinoriel</u> Spin(V).

Comme algèbre de Hopf, $H^*(SO(V) ; \mathbb{Z}_2)$ est produit tensoriel des algèbres de polynômes $L(c'_{2k-1})$, dont chacune est engendrée par un élément primitif. Par dualité, $H_*(SO(V) ; \mathbb{Z}_2)$ est produit tensoriel d'algèbres de Hopf $E_1 , E_3 , \dots , E_{2k-1} , \dots ,$ E_{2k-1} étant une algèbre extérieure engendrée par des éléments de degrés $2k - 1$, $2(2k - 1)$, $4(2k - 1)$, ..., $2^n(2k - 1)$, ...

Spin(V) est un revêtement d'ordre 2 (simplement connexe) de SO(V). On a donc un fibré :

$$Spin(V) \to SO(V) \to K(\mathbb{Z}_2 , 1) ,$$

où $K(\mathbb{Z}_2 , 1)$ est l'espace projectif réel (de dimension infinie).

$H^*(K(\underset{\sim}{Z}_2, 1); \underset{\sim}{Z}_2)$ est une algèbre de polynômes à un générateur de degré 1, qui s'envoie sur le générateur c'_1 de $H^*(SO(V); \underset{\sim}{Z}_2)$; donc la suite spectrale de cohomologie à coefficients $\underset{\sim}{Z}_2$ a ses différentielles nulles (cf. exposé 5, numéro 5, théorème 4), et $H^*(\mathrm{Spin}(V); \underset{\sim}{Z}_2)$ s'identifie à l'algèbre de Hopf, quotient de $H^*(SO(V); \underset{\sim}{Z}_2) = L(c'_1, c'_3, \dots, c'_{2k-1}, \dots)$ par l'idéal engendré par c'_1. Ainsi

(42) $H^*(\mathrm{Spin}(V); \underset{\sim}{Z}_2) = L(c'_3, c'_5, \dots, c'_{2k-1}, \dots)$ engendrée par des c'_{2k-1} primitifs.

Par dualité, on voit que :

(43) $H_*(\mathrm{Spin}(V); Z_2)$ s'identifie à la sous-algèbre de Hopf $E_3 \otimes E_5 \otimes \dots \otimes E_{2k-1} \otimes \dots$ de $H_*(SO(V); \underset{\sim}{Z}_2)$; comme algèbre, c'est une algèbre extérieure engendrée par des éléments de tous les degrés non égaux à une puissance de 2.

8. Comparaison de $U(X)$ et de $SO(X)$.

Considérons l'inclusion naturelle $U(X) \subset SO(X)$. En regardant les fibrations de $U(k)$ et de $SO(2k)$ sur la sphère S^{2k-1}, on voit que, dans l'homomorphisme :

$$H_*(U(X); \underset{\sim}{Z}_2) \to H_*(SO(X); \underset{\sim}{Z}_2) \quad ,$$

le générateur a_{2k-1} va sur l'élément primitif $p_{2k-1}(c)$. Par dualité,

(44) dans $H^*(SO(X); \underset{\sim}{Z}_2) \to H^*(U(X); \underset{\sim}{Z}_2)$, c'_{2k-1} va en a'_{2k-1}.

De plus, les fibrations de $U(2k)$ et $SO(4k)$ sur S^{4k-1} montrent que, dans $H_*(U(X); \underset{\sim}{Z}) \to \bar{H}_*(SO(X); \underset{\sim}{Z})$, a_{4k-1} va en $\pm \bar{e}_{4k-1}$. En fait, on peut même préciser : dans $H_*(U(X); \underset{\sim}{Z}) \to H_*(SO(X); \underset{\sim}{Z})$, a_{4k-1} va dans $\pm e_{4k-1}$, puisque c'est un élément dont l'image dans $H_*(SO(V); Z_2)$ est $p_{4k-1}(c)$. Nous fixerons les signes en convenant que :

(45) L'application $H_*(U(X); \underset{\sim}{Z}) \to H_*(SO(X); \underset{\sim}{Z})$ envoie a_{4k-1} en e_{4k-1}.
Par dualité, $\bar{H}^*(SO(X); \underset{\sim}{Z}) \to H^*(U(X); \underset{\sim}{Z})$ envoie $\bar{e}'_{4k-1}$ en a'_{4k-1}.

9. Espace classifiant $BO(V)$.

On a vu (exposé 9) que :

(46) $H^*(BO(V); \underset{\sim}{Z}_2) = L(z'_1, z'_2, \dots, z'_k, \dots)$, $\Delta z'_k = \sum_{i+j=k} z'_i \otimes z'_j$ $(z'_0 = 1)$;

les z'_k sont les classes de Stiefel-Whitney du fibré universel de groupe $O(V)$.

En raisonnant comme au numéro 1 (pour les classes de Chern), on obtient par dualité :

(47) $H_*(BO(V)\,;\mathbb{Z}_2) = L(z_1\,,\, z_2\,,\, \dots\,,\, z_k\,,\, \dots)\,, \qquad \Delta z_k = \sum_{i+j=k} z_i \otimes z_j$
$(z_0 = 1)$.

La relation entre les z_k et les z'_k est donnée par :

(48) $\langle (z_1)^k\,,\, z'_k\rangle = 1\,,\quad z'_k$ orthogonal à tous les monômes $\neq (z_1)^k$,

(49) $\langle z_k\,,\, (z'_1)^k\rangle = 1\,,\quad z_k$ orthogonal à tous les monômes $\neq (z'_1)^k$.

L'application $P(V) \to BO(V)$ défimit un homomorphisme de coalgèbres $H_*(P(V)\,;\mathbb{Z}_2) \to H_*(BO(V)\,;\mathbb{Z}_2)$ qui envoie $\gamma_k(w)$ en z_k (w désignant le générateur de $H_1(P(V)\,;\mathbb{Z}_2)$, c'est-à-dire en fait l'unique élément non nul de $H_1(P(V)\,;\mathbb{Z}_2)$). Ceci explicite entièrement les z_k , et par dualité les z'_k .

L'espace des éléments primitifs de $H_*(BO(V)\,;\mathbb{Z}_2)$ a pour base les éléments :

(50) $p_1 = z_1\,,\qquad p_2 = (z_1)^2\,,\ \dots\,,\qquad p_{2k} = (p_k)^2\,,$

$$p_{2k+1} = z_{2k+1} + \sum_{j=1}^{2k} z_j\, p_{2k+1-j} \quad .$$

Ils satisfont aux relations $\langle p_k\,,\, z'_k\rangle = 1$. Pour éviter toute confusion avec les primitifs de $H_*(BU(X)\,;\mathbb{Z})$, on les notera $p_k(z)$.

La connaissance des opérations de Bockstein dans $H_*(P(V)\,;\mathbb{Z}_2)$ détermine aussitôt les Bockstein dans $H_*(BO(V)\,;\mathbb{Z}_2)$:

(51) $\beta z_{2k} = z_{2k-1}$ (β est une dérivation d'algèbre), ce qui entraîne $\beta\, p_{2k+1}(z) = (p_k(z))^2$.

Par dualité, un calcul facile donne les Bockstein dans $H^*(BO(V)\,;\mathbb{Z}_2)$:

(52) $$\beta' z'_{2k} = z'_{2k+1} + z'_1\, z'_{2k}\,,\quad \beta' z'_{2k+1} = z'_1\, z'_{2k+1}$$

(pour le voir, observer que $\beta' z'_{n+1}$ est orthogonal à tous les monômes sauf $(z_1)^n z_2$; si $n = 2k$, il en est de même de $z'_1\, z'_{2k+1}$; si $n = 2k-1$, il en est de même de $z'_{2k+1} + z'_1\, z'_{2k}$).

<u>Calcul de la</u> β-<u>homologie de</u> $H_*(BO(V)\,;\mathbb{Z}_2)$: comme β-algèbre différentielle graduée, $H_*(BO(V)\,;\mathbb{Z}_2)$ est un produit tensoriel :

$$\bigotimes_{k\geq 1} L(z_{2k-1}\,,\, z_{2k}) \quad ,$$

β étant défini par (51).

Donc l'algèbre de β-homologie s'identifie au produit tensoriel des β-algèbres d'homologie des $L(z_{2k-1}, z_{2k})$, c'est-à-dire au produit tensoriel des algèbres de polynômes $L((z_{2k})^2)$. Ainsi, l'algèbre de polynômes $L((z_2)^2, \ldots, (z_{2k})^2, \ldots)$ est une sous-algèbre A de $H_*(BO(V); \underset{\sim}{Z}_2)$, contenue dans le noyau de β, et qui s'envoie isomorphiquement sur $\operatorname{Ker}\beta/\operatorname{Im}\beta$. Dans chaque degré, le rang de A (comme espace vectoriel sur $\underset{\sim}{Z}_2$) est égal au rang de $H_*(BO(V); \underset{\sim}{Q}_2)$ comme $\underset{\sim}{Q}_2$-module : en effet :

$$H_*(BO(V); \underset{\sim}{Q}_2) \approx H_*(B(SO(V)); \underset{\sim}{Q}_2)$$

puisque $B(SO(V))$ est un revêtement d'ordre 2 de $BO(V)$. Or, d'après le théorème de Borel (exposé 7, paragraphe 7, théorème 1), (28) entraîne que $H^*(B(SO(V)); \underset{\sim}{Q}_2)$ est une algèbre de polynômes avec un générateur dans chaque dimension $4k$;

C. Q. F. D.

Puisque, dans chaque degré, le $\underset{\sim}{Z}_2$-rang de A est égal au $\underset{\sim}{Q}_2$-rang de $H_*(BO(V); \underset{\sim}{Q}_2)$, les éléments de torsion de $H_*(BO(V); \underset{\sim}{Z})$ sont d'ordre 2 (cf. exposé 5, Appendice). De plus (cf. Appendice au présent exposé), les éléments de $H_*(BO(V); \underset{\sim}{Z})$ dont l'image dans $H_*(BO(V); \underset{\sim}{Z}_2)$ appartient à la sous-algèbre A forment une sous-algèbre B de $H_*(BO(V); \underset{\sim}{Z})$ canoniquement isomorphe à l'algèbre $\overline{H}_*(BO(V); \underset{\sim}{Z}) = H_*(BO(V); \underset{\sim}{Z})/\operatorname{Tors} H_*(BO(V); \underset{\sim}{Z})$. On verra plus loin (numéro 10) que c'est une algèbre de polynômes engendrée par des éléments de degrés $4k$.

Soit maintenant A' la sous-algèbre de $H^*(BO(V); \underset{\sim}{Z}_2)$ engendrée par les $(z'_{2k})^2$; elle est isomorphe à $L((z'_2)^2, \ldots, (z'_{2k})^2, \ldots)$. Elle est dans le noyau de β', et comme la dualité entre $L(z_1, \ldots, z_k, \ldots)$ et $L(z'_1, \ldots, z'_k, \ldots)$ induit une dualité entre A et A', il s'ensuit que A' s'applique isomorphiquement sur $\operatorname{Ker}\beta'/\operatorname{Im}\beta'$. Donc (Appendice) les éléments de $H^*(BO(V); \underset{\sim}{Z})$ dont l'image dans $H^*(BO(V); \underset{\sim}{Z}_2)$ appartient à A' forment une sous-algèbre B' de $H^*(BO(V); \underset{\sim}{Z})$ isomorphe à $\overline{H}^*(BO(V); \underset{\sim}{Z})$. Or cette dernière algèbre est une algèbre de polynômes engendrée par des éléments de degrés $4k$ (en effet, il en est ainsi pour $H^*(BO(V); \underset{\sim}{Q}_2)$ et pour A ; il suffit alors d'appliquer l'exposé 4, corollaire du théorème 4). Par le plongement de $\overline{H}^*(BO(V); \underset{\sim}{Z})$ dans $H^*(BO(V); \underset{\sim}{Z})$ (i. e. sur la sous-algèbre B' définie à l'instant), les générateurs de cette algèbre de polynômes viennent en des éléments t'_{4k}, définis au signe près, et dont les images dans $H^*(BO(V); \underset{\sim}{Z}_2)$ sont précisément les $(z'_{2k})^2$.

On déterminera plus loin [formule (58)] l'application diagonale de l'algèbre de Hopf $\overline{H}^*(BO(V); \underset{\sim}{Z})$, ainsi que le signe des générateurs t'_{4k}. Ceci permettra, par dualité, de montrer que l'algèbre $\overline{H}_*(BO(V)\ ;\ \underset{\sim}{Z})$ est aussi une algèbre de polynômes et de déterminer son application diagonale.

On observera que B' a pour supplémentaire dans $H^*(BO(V)\ ;\ \underset{\sim}{Z})$ le sous-espace Tors $H^*(BO(V)\ ;\ \underset{\sim}{Z})$, canoniquement isomorphe à $\operatorname{Im}\beta'$; et que $(z'_{2k+1})^2 \in \operatorname{Im}\beta'$, car $(z'_{2k+1})^2 = \beta'(z'_{2k}\ z'_{2k+1})$.

Passons à l'espace classifiant $B(SO(V))$, qui est un revêtement d'ordre 2 de $BO(V)$. On a donc un fibré :

$$B(SO(V)) \to BO(V) \to K(\underset{\sim}{Z}_2\ ,\ 1) \quad .$$

En raisonnant comme pour le calcul de $H^*(\mathrm{Spin}(V)\ ;\ \underset{\sim}{Z}_2)$, on voit que :

(53) $$H^*(B(SO(V))\ ;\ \underset{\sim}{Z}_2) = L(z'_2\ ,\ z'_3\ ,\ \dots\ ,\ z'_k\ ,\ \dots) \quad ,$$

quotient de $H^*(BO(V)\ ;\ \underset{\sim}{Z}_2)$ par l'idéal engendré par z'_1. Les z'_k (pour $k \geqslant 2$) sont les classes de Stiefel-Whitney du fibré universel de groupe $SO(V)$. Dans $H^*(B(SO(V))\ ;\ \underset{\sim}{Z}_2)$, les opérations de Bockstein sont données, d'après (52), par :

$$\beta' z'_{2k} = z'_{2k+1}\ , \qquad \beta' z'_{2k+1} = 0 \quad .$$

Il en résulte que la sous-algèbre A' engendrée par les $(z'_{2k})^2$ est canoniquement isomorphe à la β'-algèbre de cohomologie de $H^*(B(SO(V))\ ;\ \underset{\sim}{Z}_2)$. Ainsi $H^*(B(SO(V))\ ;\ \underset{\sim}{Z}_2)$ et $H^*(BO(V)\ ;\ \underset{\sim}{Z}_2)$ ont même β'-cohomologie ; et puisque $H^*(B(SO(V))\ ;\ \underset{\sim}{Q}_2) \approx H^*(BO(V)\ ;\ \underset{\sim}{Q}_2)$, on conclut :

(54) $\overline{H}^*(BO(V)\ ;\ \underset{\sim}{Z}) \to \overline{H}^*(B(SO(V))\ ;\ \underset{\sim}{Z})$ est un isomorphisme.

Par dualité :

(54') $\overline{H}_*(B(SO(V))\ ;\ \underset{\sim}{Z}) \to \overline{H}_*(BO(V)\ ;\ \underset{\sim}{Z})$ est un isomorphisme.

De là résulte que $H^*(B(SO(V))\ ;\ \underset{\sim}{Z})$ s'identifie au quotient de $H^*(BO(V)\ ;\ \underset{\sim}{Z})$ par un sous-espace de torsion.

10. <u>Comparaison de</u> $SO(V)$ <u>et</u> $U(V_{\underset{\sim}{C}})$.

Considérons la composée des injections $SO(V) \to U(V_{\underset{\sim}{C}}) \to SO(V_{\underset{\sim}{C}})$. Elle définit $\overline{H}_*(SO(V)\ ;\ \underset{\sim}{Z}) \to \overline{H}_*(SO(V_{\underset{\sim}{C}})\ ;\ \underset{\sim}{Z})$ qui envoie $\overline{e}_{4k-1}$ en $2\overline{e}_{4k-1}$. On le voit en raisonnant comme dans la démonstration de (20), mais c'est encore plus facile. De plus $H_*(U(V_{\underset{\sim}{C}})\ ;\ \underset{\sim}{Z}) \to \overline{H}_*(SO(V_{\underset{\sim}{C}})\ ;\ \underset{\sim}{Z})$ envoie a_{4k-1} en $\overline{e}_{4k-1}$, d'après (45). Donc :

(55) <u>Dans</u> $H_*(SO(V)\ ;\ \underset{\sim}{Z}) \to H_*(U(V_{\underset{\sim}{C}})\ ;\ \underset{\sim}{Z})$, e_{4k-1} <u>va en</u> $2a_{4k-1}$.

Il s'ensuit qu'à coefficients dans $\underset{\sim}{Q}_2$; l'application :

$$H_*(SO\ (V)\ ;\ \underset{\sim}{Q}_2) \to H_*(U(V_{\underset{\sim}{C}})\ ;\ \underset{\sim}{Q}_2)$$

envoie bijectivement l'espace des "générateurs" (quotient par le sous-espace des décomposables) sur l'espace des "générateurs", en chaque degré $4k-1$. Donc $H_*(B(SO(V))\,;\underset{\sim}{Q}_2) \to H_*(BU(\underset{\sim}{V_C})\,;\underset{\sim}{Q}_2)$ envoie bijectivement l'espace des primitifs sur l'espace des primitifs, en chaque degré $4k$. Par dualité :

$$H^*(BU(\underset{\sim}{V_C})\,;\underset{\sim}{Q}_2) \to H^*(BO(V)\,;\underset{\sim}{Q}_2)$$

envoie bijectivement l'espace des "générateurs" de degré $4k$ sur l'espace des "générateurs" de degré $4k$. Par suite, l'application $H^*(BU(\underset{\sim}{V_C})\,;\underset{\sim}{Z}) \to H^*(BO(V)\,;\underset{\sim}{Z})$ envoie x'_{4k} en $\lambda_k t'_{4k}$, où λ_k est une puissance de 2 ou l'opposé d'une puissance de 2.

On va préciser ce résultat, et prouver que x'_{4k} va en $\pm t'_{4k}$, ce qui permettra de fixer le choix des t'_{4k} en convenant que :

(56) <u>L'application</u> $H^*(BU(\underset{\sim}{V_C})\,;\underset{\sim}{Z}) \to H^*(BO(V)\,;\underset{\sim}{Z})$ <u>envoie</u> x'_{4k} <u>en</u> t'_{4k}.

Pour le montrer, on va déterminer l'homomorphisme d'algèbres de Hopf :

$$\varphi : H_*(BO(V)\,;\underset{\sim}{Z}_2) \to H_*(BU(\underset{\sim}{V_C})\,;\underset{\sim}{Z}_2) .$$

On sait déjà que les générateurs z_k de l'algèbre de polynômes $H_*(BO(V)\,;\underset{\sim}{Z}_2)$ sont les images des générateurs additifs de $H_*(P(V)\,;\underset{\sim}{Z}_2)$, que nous noterons encore z_k, identifiant $H_*(P(V)\,;\underset{\sim}{Z}_2)$ à une sous-coalgèbre de $H_*(BO(V)\,;\underset{\sim}{Z}_2)$; et que les générateurs x_{2k} de l'algèbre de polynômes $H_*(BU(\underset{\sim}{V_C})\,;\underset{\sim}{Z}_2)$ sont les images des générateurs additifs de $H_*(P(\underset{\sim}{V_C})\,;\underset{\sim}{Z}_2)$, que nous noterons encore x_{2k}, identifiant $H_*(P(\underset{\sim}{V_C})\,;\underset{\sim}{Z}_2)$ à une sous-coalgèbre de $H_*(BU(\underset{\sim}{V_C})\,;\underset{\sim}{Z}_2)$. L'application φ sera déterminée par sa restriction :

$$\psi : H_*(P(V)\,;\underset{\sim}{Z}_2) \to H_*(P(\underset{\sim}{V_C})\,;\underset{\sim}{Z}_2) ,$$

induite par l'injection naturelle de l'espace projectif réel dans son complexifié. Je dis que $\psi(z_{2k}) = x_{2k}$, $\psi(z_{2k+1}) = 0$: en effet, en cohomologie $H^*(P(\underset{\sim}{V_C})\,;\underset{\sim}{Z}) \to H^*(P(V)\,;\underset{\sim}{Z}_2)$, le générateur de degré 2 de l'algèbre de polynômes $H^*(P(\underset{\sim}{V_C})\,;\underset{\sim}{Z})$ s'en va sur le carré du générateur de degré 1 de l'algèbre de polynômes $H^*(P(V)\,;\underset{\sim}{Z}_2)$.

Ainsi $\varphi(z_{2k}) = x_{2k}$, $\varphi(z_{2k+1}) = 0$. Par dualité :

(57) $H^*(BU(\underset{\sim}{V_C})\,;\underset{\sim}{Z}) \to H^*(BO(V)\,;\underset{\sim}{Z}_2)$ <u>envoie</u> x'_{2k} <u>dans</u> $(z'_k)^2$;

en effet, $(z'_k)^2$ et l'image de x'_{2k} sont orthogonaux à tout monôme $\neq (z_2)^k$, et leur produit scalaire avec $(z_2)^k$ est égal a 1.

(57) montre que x'_{4k+2} va dans un élément d'ordre 2 de $H^*(BO(V)\,;\underset{\sim}{Z})$, élément qu'on peut identifier à $(z'_{2k+1})^2$ par l'isomorphisme $\operatorname{Tors} H^*(BO(V)\,;\underset{\sim}{Z}) \approx \operatorname{Im}\beta'$.

De (57), il résulte d'autre part que $H^*(BU(V_{\underset{\sim}{C}})\ ;\underset{\sim}{Z}) \to H^*(BO(V)\ ;\underset{\sim}{Z})$ envoie x'_{4k} dans un élément dont l'image dans $H^*(BO(V)\ ;\underset{\sim}{Z}_2)$ est $(z'_{2k})^2$, c'est-à-dire dans un élément de la forme $t'_{4k} + 2u'$, u' étant un élément de la sous-algèbre $B' \subset H^*(BO(V)\ ;\underset{\sim}{Z})$. Or on sait déjà que x'_{4k} va en $\lambda_k\, t'_{4k}$, $\pm\lambda_k$ étant une puissance de 2 ; par comparaison, on voit que $\lambda_k = \pm 1$, comme annoncé.

Ainsi, on a le droit de poser la convention (56). Les t'_{4k} ainsi définis s'appellent les <u>classes de Pontrjagin</u> du fibré universel de groupe $O(V)$. Elles engendrent la sous-algèbre B' de $H^*(BO(V)\ ;\underset{\sim}{Z})$, qui est une algèbre de polynômes (sans torsion) ayant pour supplémentaire $\operatorname{Tors} H^*(BO(V)\ ;\underset{\sim}{Z})$.

$H^*(BU(V_{\underset{\sim}{C}})\ ;\underset{\sim}{Z}) \to H^*(BO(V)\ ;\underset{\sim}{Z})$ est un homomorphisme d'algèbres de Hopf, et qui envoie x'_{4k+2} en 0 et x'_{4k} en $\overline{t}'_{4k}$, en notant $\overline{t}'_{4k}$ l'image de t'_{4k} dans $\overline{H}^*(BO(V)\ ;\underset{\sim}{Z}))$; l'application diagonale de $\overline{H}^*(BO(V)\ ;\underset{\sim}{Z})$ est donc donnée par :

$$(58) \qquad \Delta\overline{t}'_{4k} = \sum_{i+j=k} \overline{t}'_{4i} \otimes \overline{t}'_{4j} \qquad (\overline{t}'_0 = 1) \quad .$$

Par dualité (cf. exposé 10), on obtient :

(59) $\overline{H}_*(BO(V)\ ;\underset{\sim}{Z})$ <u>est une algèbre de polynômes</u> $L(\overline{t}_4, \ldots, \overline{t}_{4k}, \ldots)$ <u>avec l'application diagonale</u> $\Delta\overline{t}_{4k} = \sum_{i+j=k} \overline{t}_{4i} \otimes \overline{t}_{4j}$ $(\overline{t}_0 = 1)$.

On a défini au numéro 9 un isomorphisme de $\overline{H}_*(BO(V)\ ;\underset{\sim}{Z})$ sur une sous-algèbre B de $H_*(BO(V)\ ;\underset{\sim}{Z})$. On notera t_{4k} l'image de $\overline{t}_{4k}$ par cet isomorphisme. Ainsi $B = L(t_4, \ldots, t_{4k}, \ldots)$ a pour supplémentaire, dans $H_*(BO(V)\ ;\underset{\sim}{Z})$, le groupe de torsion, formé d'éléments d'ordre 2. L'image de t_{4k} dans $H_*(BO(V)\ ;\underset{\sim}{Z}_2)$ est $(z_{2k})^2$.

REMARQUE. - La relation (58) et l'application diagonale dans $H^*(BO(V)\ ;\underset{\sim}{Z}_2)$ (définie par (46)) déterminent l'application diagonale dans $H^*(BO(V)\ ;\underset{\sim}{Z})$, bien que, a priori, ce ne soit pas une algèbre de Hopf :

$$(58') \quad \Delta t'_{4k} = \sum_{i+j=k} t'_{4i} \otimes t'_{4j} + \sum_{i=1}^{k} (z'_{2i-1})^2 \otimes (z'_{2k-2i+1})^2 \quad ,$$

en rappelant qu'on a identifié $(z'_{2j-1})^2$ à l'élément de $\operatorname{Tors}(H^*(BO(V)\ ;Z)$, image de $x'_{4j-2} \in H^*(BU(V_{\underset{\sim}{C}})\ ;\underset{\sim}{Z})$. On a de même :

$$(59') \quad \Delta t_{4k} = \sum_{i+j=k} t_{4i} \otimes t_{4j} + \sum_{i=1}^{k} (z_{2i-1})^2 \otimes (z_{2k-2i+1})^2 \quad .$$

L'application diagonale (59) permet d'expliquer une base de l'espace des éléments primitifs de $\overline{H}_*(BO(V)\ ;\underset{\sim}{Z})$:

(60) $p_4 = \bar{t}_4$, ... , $\qquad p_{4k} = (-1)^{k+1} k\bar{t}_{4k} + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1}\, \bar{t}_{4j}\, p_{4k-4j}$, ...

On les notera $p_{4k}(\bar{t})$.

D'après (56), l'application $H^*(BU(V_{\underset{\sim}{C}}) ; \underset{\sim}{Z}) \to \bar{H}^*(BO(V) ; \underset{\sim}{Z})$ envoie x'_{4k} en $\bar{t}'_{4k}$, et x'_{4k+2} en 0 , comme on l'a déjà dit. Par dualité ;

(61) $\bar{H}_*(BO(V) ; \underset{\sim}{Z}) \to H_*(BU(V_{\underset{\sim}{C}}) ; \underset{\sim}{Z})$ envoie $p_{4k}(\bar{t})$ en $p_{4k}(x)$.

De là on déduit, comme pour (16) :

(62) $H_*(BO(V) ; \underset{\sim}{Z}) \to H_*(BU(V_{\underset{\sim}{C}}) ; \underset{\sim}{Z})$ envoie $(-1)^k\, t_{4k}$ en $\sum_{i+j=2k} (-1)^i\, x_{2i}\, x_{2j}$.

En raisonnant comme dans la démonstration de (20), on montre que l'application composée :

$$\bar{H}_*(BO(V) ; \underset{\sim}{Z}) \xrightarrow{f} H_*(BU(V_{\underset{\sim}{C}}) ; \underset{\sim}{Z}) \xrightarrow{g} \bar{H}_*(BO(V_{\underset{\sim}{C}}) ; \underset{\sim}{Z})$$

envoie chaque élément primitif dans le double de ce même élément. Ainsi $g \circ f$ envoie $p_{4k}(\bar{t})$ en $2p_{4k}(\bar{t})$. Or, d'après (61), f envoie $p_{4k}(\bar{t})$ en $p_{4k}(x)$; donc g envoie $p_{4k}(x)$ en $2p_{4k}(\bar{t})$, et (pour des raisons de degré) envoie $p_{4k+2}(x)$ en 0 .

Ce résultat, qu'on vient de montrer pour l'espace complexe $V_{\underset{\sim}{C}}$, vaut pour tout espace complexe X de dimension infinie. Ainsi :

(63) $H_*(BU(X) ; \underset{\sim}{Z}) \to \bar{H}_*(BO(X) ; \underset{\sim}{Z})$ envoie $p_{4k}(x)$ en $2p_{4k}(\bar{t})$.

On a vu (numéro 1) que la suspension $\sigma_* : H_*(U(X) ; \underset{\sim}{Z}) \to H_*(BU(X) ; \underset{\sim}{Z})$ envoie a_{4k-1} en $p_{4k}(x)$; on sait d'autre part par (45) que l'injection $U(X) \subset SO(X)$ envoie a_{4k-1} en $e_{4k-1} \in H_*(SO(X) ; \underset{\sim}{Z})$. En comparant à (63), et en identifiant $\bar{H}_*(B(SO(X)) ; \underset{\sim}{Z})$ à $\bar{H}_*(BO(X) ; \underset{\sim}{Z})$ d'après (54'), on obtient :

(64) La suspension $\sigma_* : \bar{H}_*(SO(X) ; \underset{\sim}{Z}) \to \bar{H}_*(B(SO(X)) ; \underset{\sim}{Z})$ envoie $\bar{e}_{4k-1}$ en $2p_{4k}(\bar{t})$; par dualité :

(64') La suspension $\sigma^* : \bar{H}^*(B(SO(X)) ; \underset{\sim}{Z}) \to \bar{H}^*(SO(X) ; \underset{\sim}{Z})$ envoie $\bar{t}'_{4k}$ en $2\bar{e}'_{4k-1}$.

La propriété (63) montre, en explicitant $p_{4k}(x)$ et $p_{4k}(\bar{t})$, et en raisonnant par récurrence sur k :

(63') $H_*(BU(X) ; \underset{\sim}{Z}) \to \bar{H}_*(BO(X) ; \underset{\sim}{Z})$ envoie x_{4k} en $(-1)^k\, \bar{t}_{4k}$, et x_{4k+2} en 0 .

De là on déduit, en raisonnant comme pour (21) et (22) :

(65) $H^*(BO(X) ; \underset{\sim}{Z}) \to H^*(BU(X) ; \underset{\sim}{Z})$ envoie t'_{4k} en $\sum_{i+j=k} (-1)^i x'_{2i} x'_{2j}$.

On va préciser la relation (63'), comme suit :

(66) $H_*(BU(X) ; \underset{\sim}{Z}) \to H_*(BO(X) ; \underset{\sim}{Z})$ envoie x_{4k} en $(-1)^k t_{4k}$.

La relation (66) va résulter de (63') et de ceci :

(67) $H_*(BU(X) ; \underset{\sim}{Z}) \to H_*(BO(X) ; \underset{\sim}{Z}_2)$ envoie x_{2k} en $(z_k)^2$.

DÉMONSTRATION de (67). -L'application $H_*(U(X) ; \underset{\sim}{Z}_2) \to H_*(SO(X) ; \underset{\sim}{Z}_2)$ induit, en chaque degré impair, un isomorphisme des espaces d'"éléments indécomposables" ; comme les suspensions :

$$H_*(U(X) ; \underset{\sim}{Z}_2) \to H_*(BU(X) ; \underset{\sim}{Z}_2) \qquad \text{et} \qquad H_*(SO(X) ; \underset{\sim}{Z}_2) \to H_*(B(SO(X)) ; \underset{\sim}{Z}_2)$$

définissent un isomorphisme des indécomposables sur les primitifs (cf. exposé 7, paragraphe 7, théorème 3 ; ce théorème est applicable en caractéristique 2 même lorsque le module A de l'énoncé n'est pas pair, pourvu que L(A) ait même rang, en chaque degré, que l'homologie de la fibre), il s'ensuit que l'application (67) induit un isomorphisme des espaces d'éléments primitifs, en chaque degré pair. Or ce fait détermine entièrement l'application, et la propriété (67) en découle par récurrence sur k .

De (67) on déduit aussitôt, par dualité :

(68) $H^*(BO(X) ; \underset{\sim}{Z}_2) \to H^*(BU(X) ; \underset{\sim}{Z}_2)$ envoie z'_{2k+1} en 0 , et z'_{2k} en x'_{2k} .

11. Homologie et cohomologie de $SO(X)/U(X)$.

Coefficients $\underset{\sim}{Q}_2$. - Considérons le fibré en espaces de Hopf :

$$SO(X)/U(X) \to BU(X) \to B(SO(X)) \quad .$$

En homologie, l'application $H_*(BU(X) ; \underset{\sim}{Q}_2) \to H_*(B(SO(X)) ; \underset{\sim}{Q}_2)$ est surjective d'après (63') ; donc $H_*(SO(X)/U(X) ; \underset{\sim}{Q}_2)$ s'identifie à la sous-algèbre de Hopf de $H_*(BU(X) ; \underset{\sim}{Q}_2)$, "noyau" de l'homomorphisme d'algèbres de Hopf $H_*(BU(X) ; \underset{\sim}{Q}_2) \to H_*(B(SO(X)) ; \underset{\sim}{Q}_2)$. Le calcul est le même que pour l'homologie $H_*(Sp(X_H)/U(X) ; \underset{\sim}{Z})$ (cf. numéro 5), et on trouve :

(69) $H_*(SO(X)/U(X) ; \underset{\sim}{Q}_2)$ <u>est une algèbre de polynômes engendrée par les éléments</u> $u_2 , u_6 , \ldots , u_{4k+2} , \ldots$ (définis par (24)).

Par dualité (cf. (23)) :

$H^*(SO(X)/U(X) ; \underset{\sim}{Q}_2)$ s'identifie au quotient de $H^*(BU(X) ; \underset{\sim}{Q}_2)$ par l'idéal engendré par les éléments $\sum_{i+j=k} (-1)^i x'_{2i} x'_{2j}$. Puisque la division par 2 est possible (coefficients $\underset{\sim}{Q}_2$), x'_{4k} s'exprime (par récurrence sur k) comme polynôme en les x'_{4i-2} pour $i \leqslant k$, d'où :

(70) $H^*(SO(X)/U(X) ; \underset{\sim}{Q}_2) = L(x'_2 , x'_6 , \dots , x'_{4k+2} , \dots)$ (<u>algèbre de polynômes par rapport aux classes de Chern de degrés</u> $4k + 2$) .

<u>Coefficients</u> $\underset{\sim}{Z}_2$. - Considérons le fibré en espaces de Hopf :

$$U(X) \to SO(X) \to SO(X)/U(X) \quad .$$

On a vu au numéro 8 que $H_*(U(X) ; \underset{\sim}{Z}_2) \to H_*(SO(X) ; \underset{\sim}{Z}_2)$ envoie a_{2k+1} en $p_{2k+1}(c)$; c'est donc une injection, et par suite $H_*(SO(X)/U(X) ; \underset{\sim}{Z}_2)$ s'identifie au quotient de $H_*(SO(X) ; \underset{\sim}{Z}_2) = E(c_1 , c_2 , \dots , c_k , \dots)$ par l'idéal engendré par $p_1(c)$, $p_3(c)$, ... , $p_{2k+1}(c)$, ... ; d'après (36), cet idéal est aussi l'idéal engendré par c_1 , c_3 , ... , c_{2k+1} , ... , d'où :

(71) $H_*(SO(X)/U(X) ; \underset{\sim}{Z}_2) = E(c_2 , c_4 , \dots , c_{2k} , \dots)$ (<u>algèbre extérieure</u>), <u>avec l'application diagonale induite</u> $\Delta c_{2k} = \sum_{i+j=k} c_{2i} \otimes c_{2j}$.

Par dualité :

(72) $H^*(SO(X)/U(X) ; \underset{\sim}{Z}_2) = L(c'_2 , c'_6 , \dots , c'_{4k+2} , \dots)$, algèbre de polynômes engendrée par des éléments <u>primitifs</u> $c'_{4k+2} = (c'_{2k+1})^2$.

Par comparaison de (70) et (72), et en appliquant le corollaire du théorème 4 de l'exposé 4, on voit que :

(73) $H^*(SO(X)/U(X) ; \underset{\sim}{Z})$ <u>est une algèbre de polynômes</u> $L(u'_2 , u'_6 , \dots u'_{4k+2} , \dots)$

En fait, on verra plus loin (cf. (88)) qu'on peut prendre comme générateurs u'_{4k+2} de cette algèbre <u>les moitiés des classes de Chern</u> x'_{4k+2} du fibré $SO(X)$, de groupe $U(X)$, de base $SO(X)/U(X)$.

12. <u>Homologie et cohomologie de</u> $U(\underset{\sim}{V_C})/O(V)$ <u>et de</u> $SU(\underset{\sim}{V_C})/SO(V)$.

Rappelons (cf. exposé 16, proposition 1) qu'on peut considérer $SU(\underset{\sim}{V_C})/O(V)$ comme le revêtement universel de $U(\underset{\sim}{V_C})/O(V)$, dont le groupe fondamental est $\underset{\sim}{Z}$.

<u>Coefficients</u> $\underset{\sim}{Q}_2$. - Considérons le fibré en espaces de Hopf :

$$SO(V) \to U(\underset{\sim}{V_C}) \to U(\underset{\sim}{V_C})/SO(V) \quad .$$

L'application $H_*(SO(V) ; \underset{\sim}{Q}_2) \to H_*(U(\underset{\sim}{V_C}) ; \underset{\sim}{Q}_2)$ est injective, d'après (55) ; donc $H_*(U(\underset{\sim}{V_C})/O(V) ; \underset{\sim}{Q}_2) = H_*(U(\underset{\sim}{V_C})/SO(V) ; \underset{\sim}{Q}_2)$ s'identifie au quotient de $H_*(U(\underset{\sim}{V_C}) ; \underset{\sim}{Q}_2)$ par l'idéal engendré par les éléments a_{4k-1} ; ainsi :

(74) $H_*(U(\underset{\sim}{V_C})/O(V) ; \underset{\sim}{Q}_2) = E(a_1 , a_5 , \dots , a_{4k+1} , \dots)$, <u>algèbre extérieure angendrée par des éléments primitifs.</u>

Par dualité :

(74') $H^*(U(V_C)/O(V) ; Q_2) = E(a'_1 , a'_5 , \dots , a'_{4k+1} , \dots)$ (s'identifie à une <u>sous-algèbre</u> de $H^*(U(V_C) ; Q_2)$).

<u>Coefficients</u> Z_2 . - Considérons le fibré en espaces de Hopf :

$$U(V_C)/O(V) \to BO(V) \to BU(V_C) \quad .$$

On a vu (numéro 10) que l'application $\varphi : H_*(BO(V) ; Z_2) \to H_*(BU(V_C) ; Z_2)$ envoie z_{2k} en x_{2k} , et z_{2k+1} en 0 ; elle est donc surjective, et par suite $H_*(U(V_C)/O(V) ; Z_2)$ s'identifie à la sous-algèbre de Hopf de :

$$H_*(BO(V) ; Z_2) = L(z_1 , z_2 , \dots , z_k , \dots) \quad ,$$

"noyau" de φ . D'où :

(75) $H_*(U(V_C)/O(V) ; Z_2) = L(p_1(z) , p_3(z) , \dots , p_{2k+1}(z) , \dots)$, <u>algèbre de polynômes engendrée par des éléments primitifs</u>, avec :

$$\beta p_{2k+1}(z) = (p_k(z))^2 \quad .$$

Par dualité, $H^*(U(V_C)/O(V) ; Z_2)$ s'identifie au quotient de :

$$H^*(BO(V) ; Z_2) = L(z'_1 , z'_2 , \dots , z'_k , \dots)$$

par l'idéal engendré par les $(z'_k)^2$ (cf. (57)) ; autrement dit :

(76) $H^*(U(V_C)/O(V) ; Z_2) = E(z'_1 , z'_2 , \dots , z'_k , \dots)$, <u>algèbre extérieure avec application diagonale</u> $\Delta z'_k = \sum_{i+j=k} z'_i \otimes z'_j$, l'opérateur de Bockstein étant donné par (52).

Calculons la β'-cohomologie de $H^*(U(V_C)/O(V) ; Z_2)$: comme β'-algèbre différentielle graduée, elle admet une sous-algèbre $E(z'_1)$ (avec $\beta' z'_1 = 0$) ; le quotient par l'idéal qu'elle engendre est $E(z'_2 , \dots , z'_k , \dots)$, avec le Bockstein $\beta' z'_{2k} = z'_{2k+1}$, $\beta' z'_{2k+1} = 0$. De là résulte que les éléments :

$$z'_1 , z'_2 z'_3 , \dots , z'_{2k} z'_{2k+1} , \dots$$

engendrent une sous-algèbre extérieure de $H^*(U(V_C)/O(V) ; Z_2)$, contenue dans $\operatorname{Ker} \beta'$, et ayant comme supplémentaire $\operatorname{Im} \beta'$. Or les éléments primitifs de $H^*(U(V_C)/O(V) ; Z_2)$ sont donnés par des formules analogues à (36) ; donc les éléments :

$$p'_1 = z'_1 , \dots , \quad p'_{4k+1} = z'_{4k+1} + z'_1 z'_{4k} + z'_2 z'_{4k-1} + \dots + z'_{2k} z'_{2k+1} , \dots$$

sont primitifs, et puisque l'on a, dans $H^*(BO(V), Z_2)$, et a fortiori dans $H^*(U(V_C)/O(V) ; Z_2)$:

$$p'_{4k+1} = z'_{2k} z'_{2k+1} + \beta'(z'_{4k} + z'_2 z'_{4k-2} + \dots + z'_{2k-2} z'_{2k+2}) \quad ,$$

on voit que les p'_{4k+1} (pour $k \geq 0$) engendrent une sous-algèbre extérieure de $H^*(U(V_C)/O(V) ; Z_2)$, engendrée par des éléments primitifs, contenue dans $\operatorname{Ker} \beta'$, et ayant pour supplémentaire $\operatorname{Im} \beta'$. D'après l'Appendice, la torsion de $H^*(U(V_C)/O(V) ; Z)$ est d'ordre 2, et les éléments de $H^*(U(V_C)/O(V) ; Z)$ dont l'image dans $H^*(U(V_C)/O(V) ; Z_2)$ appartient à A' forment une sous-algèbre de Hopf B', isomorphe à $\overline{H}^*(U(V_C)/O(V) ; Z)$ (quotient de l'algèbre de cohomologie à coefficients entiers par la torsion). L'algèbre B' est une algèbre extérieure engendrée par des éléments primitifs, que nous noterons α'_{4k+1} (ces éléments sont, jusqu'à nouvel ordre, bien déterminés au signe près). L'image de α'_{4k+1} dans $H^*(U(V_C)/O(V) ; Z_2)$ est p'_{4k+1}.

On se propose maintenant de chercher l'image de α'_{4k+1} dans l'application $H^*(U(V_C)/O(V) ; Z) \to H^*(U(V_C) ; Z)$. Pour cela, considérons la suite spectrale de cohomologie, à coefficients Z_2, du fibré :

$$U(V_C) \to U(V_C)/O(V) \to BO(V) \quad .$$

Le terme E_2 de cette suite spectrale est :

$$E_2 = E(a'_1 , \dots , a'_{2k+1} , \dots) \otimes L(z'_1 , \dots , z'_k , \dots) \quad ,$$

Les algèbres extérieure et polynomiale étant prises à coefficients dans Z_2. De plus, d'après (76), le terme E_∞ est :

$$E_\infty = E(z'_1 , \dots , z'_k , \dots) \quad .$$

Il faut donc que, dans le passage de E_2 à E_∞, les carrés $(z'_k)^2$ soient "tués". Un raisonnement facile de suite spectrale montre, par récurrence sur k, que les $a'_{2k-1} \in H^*(U(V_C) ; Z_2)$ sont transgressifs et que la différentielle d_{2k} envoie a'_{2k-1} en $(z'_k)^2$. Or, dans la cohomologie de la base $H^*(BO(V) ; Z_2)$, on a :

$$\beta' p'_{4k+1} = (z'_{2k+1})^2 \qquad \text{pour } k \geq 0 \quad .$$

De là nous allons déduire :

(77) $H^*(U(V_C)/O(V) ; Z) \to H^*(U(V_C) ; Z)$ envoie α'_{4k+1} en $\pm 2a'_{4k+1}$.

DÉMONSTRATION de (77). - On vient de voir que $d_{4k+2}\, a'_{4k+1} = \beta' p'_{4k+1}$. Donc il existe une cochaine u du fibré $U(V_C)/O(V)$ (de base $BO(V)$, de fibre $U(V_C)$)

qui induit sur la fibre la classe de cohomologie a'_{4k+1} , et dont le cobord $\delta u = v$ est un cocycle de la base, dont l'image dans $H^*(BO(V)\,;\underset{\sim}{Z}_2)$ est $\beta'\ p'_{4k+1}$. En ajoutant au besoin à u un cocycle de la base, on peut supposer que (en notant t une cochaîne de la base dont la classe de cohomologie mod 2 soit p'_{4k+1}) :

$$\delta u - \frac{1}{2}\ \delta t = 2w \quad ,$$

w étant un cocycle de la base. Ainsi $\delta(2u - t) = 4w$; donc la classe de cohomologie entière de 4w est nulle, et puisque la torsion de $H^*(BO(X)\,;\underset{\sim}{Z})$ est d'ordre 2 , 2w est un cobord δs (s : cochaîne de la base) ; en retranchant s de u , on se ramène au cas où $s = 0$. Alors $2u - t$ est un $\underset{\sim}{Z}$-cocycle du fibré ; ce cocycle induit sur la fibre la classe de $\underset{\sim}{Z}$-cohomologie de $2a'_{4k+1}$, et sa réduction mod 2 est l'image de t dans $H^*(U(V_C)/O(V);\underset{\sim}{Z}_2)$. En d'autres termes, $2u - t$ a pour classe de cohomologie entière un multiple impair de α'_{4k+1} , et par suite l'application $H^*(U(V_C)/O(V)\,;\underset{\sim}{Z}) \to H^*(U(V_C)\,;\underset{\sim}{Z})$ envoie un multiple impair de α'_{4k+1} en l'élément $2\alpha'_{4k+1}$. Ceci exige que ce multiple impair soit $\pm\ \alpha'_{4k+1}$, et (77) est ainsi démontrée.

On achèvera donc de fixer le choix du signe des α'_{4k+1} en convenant que $H^*(U(\underset{\sim}{V_C})/O(V)\,;\underset{\sim}{Z}) \to H^*(U(\underset{\sim}{V_C})\,;\underset{\sim}{Z})$ <u>envoie</u> α'_{4k+1} <u>en</u> $2a'_{4k+1}$.

Passons maintenant à $SU(V_C)/SO(V)$, revêtement universel de $U(\underset{\sim}{V_C})/O(V)$. Considérons le fibré en espaces de Hopf :

$$SU(\underset{\sim}{V_C})/SO(V) \to U(\underset{\sim}{V_C})/O(V) \to K(\underset{\sim}{Z}\,,\,1) \qquad .$$

En cohomologie à coefficients Z_2 , $H^*(K(\underset{\sim}{Z}\,,\,1)\,;\underset{\sim}{Z}_2)$ est une algèbre extérieure dont le générateur s'envoie sur $z'_1 \in H^*(U(\underset{\sim}{V_C})/O(V)\,;\underset{\sim}{Z}_2)$;

(78) donc $H^*(SU(V_C)/SO(V)\,;\underset{\sim}{Z}_2)$ <u>s'identifie à</u> $E(z'_2\,,\,z'_3\,,\,\ldots\,,\,z'_k\,,\,\ldots)$, <u>quotient de</u> $H^*(U(\underset{\sim}{V_C})/O(V)\,;\underset{\sim}{Z}_2)$ <u>par l'idéal engendré par</u> z'_1 . De plus :

(78') $H^*(SU(\underset{\sim}{V_C})/SO(V)\,;\underset{\sim}{Z})$ <u>s'identifie à la sous-algèbre extérieure</u> $E(\alpha'_5\,,\,\ldots\,,\,\alpha'_{4k+1}\,,\,\ldots)$ <u>de</u> $H^*(SU(V_C)/SO(V)\,;\underset{\sim}{Z})$, en appelant encore α'_{4k+1} (pour $k \geqslant 1$) l'image de $\alpha'_{4k+1} \in H^*(U(\underset{\sim}{V_C})/O(V)\,;\underset{\sim}{Z})$ dans $H^*(SU(\underset{\sim}{V_C})/SO(V)\,;\underset{\sim}{Z})$.

13. <u>Homologie des espaces de lacets des groupes</u> SU(X) , Sp(Y) <u>et</u> Spin(V) .

On ne s'intéresse ici qu'aux <u>algèbres</u> d'homologie (on laisse de côté la détermination de l'application diagonale). On appliquera systématiquement les théorèmes du paragraphe 7 de l'exposé 7 ; les références se rapporteront toujours à ce paragraphe.

On a vu au numéro 1 que $H_*(SU(X)\,;\underset{\sim}{Z}) = E(a_3\,,\,a_5\,,\,\ldots\,,\,a_{2k+1}\,,\,\ldots)$ comme coalgèbre (et on a précisé le choix des générateurs a_{2k+1}). D'après le théorème III (loco citato), on obtient :

(79) $H_*(\Omega(SU(X))\ ;\ \mathbb{Z}) = L(\xi_2\ ,\ \xi_4\ ,\ \dots\ ,\ \xi_{2k}\ ,\ \dots)$ comme algèbre, la suspension envoyant ξ_{2k} en a_{2k+1} (ceci fixe les ξ_{2k} modulo les décomposables).

De même, utilisant (8) et le théorème III, on trouve :

(80) $H_*(\Omega(Sp(Y))\ ;\ \mathbb{Z}) = L(\eta_2\ ,\ \eta_6\ ,\ \dots\ ,\ \eta_{4k+2}\ ,\ \dots)$ comme algèbre, la suspension envoyant η_{4k+2} en b_{4k+3} (ceci fixe les η_{4k+2} modulo les décomposables).

D'après (29), on a $H^*(Spin(V)\ ;\ \mathbb{Q}_2) = E(\bar{e}'_3\ ,\ \dots\ ,\ \bar{e}'_{4k-1}\ ,\ \dots)$ comme algèbre, compte tenu du fait que $Spin(V)$, revêtement universel de $SO(V)$, a même cohomologie à coefficients $\mathbb{Q}_2$. Appliquant alors le théorème III, on trouve :

(81) $H_*(\Omega(Spin(V))\ ;\ \mathbb{Q}_2) = L(\beta_2\ ,\ \beta_6\ ,\ \dots\ ,\ \beta_{4k+2}\ ,\ \dots)$.

De même, d'après (42), $H^*(Spin(V)\ ;\ \mathbb{Z}_2) = L(c'_3\ ,\ \dots\ ,\ c'_{2k-1}\ ,\ \dots)$; en appliquant le théorème V (loco citato), on obtient :

(81') $H_*(\Omega(Spin(V))\ ;\ \mathbb{Z}_2) = E(\gamma_2\ ,\ \gamma_4\ ,\ \dots\ ,\ \gamma_{2k}\ ,\ \dots)$.

Comparons (81) et (81') : le $\mathbb{Q}_2$-rang de $H_*(\Omega(Spin(V))\ ;\ \mathbb{Q}_2)$ et le $\mathbb{Z}_2$-rang de $H_*(\Omega(Spin(V))\ ;\ \mathbb{Z}_2)$ sont égaux dans chaque degré. Donc (exposé 5, Appendice) :

(82) $H_*(\Omega(Spin(V))\ ;\ \mathbb{Z})$ <u>est sans torsion</u> (on verra dans l'exposé suivant que l'<u>algèbre de cohomologie</u> $H^*(\Omega(Spin(V))\ ;\ \mathbb{Z})$ est une algèbre de polynômes dont les générateurs sont de degrés $2\ ,\ 6\ ,\ \dots\ ,\ 4k+2\ ,\ \dots$) .

14. Algèbres d'homologie des espaces de lacets de $SU(Y)/Sp(Y)$, $Sp(X_{\mathbb{H}})/U(X)$, $SO(X)/U(X)$, $SU(V_{\mathbb{C}})/SO(V)$.

D'après (17), $H_*(SU(Y)Sp(Y)\ ;\ \mathbb{Z})$ est, comme coalgèbre, une algèbre extérieure $E(a_5\ ,\ \dots\ ,\ a_{4k+1}\ ,\ \dots)$ engendrée par les éléments primitifs. Appliquant le théorème III (les références se rapportent toujours au paragraphe 7 de l'exposé 7), on obtient :

(83) $H_*(\Omega(SU(Y)/Sp(Y))\ ;\ \mathbb{Z}) = L(\xi_4\ ,\ \dots\ ,\ \xi_{4k}\ ,\ \dots)$ comme algèbre (on note ξ_{4k} les générateurs, car ce sont les images des générateurs de même nom de $H_*(\Omega(SU(Y))\ ;\ \mathbb{Z})$).

Passons à l'homologie de $\Omega(Sp(X_{\mathbb{H}})/U(X))$. Commençons par les coefficients $\mathbb{Q}_2$; pour cela, appliquons le théorème IV, compte tenu du fait que :

$$H^*(Sp(X_{\mathbb{H}})/U(X)\ ;\ \mathbb{Q}_2) = L(x'_2\ ,\ x'_6\ ,\ \dots\ ,\ x'_{4k+2}\ ,\ \dots)$$

(ce qui résulte aussitôt de (23)) ; on obtient :

(84) <u>L'algèbre</u> $H_*(\Omega(Sp(X_{\mathbb{H}})/U(X))\ ;\ \mathbb{Q}_2)$ <u>est une algèbre extérieure</u> $E(\sigma_1\ ,\ \sigma_5\ ,\ \dots\ ,\ \sigma_{4k+1}\ ,\ \dots)$. (Cela résulterait aussi de la considération du fibré

$$\Omega(Sp(X_H)/U(X)) \to U(X) \to Sp(X_H) \quad ,$$

compte tenu de (19)).

Passons aux coefficients Z_2 : d'après (27), l'algèbre $H^*(Sp(X_H)/U(X) ; Z_2)$ est $E(x'_2 , x'_4 , \ldots , x'_{2k} , \ldots)$. Considérons alors le théorème III : comme on l'a déjà vu lors de la démonstration de (67), on pourra l'appliquer aux coefficients Z_2 même si le module A de l'énoncé n'est pas pair, pourvu que l'homologie de la fibre $H_*(\Omega(Sp(X_H)/U(X) ; Z_2)$ ait même rang, en chaque degré, que l'algèbre $L(A) = L(v_1 , v_3 , \ldots , v_{2k+1} , \ldots)$. Montrons qu'il en est bien ainsi : considérons le fibré

$$(*) \qquad \Omega(Sp(X_H)) \to \Omega(Sp(X_H)/U(X)) \to U(X) \quad ;$$

l'application $H_*(\Omega(Sp(X_H)) ; Z_2) \to H_*(\Omega(Sp(X_H)/U(X)) ; Z_2)$ est **injective** (parce que, dans le fibré $\Omega(U(X)) \to \Omega(Sp(X_H)) \to \Omega(Sp(X_H)/U(X))$, l'homologie de la fibre a une image nulle dans l'homologie du fibré ; cf. (19)) ; donc les différentielles de la suite spectrale d'homologie mod 2 de $(*)$ sont nulles, et par suite le rang de $H_*(\Omega(Sp(X_H)/U(X)) ; Z_2)$ est, en chaque degré, celui du produit tensoriel :

$$H_*(\Omega(Sp(X_H)) ; Z_2) \otimes H_*(U(X) ; Z_2) \quad ,$$
$$= L(\eta_2 , \ldots , \eta_{4k+2} , \ldots) \otimes E(a_1 , a_3 , \ldots , a_{2k+1} , \ldots) ;$$

ce rang est bien le même que celui de $L(v_1 , v_3 , \ldots , v_{2k+1} , \ldots)$, comme annoncé.

Ainsi, on peut appliquer le théorème III à l'espace $Sp(X_H)/U(X)$, dont la cohomologie mod 2 est $E(x'_2 , \ldots , x'_{2k} , \ldots)$; d'où :

(84') <u>L'algèbre</u> $H_*(\Omega(Sp(X_H)/U(X)) ; Z_2)$ <u>est une algèbre de polynômes</u> $L(v_1 , v_3 , \ldots , v_{2k+1} , \ldots)$.

Dans le fibré $(*)$, la suite des homologies à coefficients Z_2 s'écrit :

$$L(\eta_2 , \eta_6 , \ldots , \eta_{4k+2} , \ldots) \to L(v_1 , v_3 , \ldots , v_{2k+1} , \ldots) \xrightarrow{f} E(a_1 , a_3 , \ldots , a_{2k+1} , \ldots) \quad .$$

La seconde application f est surjective, donc envoie l'espace des "indécomposables" <u>sur</u> l'espace des "indécomposables" ; comme ils ont même rang en chaque degré, f induit une bijection des espaces d'"indécomposables", et v_{2k+1} va nécessairement en a_{2k+1} (modulo les décomposables). Alors $L(\eta_2 , \ldots , \eta_{4k+2} , \ldots)$ s'identifie au "noyau" de f , au sens des algèbres de Hopf. Il est vrai qu'on ignore encore l'application diagonale de $L(v_1 , v_3 , \ldots , v_{2k+1} , \ldots)$, mais peu importe :

quelle que soit cette application diagonale, si on la compose avec $1 \otimes f$, on obtient une transformation qui envoie α en $\alpha \otimes 1$ chaque fois que α est un <u>carré</u>. Ainsi les carrés des éléments de $L(v_1 , \ldots , v_{2k+1} , \ldots)$ appartiennent au "noyau", et comme celui-ci est isomorphe à $L(\eta_2 , \ldots , \eta_{4k+2} , \ldots)$, le noyau se compose exactement des carrés, pour une raison de rang. Ainsi :

(85) <u>L'image de</u> $H_*(\Omega(Sp(X_H)) ; \underset{\sim}{Z}_2) \to H_*(\Omega(Sp(X_H)/U(X)) ; \underset{\sim}{Z}_2)$ <u>se compose des carrés des éléments de l'algèbre</u> $H_*(\Omega(Sp(X_H)/U(\underset{\sim}{X})) ; \underset{\sim}{Z}_2) = L(v_1 , v_3 , \ldots , v_{2k+1}, \ldots)$.

Passons à l'algèbre d'homologie de $\Omega(SO(X)/U(X))$. On sait, d'après (73), que l'algèbre de cohomologie $H^*(SO(X)/U(X) ; \underset{\sim}{Z})$ est une algèbre de polynômes $L(u'_2 , u'_6 , \ldots , u'_{4k+2} , \ldots)$. Appliquons le théorème IV (loco citato) ; il vient :

(86) $H_*(\Omega(SO(X)/U(X)) ; \underset{\sim}{Z}) = E(\tau_1 , \tau_5 , \ldots , \tau_{4k+1} , \ldots)$ <u>comme algèbre</u>.

Nous allons montrer :

(87) <u>Le fibré</u> $\Omega(SO(X)/U(X)) \to U(X) \to SO(X)$ <u>induit une application</u> $H_*(\Omega(SO(X)/U(X)) ; \underset{\sim}{Z}) \to H_*(U(X) ; \underset{\sim}{Z})$ <u>qui envoie</u> τ_{4k+1} <u>en</u> $\pm 2a_{4k+1}$ <u>modulo les décomposables</u>.

DÉMONSTRATION. - Considérons la suite spectrale de cohomologie, à coefficients $\underset{\sim}{Z}_2$, du fibré :

$$\Omega(SO(X)/U(X)) \to U(X) \to SO(X) \quad .$$

Le terme E_2 de cette suite spectrale est :

$$E_2 = E(\tau'_1 , \tau'_5 , \ldots , \tau'_{4k+1} , \ldots) \otimes L(c'_1 , c'_3 , \ldots , c'_{2k+1} , \ldots) \quad ;$$

en effet, puisque $H_*(\Omega(SO(X)/U(X) ; \underset{\sim}{Z}_2)$ est une algèbre extérieure $E(\tau_1 , \tau_5 , \ldots , \tau_{4k+1} , \ldots)$, le théorème de Samelson-Leray (exposé 2, théorème (5, 1)) affirme que cette algèbre possède un système de générateurs <u>primitifs</u> ; donc l'algèbre de Hopf duale $H^*(\Omega(SO(X)/U(X) ; \underset{\sim}{Z}_2)$ est, comme algèbre, une algèbre extérieure $E(\tau'_1 , \tau'_5 , \ldots , \tau'_{4k+1} , \ldots)$. Revenons alors à notre suite spectrale ; le terme H_∞ est isomorphe à $H^*(U(X) ; Z_2) = E(a'_1 , \ldots , a'_{2k+1} , \ldots)$ et l'application $H^*(SO(X) ; Z_2) \to H^*(U(X) ; Z_2)$ envoie c'_{2k+1} en a'_{2k+1} d'après (44). Il faut donc que, dans le passage de E_2 à E_∞, les carrés $(c'_{2k+1})^2$ soient "tués". Un raisonnement facile de suite spectrale montre alors, par récurrence sur k , que les éléments τ'_{4k+1} sont transgressifs, et que la différentielle d_{4k+2} de la suite spectrale envoie τ'_{4k+1} en $(c'_{2k+1})^2$. Or, dans la cohomologie de la base $H^*(SO(X) ; \underset{\sim}{Z}_2)$, on a, d'après (35),

$$\beta' \; c'_{4k+1} = (c'_{2k+1})^2 \quad .$$

Raisonnant alors exactement comme pour la démonstration de (77), on obtient (87).

Considérons maintenant les deux suspensions $H_*(\Omega(SO/U)\ ;\ \underset{\sim}{Z}) \to H_*(SO/U\ ;\ \underset{\sim}{Z})$ et $H_*(U\ ;\ \underset{\sim}{Z}) \to H_*(BU\ ;\ \underset{\sim}{Z})$; chacune d'elles induit un isomorphisme des "indécomposables" sur les primitifs ; alors (87) implique que l'espace des éléments primitifs de $H_*(SO/U\ ;\ \underset{\sim}{Z})$ est appliqué, par $H_*(SO/U\ ;\ \underset{\sim}{Z}) \to H_*(BU\ ;\ \underset{\sim}{Z})$, sur l'espace des doubles des éléments primitifs de $H_*(BU\ ;\ \underset{\sim}{Z})$. Par dualité : l'application $H^*(BU\ ;\ \underset{\sim}{Z}) \to H^*(SO/U\ ;\ \underset{\sim}{Z})$ envoie le générateur de degré $4k+2$ de l'algèbre de polynômes $H^*(BU\ ;\ \underset{\sim}{Z}) = L(x'_2\ , x'_4\ , \ldots , x'_{2k}\ , \ldots)$ sur ± 2 fois le générateur de degré $4k+2$ de l'algèbre de polynômes $H^*(SO/U\ ;\ Z) = L(u'_2\ , u'_6, \ldots , u'_{4k+2}, \ldots)$ (cf. (73)), ces générateurs n'étant encore définis que modulo les éléments décomposables. Conséquence :

(88) <u>Dans l'algèbre de polynômes</u> $H^*(SO(X)/U(X)\ ;\ \underset{\sim}{Z})$, <u>les images des classes de Chern</u> x'_{4k+2} <u>sont divisibles par</u> 2, <u>et si on note</u> u'_{4k+2} <u>la moitié de la classe de Chern de degré</u> $4k+2$, <u>on a</u> :

$$H^*(SO(X)/U(X)\ ;\ \underset{\sim}{Z}) = L(u'_2\ , u'_6\ , \ldots , u'_{4k+2}\ , \ldots)$$

(les générateurs u'_{4k+2} sont donc maintenant fixés sans ambiguïté).

REMARQUE. - Entre les classes de Chern x'_{2k} du fibré $SO(X)$, de groupe $U(X)$, on a (cf. (69)) les relations :

$$2x'_{4k} + \sum_{0<i<2k} (-1)^i\, x'_{2i}\, x'_{4k-2i} = 0 \qquad ,$$

ce qui entraîne, par récurrence sur k, que les classes x'_{4k} sont aussi divisibles par 2 dans $H^*(SO(X)/U(X)\ ;\ \underset{\sim}{Z})$; leurs moitiés s'expriment par des polynômes à coefficients entiers par rapport aux moitiés u'_{4k+2} des classes de Chern x'_{4k+2}.

Arrivons enfin à l'algèbre d'homologie de $\Omega(SU(V_C)/SO(V))$. Commençons par les coefficients $\underset{\sim}{Q}_2$: appliquons le théorème IV, sachant que :

$$H^*(SU(\underset{\sim}{V_C})/SO(V)\ ;\ \underset{\sim}{Q}_2) = E(a'_5\ , \ldots , a'_{4k+1}\ , \ldots)$$

d'après (74'). On en conclut :

(89) <u>Comme algèbre</u>, $H_*(\Omega(SU(\underset{\sim}{V_C})/SO(V))\ ;\ \underset{\sim}{Q}_2) = L(\varepsilon'_4\ , \ldots\ \varepsilon'_{4k}\ , \ldots)$.

Passons aux coefficients $\underset{\sim}{Z}_2$: d'après (78),

$$H_*(SU(\underset{\sim}{V_C})/SO(V)\ ;\ \underset{\sim}{Z}_2) = E(z'_2\ , \ldots , z'_k\ , \ldots)$$

comme algèbre ; on peut appliquer le théorème III, à condition d'avoir vérifié que l'homologie $H_*(\Omega(SU(V_C)/SO(V))\ ;\ \underset{\sim}{Z}_2)$ a, en chaque degré, même rang que l'algèbre de polynômes $L(\zeta_1\ , \tilde{\zeta}_2\ , \ldots , \zeta_k\ , \ldots)$. Une fois cette vérification faite, on pourra conclure du théorème III que :

(89') <u>Comme algèbre,</u> $H_*(\Omega(SU(V_{\underset{\sim}{C}})/SO(V))\ ;\ \underset{\sim}{Z}_2) = L(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k, \ldots)$.

Vérification des rangs : Considérons le fibré :

$$(**)\qquad \Omega(SU(V_{\underset{\sim}{C}})) \to \Omega(SU(V_{\underset{\sim}{C}})/SO(V)) \to SO(V) \qquad ,$$

et l'homologie à coefficients $\underset{\sim}{Z}_2$; l'application :

$$H_*(\Omega(SU(V_{\underset{\sim}{C}}))\ ;\ \underset{\sim}{Z}_2) \to H_*(\Omega(SU(V_{\underset{\sim}{C}})/SO(V))\ ;\ \underset{\sim}{Z}_2)$$

est injective (parce que dans le fibré $\Omega(SO(V)) \to \Omega(SU(V_C)) \to \Omega(SU(V_C)/SO(V))$, l'homologie de la fibre a une image nulle dans l'homologie du fibré, cf. (55)) ; donc les différentielles de la suite spectrale du fibré (**) sont nulles, et par suite le rang de l'homologie du fibré est, en chaque degré, égal à celui du produit tensoriel des homologies de la fibre et de la base ; d'où le résultat annoncé. Ainsi (89') est démontré.

En raisonnant pour le fibré (**) exactement comme on l'a fait plus haut pour le fibré (*), on démontre :

(90) <u>L'image de</u> $H_*(\Omega(SU(V_C))\ ;\ \underset{\sim}{Z}_2) \to H_*(\Omega(SU(V_C)/SO(V))\ ;\ \underset{\sim}{Z}_2)$ <u>se compose des carrés des éléments de l'algèbre</u> $H_*(\Omega(SU(V_{\underset{\sim}{C}})/SO(V))\ ;\ \underset{\sim}{Z}_2) = L(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k, \ldots)$.

APPENDICE

<u>Espaces dont la torsion est d'ordre deux.</u>

Les espaces considérés ici ont une homologie de type fini en chaque degré. L'homologie $H_*(X\ ;\ \underset{\sim}{Z}_2)$ (resp. la cohomologie $H^*(X\ ;\ \underset{\sim}{Z}_2)$) est munie de l'opérateur de Bockstein β (resp. β') ; on note $H_\beta(X\ ;\ \underset{\sim}{Z}_2)$ la β-homologie de $H_*(X\ ;\ \underset{\sim}{Z}_2)$; de même pour $H^{\beta'}(X\ ;\ \underset{\sim}{Z}_2)$. On note $H_*(X)$ l'homologie à coefficients entiers $H_*(X\ ;\ \underset{\sim}{Z})$ et $\overline{H}_*(X)$ le quotient $H_*(X)/\mathrm{Tors}\, H_*(X)$; c'est un groupe abélien libre, ayant une base finie en chaque degré ; notation analogue : $\overline{H}^*(X)$.

On va raisonner en homologie ; les raisonnements seraient les mêmes en cohomologie.

On sait que si $H_*(X\ ;\ \underset{\sim}{Q}_2) = H_*(X) \otimes \underset{\sim}{Q}_2$ est $\underset{\sim}{Q}_2$-libre en chaque degré, toute la torsion de $H_*(X)$ est 2-primaire ; si de plus (cf. exposé 5, Appendice) le $\underset{\sim}{Z}_2$-rang de $H_\beta(X\ ;\ \underset{\sim}{Z}_2)$ est égal, dans chaque degré, au $\underset{\sim}{Q}_2$-rang de $H_*(X\ ;\ \underset{\sim}{Q}_2)$ (lequel est aussi le $\underset{\sim}{Z}$-rang de $\overline{H}_*(X)$) , alors $\mathrm{Tors}\, H_*(X)$ se compose uniquement d'éléments d'ordre 2 . <u>Nous ferons désormais cette hypothèse.</u>

Dans ces conditions, l'image de l'application naturelle $g : H_*(X) \to H_*(X\ ;\ \underset{\sim}{Z}_2)$ est $\mathrm{Ker}\, \beta$, et l'application $\mathrm{Tors}\, H_*(X) \to H_*(X\ ;\ \underset{\sim}{Z}_2)$ induite par g est une injection dont l'image est $\mathrm{Im}\, \beta$ (on identifiera donc $\mathrm{Tors}\, H_*(X)$ et $\mathrm{Im}\, \beta$). Par passage aux quotients, on obtient un homomorphisme :

$$\overline{H}_*(X) \to H_\beta(X\,;\underset{\sim}{Z}_2)$$

qui induit un isomorphisme $\overline{H}_*(X) \otimes \underset{\sim}{Z}_2 \approx H_\beta(X\,;\underset{\sim}{Z}_2)$.

Soit A un sous-espace vectoriel gradué de $\operatorname{Ker}\beta$; pour que A soit supplémentaire de $\operatorname{Im}\beta$, il faut et il suffit que l'application $A \to H_\beta(X\,;\underset{\sim}{Z}_2)$ induite par la surjection naturelle $\operatorname{Ker}\beta \to H_\beta(X\,;\underset{\sim}{Z}_2)$ soit un <u>isomorphisme</u>. Supposons qu'il en soit ainsi ; alors $H_*(X)$ <u>est somme directe de</u> $g^{-1}(A)$ <u>et de</u> $\operatorname{Tors} H_*(X)$. On a donc un isomorphisme :

$$g^{-1}(A) \approx \overline{H}_*(X) \qquad ,$$

et par suite le choix de A définit une injection :

$$\rho : \overline{H}_*(X) \to H_*(X)$$

qui relève la projection canonique $H_*(X) \to \overline{H}_*(X)$. Si on pose $g \circ \rho = \pi$, l'application $\pi : \overline{H}_*(X) \to H_*(X\,;\underset{\sim}{Z}_2)$ applique $\overline{H}_*(X)$ sur A et induit un isomorphisme $\overline{H}_*(X) \otimes \underset{\sim}{Z}_2 \approx A$; si on le compose avec l'isomorphisme $A \approx H_\beta(X\,;\underset{\sim}{Z}_2)$, on obtient l'isomorphisme canonique $\overline{H}_*(X) \otimes \underset{\sim}{Z}_2 \approx H_\beta(X\,;\underset{\sim}{Z}_2)$ déjà considéré.

<u>Fonctorialité</u>. - Supposons donnée une application continue $X \to X'$; supposons qu'on ait choisi $A \subset H_*(X\,;\underset{\sim}{Z}_2)$ et $A' \subset H_*(X'\,;\underset{\sim}{Z}_2)$ comme il vient d'être dit, et supposons que l'application $H_*(X\,;\underset{\sim}{Z}_2) \to H_*(X'\,;\underset{\sim}{Z}_2)$ induite par f envoie A dans A' . Alors les deux diagrammes suivants sont évidemment commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \overline{H}_*(X) & \longrightarrow & \overline{H}_*(X') \\ \downarrow{\scriptstyle\rho} & & \downarrow{\scriptstyle\rho'} \\ H_*(X) & \longrightarrow & H_*(X') \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \overline{H}_*(X) & \longrightarrow & \overline{H}_*(X') \\ \downarrow{\scriptstyle\pi} & & \downarrow{\scriptstyle\pi'} \\ H_*(X\,;\underset{\sim}{Z}_2) & \longrightarrow & H_*(X'\,;\underset{\sim}{Z}_2) \end{array}$$

où les homomorphismes horizontaux sont induits par f , et les homomorphismes verticaux sont ceux définis par A et A' .

Considérons maintenant deux espaces X , X' et leur produit $X \times X'$. Si $\operatorname{Tors} H_*(X)$ et $\operatorname{Tors} H_*(X')$ ont tous leurs éléments d'ordre 2 , il en est de même de $\operatorname{Tors} H_*(X \times X')$, comme le montre la formule de Künneth. Choisissons $A \subset H_*(X\,;\underset{\sim}{Z}_2)$ et $A' \subset H_*(X'\,;\underset{\sim}{Z}_2)$ comme ci-dessus. Il est clair que $A \otimes A'$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de $H_*(X\,;\underset{\sim}{Z}_2) \otimes H_*(X'\,;\underset{\sim}{Z}_2) = H_*(X \times X'\,;\underset{\sim}{Z}_2)$, et que l'application $A \otimes A' \to H_\beta(X \times X'\,;\underset{\sim}{Z}_2)$ est un isomorphisme (d'après la formule de Künneth donnant la β-homologie d'un produit tensoriel). Donc le sous-espace $A \otimes A'$ de $H_*(X \times X'\,;\underset{\sim}{Z}_2)$ définit un relèvement $\rho'' : \overline{H}_*(X \times X') \to H_*(X \times X')$ et une application $\pi'' : \overline{H}_*(X \times X') \to H_*(X \times X' ; \underset{\sim}{Z}_2)$, qui, en fait, s'explicitent comme suit : ρ'' est l'application composée :

$$\overline{H}_*(X \times X') = \overline{H}_*(X) \otimes \overline{H}_*(X') \xrightarrow{\rho \otimes \rho'} H_*(X) \otimes H_*(X') \to H_*(X \times X') \quad ,$$

et π'' est l'application composée :

$$\overline{H}_*(X \times X') = \overline{H}_*(X) \otimes \overline{H}_*(X') \xrightarrow{\pi \otimes \pi'} H_*(X ; \underset{\sim}{Z}_2) \otimes H_*(X' ; \underset{\sim}{Z}_2) = H_*(X \times X' ; \underset{\sim}{Z}_2)$$

Par abus de langage, on é crira $\rho \otimes \rho'$ au lieu de ρ'' , et $\pi \otimes \pi'$ au lieu de π'' .

Les choses se passent de même en cohomologie.

Combinons maintenant la fonctorialité et les produits ; on obtient les résultats suivants :

(i) Prenons $X' = X \times X$, et soit $X \to X'$ l'application diagonale. Alors, si A est une <u>sous-algèbre</u> de $H_*(X ; \underset{\sim}{Z}_2)$, contenue dans $\operatorname{Ker} \beta$ et admettant $\operatorname{Im} \beta$ comme supplémentaire, les applications ρ et π définies par A sont <u>compatibles avec les applications diagonales</u>, i. e. les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \overline{H}_*(X) & \xrightarrow{\Delta} & \overline{H}_*(X \times X) \\ \downarrow{\rho} & & \downarrow{\rho \otimes \rho} \\ H_*(X) & \xrightarrow{\Delta} & H_*(X \times X) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \overline{H}_*(X) & \xrightarrow{\Delta} & \overline{H}_*(X) \otimes \overline{H}_*(X) \\ \downarrow{\pi} & & \downarrow{\pi \otimes \pi} \\ H_*(X ; \underset{\sim}{Z}_2) & \xrightarrow{\Delta} & H_*(X ; \underset{\sim}{Z}_2) \otimes H_*(X ; \underset{\sim}{Z}_2) \end{array}$$

De même, si A' est une <u>sous-algèbre</u> de $H^*(X ; \underset{\sim}{Z}_2)$, contenue dans $\operatorname{Ker} \beta'$ et admettant pour supplémentaire $\operatorname{Im} \beta'$, les applications $\rho' : \overline{H}^*(X) \to H^*(X)$ et $\pi' : H^*(X) \to H^*(X ; \underset{\sim}{Z}_2)$ définies par A' sont des <u>homomorphismes d'algèbres.</u>

(ii) Prenons $X' = X \times X$, X étant un <u>espace de Hopf</u>, et soit $X' \to X$ l'application définie par la multiplication de X . Alors, si A est une sous-algèbre de l'algèbre d'homologie $H_*(X ; \underset{\sim}{Z}_2)$ (contenue dans $\operatorname{Ker} \beta$ et admettant $\operatorname{Im} \beta$ comme supplémentaire), ρ et π sont des <u>homomorphismes d'algèbres</u>. Si maintenant A' est une <u>sous-coalgèbre</u> de $H^*(X ; \underset{\sim}{Z}_2)$, les applications ρ' et π' définies par A' sont compatibles avec les applications diagonales.

On peut combiner les deux situations précédentes : si X est un espace de Hopf, et si A est une <u>sous-algèbre de Hopf</u> de l'algèbre de Hopf $H_*(X ; \underset{\sim}{Z}_2)$ (A étant contenue dans $\operatorname{Ker} \beta$ et ayant $\operatorname{Im} \beta$ comme supplémentaire), alors ρ identifie $\overline{H}_*(X)$ à une <u>sous-algèbre de Hopf</u> de $H_*(X)$ (et ceci a un sens, bien que $H_*(X)$ ne soit pas à proprement parler une algèbre de Hopf). Une telle situation se présente pour $X = SO(V)$, au numéro 6 du présent exposé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREL (A.) and HIRZEBRUCH (F.). - Characteristic classes and homogeneous spaces, I and II, Amer. J. of Math., t. 80, 1958, p. 458-538 ; et t. 81, 1959, p. 315-382.

[Les conventions de signe faites ici ne concordent pas toujours avec celles de BOREL, notamment pour la comparaison des classes de Chern et des classes de Pontrjagin (cf. (56))].