

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

HENRI CARTAN

Démonstration homologique des théorèmes de périodicité de Bott, I

Séminaire Henri Cartan, tome 12, n° 2 (1959-1960), exp. n° 16, p. 1-16

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1959-1960__12_2_A6_0

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1959-1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

28 mars 1960

DÉMONSTRATION HOMOLOGIQUE DES THÉORÈMES DE PÉRIODICITÉ DE BOTT, I

par Henri CARTAN

Dans cette série de trois exposés, on se propose de donner, d'après J. C. MOORE, une démonstration homologique des théorèmes de Bott, indépendante de la théorie de Morse. On calculera explicitement les algèbres d'homologie et de cohomologie des espaces impliqués dans la question (espaces homogènes, espaces de lacets de groupes ou d'espaces homogènes), et on utilisera une définition explicite, élémentaire, des applications de ces espaces les uns dans les autres.

Dans ce premier exposé, on va préciser les espaces en question et donner la définition explicite des applications. Les calculs d'homologie seront faits dans les deux exposés suivants.

1. Notations.

On considère des espaces vectoriels (à droite) sur l'un des trois corps \mathbb{R} , \mathbb{C} et \mathbb{H} (corps des quaternions) ; on s'intéressera surtout au cas de la dimension infinie, mais les généralités préliminaires seront valables dans tous les cas. Ces espaces seront toujours supposés munis d'un produit scalaire préhilbertien comme il est dit en [4], paragraphe 1. Nous conviendrons que la lettre V désigne toujours un espace vectoriel sur \mathbb{R} , la lettre X un espace vectoriel sur \mathbb{C} , et la lettre Y un espace vectoriel sur \mathbb{H} . Nous renvoyons à [4], pour la définition des groupes $O(V)$, $U(X)$ et $Sp(Y)$ (groupes des automorphismes de type fini, respectant le produit scalaire), ainsi que de leurs sous-groupes $SO(V)$ et $SU(X)$ (automorphismes de déterminant 1). Pour la topologie de ces groupes, cf. [4] (paragraphe 2).

Considérons les inclusions naturelles $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$; l'inclusion $\mathbb{C} \subset \mathbb{H}$ s'obtient en écrivant un quaternion sous la forme $a + bj$, où a et b sont des nombres complexes, la multiplication étant

$$(a + bj)(a' + b'j) = (aa' - bb') + (ab' + ba')j \quad .$$

Alors Y peut être considéré comme espace vectoriel sur \mathbb{C} , par restriction des scalaires, et aussi comme espace vectoriel sur \mathbb{R} ; X peut être considéré comme espace vectoriel sur \mathbb{R} . On a les inclusions naturelles

$$(1) \quad \text{Sp}(Y) \subset \text{SU}(Y) \subset \text{U}(Y) , \quad \text{U}(X) \subset \text{SO}(X) \subset \text{O}(X) .$$

On peut aussi considérer les espaces suivants, obtenus par extension des scalaires :

$$\underline{V}_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \underline{\mathbb{C}}, \quad \underline{V}_{\mathbb{H}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \underline{\mathbb{H}}, \quad \underline{X}_{\mathbb{H}} = X \otimes_{\mathbb{C}} \underline{\mathbb{H}},$$

le produit scalaire se prolongeant de manière évidente. Tout automorphisme de type fini $f : V \rightarrow V$, qui respecte le produit scalaire, se prolonge en un automorphisme de type fini $f \otimes 1 : V \otimes_{\mathbb{R}} \underline{\mathbb{C}} \rightarrow V \otimes_{\mathbb{R}} \underline{\mathbb{C}}$, qui respecte le produit scalaire ; d'où une inclusion naturelle de groupes $\text{O}(V) \subset \text{U}(V_{\mathbb{C}})$. On a une autre inclusion analogue. Ainsi :

$$(2) \quad \text{SO}(V) \subset \text{O}(V) \subset \text{U}(V_{\mathbb{C}}) , \quad \text{U}(X) \subset \text{Sp}(X_{\mathbb{H}}) .$$

Aux inclusions (1) et (2) correspondent des espaces homogènes, notamment les suivants (pour n'écrire que des espaces connexes) :

$$(3) \quad \text{SO}(X)/\text{U}(X) , \quad \text{U}(Y)/\text{Sp}(Y) , \quad \text{U}(V_{\mathbb{C}})/\text{O}(V) , \quad \text{Sp}(X_{\mathbb{H}})/\text{U}(X) .$$

Nous convenons qu'il s'agit toujours des espaces de classes à gauche ; par exemple, pour $\text{SO}(X)/\text{U}(X)$, il s'agit des classes $a.U(X)$, où $a \in \text{SO}(X)$; autrement dit, $\text{SO}(X)$ opère à gauche dans $\text{SO}(X)/\text{U}(X)$, et $\text{SO}(X)/\text{U}(X)$ est la base d'un fibré principal dans lequel le groupe $\text{U}(X)$ opère à droite.

Tous les groupes considérés sont connexes, à l'exception de $\text{O}(X)$ qui a deux composantes connexes. Quant aux groupes fondamentaux, nous rappellerons seulement ceci :

PROPOSITION 1. - $\text{Sp}(Y)$, $\text{SO}(X)/\text{U}(X)$ et $\text{Sp}(X_{\mathbb{H}})/\text{U}(X)$ sont simplement connexes. On a $\pi_1(\text{U}(Y)) = \mathbb{Z}$, et l'inclusion $\text{SU}(Y) \rightarrow \text{U}(Y)$ permet de considérer $\text{SU}(Y)$ comme revêtement universel de $\text{U}(Y)$ (autrement dit, $\text{SU}(Y)$ est simplement connexe, et $\pi_i(\text{SU}(Y)) \rightarrow \pi_i(\text{U}(Y))$ est un isomorphisme si $i \geq 2$). On a $\pi_1(\text{SO}(V)) = \underline{\mathbb{Z}}_2$ (du moins si $\dim V \geq 3$), le revêtement universel (à deux feuillets) de $\text{SO}(V)$ étant noté $\text{Spin}(V)$. On a $\pi_1(\text{U}(Y)/\text{Sp}(Y)) = \underline{\mathbb{Z}}$, l'inclusion $\text{SU}(Y)/\text{Sp}(Y) \rightarrow \text{U}(Y)/\text{Sp}(Y)$ permettant de considérer le premier espace comme revêtement universel du second. Enfin, on a $\pi_1(\text{U}(V_{\mathbb{C}})/\text{O}(V)) = \underline{\mathbb{Z}}$, l'application $\text{SU}(V_{\mathbb{C}})/\text{SO}(V) \rightarrow \text{U}(V_{\mathbb{C}})/\text{O}(V)$ permettant de considérer le premier espace comme revêtement universel du second.

La démonstration est immédiate et laissée au lecteur ; elle utilise la suite exacte d'homotopie et les fibrations sur des sphères.

Rappelons d'autre part ([4], paragraphe 4), qu'on a les espaces classifiants :

$$\left\{ \begin{array}{l} BU(X) = U(X \oplus X')/U(X) \times U(X'), \quad \dim X' \text{ infinie,} \\ B(Sp(Y)) = Sp(Y \oplus Y')/Sp(Y) \times Sp(Y'), \quad \dim Y' \text{ infinie,} \\ BO(V) = O(V \oplus V')/O(V) \times O(V'), \quad \dim V' \text{ infinie,} \end{array} \right.$$

et l'on peut aussi considérer $B(SO(V))$, défini de manière analogue. Il est clair que l'application naturelle

$$B(SO(V)) \rightarrow BO(V)$$

identifie le premier espace à un revêtement à deux feuilletés du second.

Indépendamment des groupes envisagés plus haut, qui portent une structure de H-espace, chacun des espaces homogènes précédents et des espaces classifiants (qui sont d'ailleurs aussi des espaces homogènes) possède une loi de composition qui en fait un H-espace, lorsque la dimension de l'espace V (resp. X , resp. Y) est infinie. Il s'agit de structure de H-espace au sens faible, c'est-à-dire définie par une H-loi faible, au sens de [3] I. B. Ces lois ont été définies dans [3] (I. B, Scholie).

2. Les applications de Bott.

On va définir sept applications (dont la première Φ_0 a déjà été définie dans l'exposé 11 (II A) (où elle était notée h) :

$$\begin{array}{l} \Phi_0 : U(X \oplus X')/U(X) \times U(X') \longrightarrow \Omega(SU(X \oplus X')) \\ \Phi_1 : Sp(Y \oplus Y')/Sp(Y) \times Sp(Y') \longrightarrow \Omega(SU(Y \oplus Y')/Sp(Y \oplus Y')) \\ \Phi_2 : O(V \oplus V')/O(V) \times O(V') \longrightarrow \Omega(SU(\underbrace{V \oplus V'}_C)/SO(V \oplus V')) \\ \Phi_3 : U(Y)/Sp(Y) \longrightarrow \Omega(SO(\underbrace{Y}_C)/U(\underbrace{Y}_C)) \\ \Phi_4 : U(\underbrace{V}_C)/O(V) \longrightarrow \Omega(Sp(\underbrace{V}_H)/U(\underbrace{V}_C)) \\ \Phi_5 : SO(\underbrace{X}_H)/U(X) \longrightarrow \Omega(Spin X) \\ \Phi_6 : Sp(\underbrace{X}_H)/U(X) \longrightarrow \Omega(Sp \underbrace{X}_H) \end{array}$$

Ces applications seront toutes compatibles avec les structures de H-espaces, lorsque les espaces V , X et Y sont de dimension infinie. Le théorème de Bott affirme alors que, lorsque les espaces sont de dimension infinie, ces sept applications sont des équivalences d'homotopie faible : chacune d'elles définit un isomorphisme des groupes d'homotopie.

De là résultera aussitôt la périodicité des groupes d'homotopie stables des groupes classiques. En effet :

$$\pi_i(U(X)) \approx \pi_{i+1}(BU(X)) \quad ,$$

qui par Φ_0 est $\approx \pi_{i+1}(\Omega(SU(X))) \approx \pi_{i+2}(SU(X)) \approx \pi_{i+2}(U(X))$, si $\dim X$ est infinie. (Ceci a déjà été dit dans [3]. De même, lorsque les dimensions des espaces considérés sont infinies :

$$(4) \quad \pi_i(\text{Sp}(Y)) \approx \pi_{i+2}(U(Y)/\text{Sp}(Y)) \quad \text{grâce à } \Phi_1 \quad ,$$

$$(5) \quad \pi_i(U(Y)/\text{Sp}(Y)) \approx \pi_{i+1}(SO(Y)/U(Y)) \approx \pi_{i+1}(O(Y)/U(Y)) \quad \text{grâce à } \Phi_3 \quad ,$$

(6) $\pi_i(SO(X)/U(X)) \approx \pi_{i+1}(\text{Spin } X)$, qui est $\pi_{i+1}(SO(X)) \approx \pi_{i+1}(O(X))$ si $i \geq 1$; ceci grâce à Φ_5 ; pour $i \geq 0$, on a donc

$$\pi_i(O(X)/U(X)) \approx \pi_{i+1}(O(X)) \quad ;$$

$$(7) \quad \pi_i(O(V)) \approx \pi_{i+2}(U(\underbrace{V}_{\mathbb{C}})/O(V)) \quad \text{grâce à } \Phi_2 \quad ;$$

$$(8) \quad \pi_i(U(\underbrace{V}_{\mathbb{C}})/O(V)) \approx \pi_{i+1}(\text{Sp}(\underbrace{X}_{\mathbb{H}})/U(X)) \quad \text{grâce à } \Phi_4 \quad ;$$

$$(9) \quad \pi_i(\text{Sp}(\underbrace{X}_{\mathbb{H}})/U(X)) \approx \pi_{i+1}(\text{Sp}(\underbrace{X}_{\mathbb{H}})) \quad \text{grâce à } \Phi_6 \quad .$$

Les relations (4), (5), (6) donnent :

$$\pi_i(\text{Sp}(Y)) \approx \pi_{i+4}(O(V)) \quad ,$$

et les relations (7), (8), (9) donnent :

$$\pi_i(O(V)) \approx \pi_{i+4}(\text{Sp}(Y)) \quad .$$

Ainsi chacun des six espaces $\text{Sp}(Y)$, $U(Y)/\text{Sp}(Y)$, $O(X)/U(X)$, $O(X)$, $U(\underbrace{V}_{\mathbb{C}})/O(V)$, $\text{Sp}(\underbrace{X}_{\mathbb{H}})/U(X)$ admet une périodicité de 8 pour ses groupes d'homotopie :

$\pi_i \approx \pi_{i+8}$; les groupes d'homotopie de ces espaces se déduisent de ceux du premier $\text{Sp}(Y)$ par décalages successifs de 2, 1, 1, 2, 1 unités. La période se détermine facilement : les groupes π_0 à π_7 de $\text{Sp}(Y)$ sont évidemment :

$$0 = \pi_0(\text{Sp}), \quad 0 = \pi_1(\text{Sp}), \quad 0 = \pi_1(\text{Sp}/U), \quad \underbrace{Z}_1 = \pi_1(U/O) \quad ,$$

$$\underbrace{Z}_2 = \pi_0(O), \quad \underbrace{Z}_2 = \pi_1(O), \quad 0 = \pi_1(SO/U), \quad \underbrace{Z}_1 = \pi_1(U/\text{Sp}) \quad .$$

Il nous reste, dans cet exposé, à définir explicitement les applications Φ_i annoncées. Pour mémoire, nous rappellerons la définition de Φ_0 (qui s'appelait h dans [3]).

DÉFINITION de Φ_0 . - Pour θ tel que $0 \leq \theta \leq 2\pi$, soit $\alpha(\theta)$ la transformation de $X \oplus X'$ en lui-même qui transforme (x, x') en $(xe^{-i\theta}, x')$. Si $T \in U(X \oplus X')$, le commutateur

$$[\alpha(\theta), T] = \alpha(\theta).T.\alpha(-\theta).T^{-1}$$

appartient à $U(X \oplus X')$, et même à $SU(X \oplus X')$ car son déterminant est évidemment égal à 1. Si $\theta = 0$ ou 2π , ou si $T \in U(X) \times U(X')$, ce commutateur est égal à 1 (élément neutre du groupe $SU(X \oplus X')$). L'application $(\theta, T) \rightarrow [\alpha(\theta), T]$ définit donc une application continue

$$S^1 \times (U(X \oplus X')/U(X) \times U(X')) \rightarrow SU(X \oplus X')$$

qui envoie le point-base au point-base (élément neutre), donc induit une application

$$U(X \oplus X')/U(X) \times U(X') \rightarrow \Omega(SU(X \oplus X')) \quad ;$$

cette application est par définition Φ_0 .

DÉFINITION de Φ_1 . - Pour $0 \leq \theta \leq 2\pi$, soit $\alpha(\theta)$ la transformation de $Y \oplus Y'$ en lui-même qui envoie (y, y') en $(ye^{i\theta/2}, y')$. Si $T \in Sp(Y \oplus Y')$, le commutateur $[\alpha(\theta), T]$ appartient à $U(Y \oplus Y')$, donc à $SU(Y \oplus Y')$. Il est égal à 1 si $\theta = 0$, et il appartient à $Sp(Y \oplus Y')$ si $\theta = 2\pi$; lorsque θ varie de 0 à 2π , l'image, dans $SU(Y \oplus Y')/Sp(Y \oplus Y')$, du chemin décrit par $[\alpha(\theta), T]$ est donc un lacet ayant pour origine l'élément 1 (image de l'élément neutre de $SU(Y \oplus Y')$). D'autre part, si $T' \in Sp(Y) \times Sp(Y')$, on a $[\alpha(\theta), T] = [\alpha(\theta), TT']$ parce que T' commute avec $\alpha(\theta)$. Par définition, Φ_1 est induite par l'application $(\theta, T) \rightarrow [\alpha(\theta), T]$.

DÉFINITION de Φ_2 . - On prend cette fois pour $\alpha(\theta)$ la transformation $(x, x') \rightarrow (xe^{i\theta/2}, x')$ de $V_{\mathbb{C}} \oplus V'_{\mathbb{C}}$ dans lui-même. Si $T \in O(V \oplus V')$, le commutateur $[\alpha(\theta), T]$ appartient à $SU(V_{\mathbb{C}} \oplus V'_{\mathbb{C}})$; il est égal à 1 pour $\theta = 0$, et appartient à $SO(V \oplus V')$ pour $\theta = 2\pi$. Si $T' \in O(V) \times O(V')$, T' commute avec $\alpha(\theta)$, d'où $[\alpha(\theta), T] = [\alpha(\theta), TT']$. L'application Φ_2 est induite par l'application $(\theta, T) \rightarrow [\alpha(\theta), T]$.

DÉFINITION de Φ_3 . - Pour $0 \leq \theta \leq 2\pi$, soit $\alpha(\theta)$ la multiplication à droite par $\cos \frac{\theta}{4} + j \sin \frac{\theta}{4}$ dans l'espace quaternionien V . Si $T \in U(V)$, le commutateur $[\alpha(\theta), T] \in SO(V)$; il est égal à 1 pour $\theta = 0$. Pour $\theta = 2\pi$, $[\alpha(\theta), T] \in U(V)$: en effet $\alpha(2\pi).T.\alpha(-2\pi)$ est la transformation $y \rightarrow -T(yj)j$, et cette transformation est \mathbb{C} -linéaire (à droite), car

$$T(y_{ij}) j = - T(y_{ji}) j = - T(y_j) ij = T(y_j) ji \quad .$$

Enfin, si $T' \in \text{Sp}(V)$, T' commute avec $\alpha(\theta)$, donc $[\alpha(\theta), TT'] = [\alpha(\theta), T]$. L'application Φ_3 est induite par $(\alpha, T) \rightarrow [\alpha(\theta), T]$.

DÉFINITION de Φ_4 . - Observons que l'espace \underline{V}_H possède non seulement une structure d'espace vectoriel à droite sur \underline{H} , mais aussi une structure d'espace à gauche sur \underline{H} , du fait que $\underline{V}_H = V \otimes_{\underline{R}} \underline{H}$ et que \underline{R} est dans le centre de \underline{H} . Prenons pour $\alpha(\theta)$ la multiplication à gauche par $\cos \frac{\theta}{4} + j \sin \frac{\theta}{4}$ dans l'espace \underline{V}_H . Si $T \in U(\underline{V}_C)$, on a $[\alpha(\theta), T] \in \text{Sp}(\underline{V}_H)$; ce commutateur est égal à 1 si $\theta = 0$. Pour $\theta = 2\pi$, on va montrer que le commutateur est dans $U(\underline{V}_C)$: en effet, on va interpréter $\alpha(2\pi).T.\alpha(-2\pi)$ comme suit. L'isomorphisme $\underline{V}_C \otimes \underline{V}_C \approx \underline{V}_H$ associe au couple (x, y) le vecteur $x + yj$, et si $T \in U(\underline{V}_C)$, la transformation correspondante de $\underline{V}_H = \underline{V}_C \otimes \underline{V}_C$ est $(x, y) \rightarrow (T(x), T(y))$; la multiplication à gauche par j transforme (x, y) en $(-\bar{y}, \bar{x})$, où \bar{x} et \bar{y} dénotent les vecteurs imaginaires conjugués de x et y , ce qui a un sens puisque \underline{V}_C est le complexifié de l'espace réel V ; on voit alors que $\alpha(2\pi).T.\alpha(-2\pi)$, lorsque $T \in U(\underline{V}_C)$, transforme (x, y) dans $(\overline{T(\bar{x})}, \overline{T(\bar{y})})$; autrement dit, c'est la transformation associée à l'élément de $U(\underline{V}_C)$ qui transforme x en $\overline{T(\bar{x})}$, c'est-à-dire à la transformation \bar{T} , conjuguée de T . Ainsi, on a :

$$(1) \quad \alpha(2\pi).T.\alpha(-2\pi) = \bar{T}$$

qui appartient à $U(\underline{V}_C)$ comme annoncé. Enfin, si $T' \in O(V)$, T' commute avec $\alpha(\theta)$ pour tout θ , donc $[\alpha(\theta), TT'] = [\alpha(\theta), T]$. L'application $(\theta, T) \rightarrow [\alpha(\theta), T]$ définit Φ_4 .

DÉFINITION de Φ_5 . - Soit $\alpha(\theta)$ la multiplication par $e^{-i\theta/2}$ dans l'espace complexe X . Si $T \in \text{SO}(X)$, $[\alpha(\theta), T] \in \text{SO}(X)$; ce commutateur est égal à 1 si $\theta = 0$ ou $\theta = 2\pi$. Si $T' \in U(X)$, T' commute avec $\alpha(\theta)$, d'où $[\alpha(\theta), TT'] = [\alpha(\theta), T]$. L'application Φ_5 est induite par $(\theta, T) \rightarrow [\alpha(\theta), T]$; d'une façon précise, Φ_5 applique $\text{SO}(X)/U(X)$, qui est connexe, dans le composante connexe de l'élément neutre de $\Omega(\text{SO}(X))$, c'est-à-dire dans $\Omega(\text{Spin}(X))$.

DÉFINITION de Φ_6 . - L'espace $\underline{X}_H = X \otimes_{\underline{C}} \underline{H}$ a deux structures d'espace vectoriel sur \underline{C} , l'une à droite (à cause de sa structure d'espace vectoriel à droite sur \underline{H}), l'autre à gauche. Soit $\alpha(\theta)$ la multiplication à gauche par $e^{-i\theta/2}$ dans

l'espace $X_{\underline{H}}$. Si $T \in Sp(X_{\underline{H}})$, le commutateur $[\alpha(\theta), T]$ est dans $Sp(X_{\underline{H}})$. Il est égal à 1 pour $\theta = 0$ ou $\theta = 2\pi$. Enfin, si $T' \in U(X)$, T' commute avec $\alpha(\theta)$, donc $[\alpha(\theta), TT'] = [\alpha(\theta), T]$. L'application Φ_6 est induite par l'application $(\theta, T) \rightarrow [\alpha(\theta), T]$.

PROPOSITION 2. - Les applications Φ_i ($0 \leq i \leq 6$) sont compatibles avec les lois de composition des H-espaces faibles.

DÉMONSTRATION. - Précisons qu'il s'agit des lois de composition qui ont été définies dans [3], I, B ; et que sur l'espace des lacets d'un H-espace A , on considère la loi de composition qui, à deux lacets $t \rightarrow a(t)$ et $t \rightarrow b(t)$, associe le lacet $t \rightarrow a(t).b(t)$, le point indiquant la loi de composition de l'espace A . La loi ainsi définie sur l'espace des lacets de A est, comme on sait, faiblement homotope à la loi habituelle de composition des lacets (qui consiste à les mettre bout à bout). Précisons encore que, même sur les groupes $SU(X \oplus X')$, $Spin X$, etc. on considère, non pas la loi de composition naturelle du groupe, mais la loi de composition définie dans [3] ; elle lui est faiblement homotope.

Ceci étant bien précisé, la démonstration de la proposition 2 consiste essentiellement à recopier celle donnée dans [3] (II, théorème 2). L'espace X (resp. X' , resp. Y , etc.) étant décomposé en somme directe de deux sous-espaces orthogonaux X_1 et X_2 ayant chacun une base orthonormale de même cardinal (infini), on a une bijection de la base de X sur chacune des bases de X_1 et X_2 , ce qui définit des isomorphismes ρ_i ($i = 1, 2$) de $U(X)$ sur $U(X_i)$; on obtient de même des isomorphismes, encore notés ρ_i , de $U(X \oplus X')$ sur $U(X_i \oplus X'_i)$, de $Sp(Y)$ sur $Sp(Y_i)$, etc. Le point essentiel consiste alors en ceci : pour chacune des applications $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_6$, on a l'identité

$$[\alpha(\theta), (\rho_1 T_1)(\rho_2 T_2)] = \rho_1([\alpha(\theta), T_1]) \cdot \rho_2([\alpha(\theta), T_2])$$

La compatibilité des applications Φ_i avec les lois de composition s'ensuit aussitôt.

La proposition 2 a pour conséquence que si l'on considère les applications $(\Phi_i)_*$ induites dans l'homologie (resp. les applications $(\Phi_i)^*$ induites dans la cohomologie), ce sont des homomorphismes d'algèbres de Hopf. Précisons : lorsque les espaces sont sans torsion, leur homologie (resp. cohomologie) à coefficients dans $\underline{\mathbb{Z}}$ est de type fini en tout degré, et l'algèbre d'homologie à coefficients dans $\underline{\mathbb{Z}}$ est une algèbre de Hopf, ainsi que l'algèbre de cohomologie à

coefficients dans \underline{Z} . Plus généralement, si les espaces considérés ont de la torsion, \overline{H}_* (quotient de l'homologie à coefficients dans \underline{Z} par la torsion) est une algèbre de Hopf, ainsi que \overline{H}^* (quotient de la cohomologie à coefficients dans \underline{Z} par la torsion). Enfin l'homologie et la cohomologie à coefficients dans \underline{Z}_2 sont toujours des algèbres de Hopf, ainsi que l'homologie et la cohomologie à coefficients dans \underline{Q}_2 (groupe additif des fractions dont le dénominateur est une puissance de 2).

3. Principe de la démonstration homologique du théorème de Bott.

Pour prouver que les applications Φ_i ($0 \leq i \leq 6$) induisent des isomorphismes des groupes d'homotopie, on montrera (exposé 18) qu'elles induisent des isomorphismes des groupes d'homologie à coefficients entiers. Cela suffira, en vertu du théorème de Whitehead (voir par exemple [1], théorème 4), qui est applicable ici même lorsque les espaces envisagés ne sont pas simplement connexes. En effet :

THÉORÈME. - Etant donnés deux H-espaces connexes A et B (avec élément neutre) et une application continue $f : A \rightarrow B$ compatible avec les lois de composition (et transformant l'élément neutre dans l'élément neutre), si $f_* : H_*(A ; \underline{Z}) \rightarrow H_*(B ; \underline{Z})$ est un isomorphisme, alors f induit des isomorphismes $\pi_q(A) \cong \pi_q(B)$ pour tout entier $q \geq 0$.

DÉMONSTRATION. - On peut supposer que f est une application fibrée au sens de SERRE ; d'une façon précise, soit A' l'espace des couples (h, a) , où $a \in A$ et où h est un chemin de B d'extrémité $f(a)$; il est évident que A' s'identifie à un rétracte par déformation de A' , et que l'application $f' : A' \rightarrow B$, qui à chaque (h, a) associe $f(a)$, prolonge f . L'espace A' est muni d'une manière évidente d'une structure de H-espace ayant pour élément neutre a'_0 le couple (h_0, a_0) , formé du chemin ponctuel en b_0 , (élément neutre de B) et de l'élément neutre a_0 de A ; cette structure de H-espace prolonge celle de A , et l'application f' respecte les lois de composition et transforme l'élément neutre a'_0 en b_0 .

Supposons donc désormais que l'application f de l'énoncé soit fibrée. Puisque $\pi_1(A) = H_1(A)$ et que $\pi_1(B) = H_1(B)$ d'après le théorème de Hurewicz (et compte tenu du fait que $\pi_1(A)$ et $\pi_1(B)$ sont abéliens puisque A et B sont des H-espaces), l'hypothèse de l'énoncé implique que $\pi_1(A) \rightarrow \pi_1(B)$ est un isomorphisme. Il s'ensuit (cf. lemme ci-dessous) que $\pi_1(B)$ opère trivialement dans l'homologie $H_*^*(F)$ de la fibre F située au-dessus de l'élément neutre b_0 .

Considérons la suite spectrale d'homologie (à coefficients dans \mathbb{Z}) du fibré, dont le terme E^2 est

$$E_{p,q}^2 = H_p(B ; H_q(F)) \quad ;$$

la fibre F est connexe (regarder la suite exacte d'homotopie du fibré, et utiliser le fait que $\pi_1(A) \rightarrow \pi_1(B)$ est surjectif). Ainsi $E_{p,q}^2 = H_p(B ; \mathbb{Z})$. Puisque, par hypothèse, $H_p(A) \rightarrow H_p(B)$ est un isomorphisme pour tout p , on doit avoir $E_{p,q}^2 = 0$ pour $q \neq 0$; ceci exige $H_q(F) = 0$ pour $q \neq 0$, parce que $\pi_1(B)$ opère trivialement dans $H_q(F)$. En particulier, $H_1(F) = 0$, et puisque F est un espace de Hopf, on en conclut que $\pi_1(F) = 0$. Le théorème de Hurewicz est donc applicable, et puisque $H_q(F) = 0$ pour tout $q \geq 1$, on conclut que $\pi_q(F) = 0$ pour tout $q \geq 0$. La suite exacte d'homotopie du fibré donne alors $\pi_q(A) \simeq \pi_q(B)$,

C. Q. F. D.

Au cours de cette démonstration, on a admis le lemme suivant :

LEMME. - Soit $f : A \rightarrow B$ une application fibrée de H -espaces connexes, respectant la loi de composition et envoyant l'élément neutre a_0 dans l'élément neutre b_0 . Alors tout élément de $\pi_1(B)$ situé dans l'image de $\pi_1(A) \rightarrow \pi_1(B)$ opère trivialement dans l'homologie (et dans l'homotopie) de la fibre F .

DÉMONSTRATION. - Prenons pour F la fibre située au-dessus de l'élément neutre b_0 . Considérons un lacet de B , d'origine b_0 , et qui soit l'image par f d'un lacet k de A , d'origine a_0 . A chaque simplexe singulier $s : \Delta_n \rightarrow F$ de la fibre, associons l'application continue $h(s) : I \times \Delta_n \rightarrow A$ définie par

$$(t, u) \rightarrow s(u).k(t) \quad (\text{produit dans le } H\text{-espace } A) \quad .$$

Cette application h satisfait bien aux conditions classiquement exigées (cf. par exemple [2], conditions 1°, 2°, 3° du haut de la page 2) pour obtenir la façon dont le lacet $f \circ k$ opère dans $H_*(F)$; la vérification fait notamment intervenir le fait que, pour chaque $t \in I$, l'application $u \rightarrow s(u).k(t)$ est un simplexe singulier de la fibre située au-dessus du point $f(k(t))$ du lacet de la base; et il en est bien ainsi parce que

$$f(s(u).k(t)) = f(s(u)).f(k(t)) = b_0.f(k(t)) = f(k(t)) \quad .$$

Pour $t = 1$, l'application $h(s)$ induit $u \rightarrow s(u).a_0 = s(u)$; autrement dit, pour $t = 1$ on obtient le même simplexe singulier de F que pour $t = 0$. Donc le lacet $f \circ k$ opère trivialement dans l'homologie et dans l'homotopie

de la fibre F .

REMARQUE. -- Pour que la conclusion du lemme soit valable, il n'est pas nécessaire de supposer que l'application fibrée f respecte les lois de composition et envoie a_0 en b_0 . Il suffit que la relation $f(a) = b_0$ entraîne $f(a.a') = f(a')$ pour tout $a' \in A$.

Il reste à préciser un point d'ordre technique : les espaces qui interviennent dans la démonstration du théorème de Bott ont une homologie sans torsion ou dont la torsion est 2-primaire (en fait, tous les éléments de torsion sont d'ordre 2). Etant donnés deux espaces A et B tels que $H_*(A; \mathbb{Z})$ et $H_*(B; \mathbb{Z})$ soient de type fini en chaque degré, et tels que la torsion de $H_*(A; \mathbb{Z})$ et de $H_*(B; \mathbb{Z})$ soit 2-primaire, si l'on veut montrer qu'une application $f : A \rightarrow B$ définit un isomorphisme $H_*(A; \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(B; \mathbb{Z})$, il suffit de prouver :

$$(a) \quad H_*(A; \mathbb{Q}_2) \rightarrow H_*(B; \mathbb{Q}_2) \quad \text{est un isomorphisme ;}$$

$$(b) \quad H_*(A; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_*(B; \mathbb{Z}_2) \quad \text{est un isomorphisme.}$$

En effet, le mapping-cylinder de l'application f permet de se ramener au cas où f est une inclusion ; les conditions (a) et (b) impliquent alors que $H_*(B \bmod A; \mathbb{Q}_2) = 0$ et $H_*(B \bmod A; \mathbb{Z}_2) = 0$, ce qui entraîne (cf. [4], appendice) que $H_*(B \bmod A; \mathbb{Z}) = 0$. La suite exacte d'homologie relative montre alors que $H_*(A; \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(B; \mathbb{Z})$ est un isomorphisme.

4. Quelques diagrammes de compatibilité.

Pour prouver que les applications $(\Phi_i)_*$ sont des isomorphismes, nous aurons besoin (dans l'exposé 18) de la commutativité (ou de la commutativité à une homotopie faible près) de quelques diagrammes reliant entre elles les diverses applications Φ_i . Voici ces diagrammes :

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{\Phi_6} & \\
 \text{Sp}(X_H)/U(X) & & \Omega(\text{Sp } X_H) \\
 \downarrow f_1 & & \downarrow g_1 \\
 (\Delta_1) \quad U(X \oplus X')/U(X) \times U(X') & \xrightarrow{\Phi_0} & \Omega(\text{SU}(X \oplus X')) \\
 & & \\
 & \xrightarrow{\Phi_1} & \\
 B(\text{Sp}(Y)) & & \Omega(\text{SU}(Y \oplus Y)/\text{Sp}(Y \oplus Y)) \\
 \downarrow f_2 & & \downarrow g_2 \\
 (\Delta_2) \quad B(U(Y)) & \xrightarrow{\Phi_0} & \Omega(\text{SU}(Y \oplus Y))
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \text{BO}(V) & \xrightarrow{\Phi_2} & \Omega(\text{SU}(\underbrace{V}_{\mathbb{C}} \oplus \underbrace{V}_{\mathbb{C}})/\text{SO}(V \oplus V)) \\
 \downarrow f_3 & & \downarrow g_3 \\
 \text{BU}(\underbrace{V}_{\mathbb{C}}) & \xrightarrow{\Phi_0} & \Omega(\text{SU}(\underbrace{V}_{\mathbb{C}} \oplus \underbrace{V}_{\mathbb{C}})) \\
 \\
 \text{U}(\underbrace{V}_{\mathbb{C}})/\text{O}(V) & \xrightarrow{\Phi_4} & \Omega(\text{Sp}(\underbrace{V}_{\mathbb{H}})/\text{U}(\underbrace{V}_{\mathbb{C}})) \\
 \downarrow f_4 & & \downarrow g_4 \\
 \text{BO}(V) & \xrightarrow{\Phi_2} & \Omega(\text{SU}(\underbrace{V}_{\mathbb{C}} \oplus \underbrace{V'}_{\mathbb{C}})/\text{SO}(V \oplus V)) \\
 \\
 \text{SO}(X)/\text{U}(X) & \xrightarrow{\Phi_5} & \Omega(\text{Spin}(X)) \\
 \downarrow f_5 & & \downarrow g_5 \\
 \text{U}(X \oplus X')/\text{U}(X) \times \text{U}(X') & \xrightarrow{\Phi_0} & \Omega(\text{SU}(X \oplus X'))
 \end{array}$$

Nous préciserons pour chacun des diagrammes (Δ_i) , les applications f_i et g_i .

Diagramme (Δ_1) . - On note X' un second exemplaire de X , mais muni d'une autre structure d'espace vectoriel sur \mathbb{C} : dans X' , le produit de $x \in X$ par $c \in \mathbb{C}$ est $x\bar{c}$ (produit de x par \bar{c} au sens de la structure vectorielle initiale de X); \bar{c} désigne le conjugué de c . Alors $X \oplus X'$ est muni d'une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{C} , qu'on se gardera de confondre avec la structure \mathbb{C} -vectorielle de $X \oplus X$. L'application qui, à un couple (x, x') d'éléments de X , associe $x + x' \in X_{\mathbb{H}}$, est un isomorphisme $X \oplus X' \approx X_{\mathbb{H}}$ pour les structures \mathbb{C} -vectorielles (à droite). Quant à la structure \mathbb{C} -vectorielle à gauche de $X_{\mathbb{H}}$, c'est celle de $X \oplus X$ dans l'isomorphisme précédent.

On a ainsi une inclusion $\text{Sp}(X_{\mathbb{H}}) \subset \text{U}(X \oplus X')$, et comme l'intersection de $\text{Sp}(X_{\mathbb{H}})$ et de $\text{U}(X) \times \text{U}(X')$ n'est autre que $\text{U}(X)$ (naturellement identifié à un sous-groupe de $\text{Sp}(X_{\mathbb{H}})$), on obtient une inclusion

$$f_1 : \text{Sp}(X_{\mathbb{H}})/\text{U}(X) \rightarrow \text{U}(X \oplus X')/\text{U}(X) \times \text{U}(X'),$$

ce qui définit f_1 . En réalité, $\text{Sp}(X_{\mathbb{H}})$ est même contenu dans $\text{SU}(X \oplus X')$, et en appliquant le foncteur Ω , on obtient l'application g_1 du diagramme (Δ_1) .

Montrons que (Δ_1) est commutatif. Soit $\alpha(\theta)$ la multiplication à gauche par $e^{-i\theta/2}$ dans $X_{\mathbb{H}}$; un élément de $X_{\mathbb{H}}$ étant identifié à un couple (x, x') d'éléments de X , c'est l'application

$$(x, x') \rightarrow (xe^{-i\theta/2}, x'e^{-i\theta/2}).$$

Pour $T \in \text{Sp}(X_H)$, l'application Φ_6 est définie par le crochet $[\alpha(\theta), T]$. Par ailleurs, Φ_0 est définie par le crochet $[\beta(\theta), T]$, où $\beta(\theta)$ est l'application $(x, x') \rightarrow (xe^{-i\theta}, x')$. Un élément $T \in \text{Sp}(X_H)$ est défini par un couple d'applications T_1, T_2 de $X \times X$ dans X , satisfaisant à

$$\begin{cases} T_1(xc, x' \bar{c}) = T_1(x, x') c, & T_2(xc, x' \bar{c}) = T_2(x, x') \bar{c} \\ T_1(-x', x) = -T_2(x, x'), & T_2(-x', x) = T_1(x, x') \end{cases} .$$

Alors $T \circ \alpha(-\theta)$ transforme (x, x') en

$$\begin{aligned} (T_1(xe^{i\theta/2}, x' e^{i\theta/2}), T_2(xe^{i\theta/2}, x' e^{i\theta/2})) \\ = (T_1(xe^{i\theta}, x') e^{-i\theta/2}, T_2(xe^{i\theta}, x') e^{i\theta/2}) \end{aligned} .$$

Si on effectue $\alpha(\theta)$ sur cet élément, on obtient

$$(T_1(xe^{i\theta}, x') e^{-i\theta}, T_2(xe^{i\theta}, x')) ,$$

c'est-à-dire $\beta(\theta) \circ T \circ \beta(-\theta) \cdot (x, x')$. Il s'ensuit que

$$[\alpha(\theta), T] = [\beta(\theta), T] ,$$

donc le diagramme (Δ_1) est commutatif.

Diagramme (Δ_2) . - L'application f_2 est définie par l'inclusion naturelle $\text{Sp}(Y) \subset U(Y)$. Quant à g_2 , elle va être obtenue en appliquant le foncteur Ω à l'application

$$h_2 : \text{SU}(Y \oplus Y) / \text{Sp}(Y \oplus Y) \rightarrow \text{SU}(Y \oplus Y)$$

définie comme suit. Soit j_d la multiplication (à droite) par j dans l'espace $Y \oplus Y$; l'application $T \rightarrow [j_d, T]$ applique $\text{SU}(Y \oplus Y)$ dans lui-même, comme on l'a vu lors de la définition de Φ_3 ; de plus, si $T' \in \text{Sp}(Y \oplus Y)$, on a $[j_d, TT'] = [j_d, T]$. Par passage au quotient, on obtient, par définition, l'application h_2 , qui à son tour induit g_2 .

Le diagramme (Δ_2) est homotopiquement commutatif: cela signifie que l'application $g_2 \circ \Phi_1$ est homotope à l'application composée de $\Phi_0 \circ f_2$. Pour le prouver, on doit montrer ceci: pour $0 \leq \theta \leq 2\pi$, soit $\alpha(\theta)$ l'application $(y, y') \rightarrow (ye^{i\theta}, y')$ de $Y \oplus Y$ en lui-même; alors les deux applications

$$(\theta, T) \rightarrow [j_d, [\alpha(\theta/2), T]] \quad \text{et} \quad (\theta, T) \rightarrow [\alpha(-\theta), T]$$

de $I \times \text{Sp}(Y \oplus Y)$ dans $\text{SU}(Y \oplus Y)$ sont homotopes (on note I l'intervalle

$[0, 2\pi]$). Or un calcul facile, compte tenu des relations évidentes

$$\alpha(\theta/2) j_d = j_d \alpha(-\theta/2), \quad T j_d = j_d T,$$

montre que

$$[j_d, [\alpha(\theta/2), T]] = \alpha(\theta/2)[\alpha(-\theta), T] \alpha(-\theta/2).$$

On définit une homotopie de ceci à $[\alpha(-\theta), T]$, en introduisant, pour chaque valeur d'un paramètre réel t variant de 0 à 1, l'application

$$(\theta, T) \rightarrow \alpha(t\theta/2)[\alpha(-\theta), T] \alpha(-t\theta/2);$$

pour $\theta = 0$ ou $\theta = 2\pi$, le second membre est indépendant de t , comme il se doit.

Diagramme (Δ_3) . L'application f_3 est induite par l'inclusion naturelle $O(V) \subset U(\underbrace{V}_{\mathbb{C}})$. L'application g_3 s'obtient en appliquant le foncteur Ω à l'application

$$h_3 : \frac{SU(\underbrace{V}_{\mathbb{C}} \oplus \underbrace{V}_{\mathbb{C}})}{SO(V \oplus V)} \rightarrow \frac{SU(\underbrace{V}_{\mathbb{C}} \oplus \underbrace{V}_{\mathbb{C}})}{SO(V \oplus V)}$$

définie comme suit. Soit σ la transformation de $\underbrace{V}_{\mathbb{C}} \oplus \underbrace{V}_{\mathbb{C}}$ en lui-même, qui associe à chaque vecteur son conjugué (ce qui a un sens, puisque $\underbrace{V}_{\mathbb{C}} \oplus \underbrace{V}_{\mathbb{C}}$ est le complexifié de l'espace réel $V \oplus V$). L'application $T \rightarrow [\sigma, T]$ applique $SU(\underbrace{V}_{\mathbb{C}} \oplus \underbrace{V}_{\mathbb{C}})$ dans lui-même, et si $T' \in SO(V \oplus V)$, on a $[\sigma, TT'] = [\sigma, T]$, parce que T' commute avec σ . Par passage au quotient, on obtient, par définition, l'application h_3 .

Le diagramme (Δ_3) est homotopiquement commutatif. Autrement dit, les deux applications

$$(\theta, T) \rightarrow [\sigma, [\alpha(\theta/2), T]] \quad \text{et} \quad (\theta, T) \rightarrow [\alpha(-\theta), T]$$

de $I \times O(V \oplus V)$ dans $SU(\underbrace{V}_{\mathbb{C}} \oplus \underbrace{V}_{\mathbb{C}})$ sont homotopes, en notant $\alpha(\theta)$ la transformation $(x, x') \rightarrow (x e^{i\theta}, x')$ de $\underbrace{V}_{\mathbb{C}} \oplus \underbrace{V}_{\mathbb{C}}$ en lui-même. Vérifions-le : un calcul facile, compte tenu des relations évidentes

$$\alpha(\theta/2) \sigma = \sigma \alpha(-\theta/2), \quad T \sigma = \sigma T,$$

montre que

$$[\sigma, [\alpha(\theta/2), T]] = \alpha(\theta/2)[\alpha(-\theta), T] \alpha(-\theta/2).$$

La démonstration s'achève comme dans le cas du diagramme (Δ_2) .

Diagramme (Δ_4) . Identifions $V \oplus V$ à $\underline{V}_{\mathbb{C}}$, en associant à (x, x') l'élément $x + x' i$.

Alors $U(\underline{V}_{\mathbb{C}}) \subset O(V \oplus V)$, et même $U(\underline{V}_{\mathbb{C}}) \subset SO(V \oplus V)$. Comme l'intersection de $U(\underline{V}_{\mathbb{C}})$ et de $O(V) \times O(V)$ n'est autre que $O(V)$ (naturellement identifié à un sous-groupe de $U(\underline{V}_{\mathbb{C}})$), on obtient une inclusion

$$f_4 : U(\underline{V}_{\mathbb{C}})/O(V) \rightarrow O(V \oplus V)/O(V) \times O(V) ,$$

ce qui définit l'application f_4 dans le diagramme (Δ_4) . Avant de définir g_4 , définissons un isomorphisme $\underline{V}_{\mathbb{H}} \approx \underline{V}_{\mathbb{C}} \oplus \underline{V}_{\mathbb{C}}$ en associant à $x + x' i + (y + y' i) j$ (où $x, x', y, y' \in V$) le couple $(x + yi, x' - y' i)$. Alors la multiplication (à droite) par j dans $\underline{V}_{\mathbb{H}}$ se transforme dans la transformation

$(u, v) \rightarrow (ui, -vi)$ de $\underline{V}_{\mathbb{C}} \oplus \underline{V}_{\mathbb{C}}$ en lui-même. Autrement dit, soit $\underline{V}'_{\mathbb{C}}$ l'espace $\underline{V}_{\mathbb{C}}$ muni de la structure vectorielle sur \mathbb{C} déduite de celle de $\underline{V}_{\mathbb{C}}$ par l'automorphisme $c \rightarrow \bar{c}$ de \mathbb{C} ; alors la multiplication par j dans $\underline{V}_{\mathbb{H}}$ se transforme dans la multiplication par i dans $\underline{V}_{\mathbb{C}} \oplus \underline{V}'_{\mathbb{C}}$. Il en résulte que $\underline{Sp}(\underline{V}_{\mathbb{H}})$ se plonge dans $SU(\underline{V}_{\mathbb{C}} \oplus \underline{V}'_{\mathbb{C}})$. De plus, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \underline{V}_{\mathbb{C}} \approx V \oplus V & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{V}_{\mathbb{H}} \approx \underline{V}_{\mathbb{C}} \oplus \underline{V}'_{\mathbb{C}} & & \end{array}$$

(où les flèches verticales désignent les inclusions déduites de l'extension du corps des scalaires). Donc, dans l'inclusion $\underline{Sp}(\underline{V}_{\mathbb{H}}) \rightarrow SU(\underline{V}_{\mathbb{C}} \oplus \underline{V}'_{\mathbb{C}})$ qu'on vient de définir, $U(\underline{V}_{\mathbb{C}})$ s'applique dans $SO(V \oplus V)$. Par passage au quotient, puis application du foncteur Ω , on obtient l'application g_4 du diagramme (Δ_4) .

Montrons maintenant que le diagramme (Δ_4) est homotopiquement commutatif. Soit $\alpha(\theta)$ la multiplication à gauche par $\cos \frac{\theta}{4} + j \sin \frac{\theta}{4}$ dans $\underline{V}_{\mathbb{H}}$, et soit $\beta(\theta)$ la transformation $(u, v) \rightarrow (ue^{i\theta/2}, v)$ de $\underline{V}_{\mathbb{C}} \oplus \underline{V}'_{\mathbb{C}}$ dans lui-même. Pour montrer que (Δ_4) est homotopiquement commutatif, il suffit de montrer que les applications

$$(\theta, T) \rightarrow [\alpha(\theta), T] \quad \text{et} \quad (\theta, T) \rightarrow [\beta(\theta), T]$$

de $I \times U(\underline{V}_{\mathbb{C}})$ dans $SU(\underline{V}_{\mathbb{C}} \oplus \underline{V}'_{\mathbb{C}})$ sont homotopes. Or $\alpha(\theta)$ se traduit par la transformation suivante de $\underline{V}_{\mathbb{C}} \oplus \underline{V}_{\mathbb{C}}$:

$$(u, v) \rightarrow (ue^{i\theta/4}, ve^{i\theta/4}) \quad ;$$

cette transformation est composée de $\beta(\theta)$ et de la multiplication par $e^{-i\theta/4}$ dans l'espace $\underbrace{V_{\mathbb{C}} \oplus V'_{\mathbb{C}}}$; autrement dit :

$$\alpha(\theta) = \gamma(-\theta) \beta(\theta) \quad ,$$

$\gamma(\theta)$ étant la multiplication par $e^{i\theta/4}$ dans $\underbrace{V_{\mathbb{C}} \oplus V'_{\mathbb{C}}}$. Si $T \in U(\underbrace{V_{\mathbb{C}}}) \subset O(V \oplus V)$, T commute avec $\gamma(\theta)$, et on a donc

$$[\alpha(\theta), T] = \gamma(-\theta)[\beta(\theta), T] \gamma(\theta) \quad .$$

On achève la démonstration de l'homotopie comme pour le diagramme (Δ_2) .

Diagramme (Δ_5) . - Soit τ l'automorphisme suivant de $X \oplus X$:

$$(x, y) \rightarrow \left(\frac{x + yi}{\sqrt{2}}, \frac{y + xi}{\sqrt{2}} \right) \quad ,$$

dont l'automorphisme réciproque est

$$(x, y) \rightarrow \left(\frac{x - yi}{\sqrt{2}}, \frac{y - xi}{\sqrt{2}} \right) \quad .$$

τ échange les deux structures de $\underbrace{\mathbb{C}}$ -module de $X \oplus X$, à savoir

$$(x, y) i = (-y, x)$$

et

$$(x, y) i = (xi, -yi) \quad .$$

Cette dernière est la structure $\underbrace{\mathbb{C}}$ -vectorielle de $X \oplus X'$, où X' désigne, comme plus haut, l'espace vectoriel déduit de X par l'automorphisme $c \rightarrow \bar{c}$ du corps $\underbrace{\mathbb{C}}$.

Associons à $T \in SO(X)$ la transformation $(x, y) \rightarrow (Tx, Ty)$ de $X \oplus X$ dans lui-même, que nous noterons (T, T) ; c'est un élément de $SU(X \oplus X)$ pour la première structure de $\underbrace{\mathbb{C}}$ -module. Alors $\tau(T, T) \tau^{-1}$ est une transformation de $X \oplus X$ en lui-même, qui est $\underbrace{\mathbb{C}}$ -linéaire pour la seconde structure de $\underbrace{\mathbb{C}}$ -module ; autrement dit, c'est un élément de $SU(X \oplus X')$. L'application $T \rightarrow \tau(T, T) \tau^{-1}$ est une application

$$h_5 : SO(X) \rightarrow SU(X \oplus X') \quad ,$$

et si on applique le foncteur Ω , on obtient, par définition, l'application g_5 du diagramme (Δ_5) (observer que $\Omega(\text{Spin}(X))$ est la composante connexe de l'élément neutre de $\Omega(SO(X))$).

Explicitons : si $T \in SO(X)$, la transformation $h_5(T) \in SU(X \oplus X')$ est la transformation suivante de $X \oplus X'$:

$$(x, y) \rightarrow \left(\frac{1}{2} \{T(x - yi) + T(y - xi) i\}, \frac{1}{2} \{T(y - xi) + T(x - yi) i\} \right) .$$

Si $T \in U(X)$, on voit que $h_5(T) = (T, T) \in U(X) \times U(X')$; donc, par passage au quotient, h_5 induit une application

$$f_5 : SO(X)/U(X) \rightarrow U(X \oplus X')/U(X) \times U(X') ,$$

ce qui définit f_5 dans le diagramme (Δ_5) .

On va montrer que (Δ_5) est commutatif. Soit $\alpha(\theta)$ la multiplication par $e^{-i\theta/2}$ dans l'espace X , et soit $\beta(\theta)$ l'application $(x, y) \rightarrow (xe^{-i\theta}, y)$ de $X \oplus X'$ dans lui-même. Si on remonte aux définitions des applications Φ_5 et Φ_0 (qui font intervenir les crochets avec $\alpha(\theta)$ et avec $\beta(\theta)$), on voit que la commutativité du diagramme (Δ_5) s'exprime par la relation

$$\tau([\alpha(\theta), T], [\alpha(\theta), T]) \tau^{-1} = [\beta(\theta), \tau(T, T) \tau^{-1}] .$$

Or ceci équivaut à

$$(*) \quad [\tau^{-1} \beta(\theta) \tau, (T, T)] = ([\alpha(\theta), T], [\alpha(\theta), T]) .$$

La transformation $\tau^{-1} \beta(\theta) \tau^{-1} = \gamma(\theta)$ transforme $(x, y) \in X \oplus X$ en

$$\left(\left(x \cos \frac{\theta}{2} + y \sin \frac{\theta}{2} \right) e^{-i\theta/2}, \left(-x \sin \frac{\theta}{2} + y \cos \frac{\theta}{2} \right) e^{-i\theta/2} \right) .$$

Le crochet $[\gamma(\theta), (T, T)]$ transforme (x, y) en

$$\left(T((T^{-1} x) e^{+i\theta/2}) e^{-i\theta/2}, T((T^{-1} y) e^{+i\theta/2}) e^{-i\theta/2} \right) ,$$

ce qui démontre la relation $(*)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DEMAZURE (Michel). - Théorèmes de Hurewicz et Whitehead, Séminaire Cartan, t. 11, 1958/59 : Invariant de Hopf et opérations cohomologiques secondaires, n° 4, 13 p.
- [2] DOUADY (Adrien). - La suite spectrale des espaces fibrés, Séminaire Cartan, t. 11, 1958/59 : Invariant de Hopf et opérations cohomologiques secondaires, n° 2, 10 p.
- [3] DOUADY (Adrien). - Périodicité du groupe unitaire, Séminaire Cartan, t. 12, 1959/60, n° 11-12, 16 p.
- [4] MOORE (John C.). - Espaces classifiants, Séminaire Cartan, t. 12, 1959/60, n° 5, 26 p.