MICHEL ZISMAN

La théorie de Marston Morse, I : géométrie différentielle

Séminaire Henri Cartan, tome 12, n° 2 (1959-1960), exp. n° 14, p. 1-35
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1959-1960__12_2_A4_0>

29 février 1960

LA THÉORIE DE MARSTON MORSE, I : GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

par Michel ZISMAN

A. Préliminaires

1. Rappel de quelques résultats classiques de géométrie riemannienne [3] et [4].

Dans tout cet exposé, M désignera une variété paracompacte munie une fois pour toutes d'une structure riemannienne C^∞. On supposera que pour cette structure riemannienne, M est complète (i. e. : M est complète pour la structure d'espace métrique induite par la structure riemannienne ; cf. 7, ci-dessous). On désignera par n la dimension de M. Toutes les applications, tous les champs de vecteurs seront supposés différentiables, de classe C^∞, sauf mention expresse du contraire.

Si $P \in M$, on désignera par M_P l'espace vectoriel tangent en P à M.

Soit $f : \underset{\sim}{R} \to M$ (resp. $V : \underset{\sim}{R} \times \underset{\sim}{R} \to M$) une application. On désignera par $\frac{df}{dt}$ (resp. $\frac{\partial V}{\partial t}$, $\frac{\partial V}{\partial \alpha}$) le vecteur tangent à la courbe f au point $f(t)$ (resp. le vecteur tangent à la courbe $V_\alpha : \underset{\sim}{R} \to M$ définie par $V_\alpha(t) = V(t, \alpha)$, resp. à la courbe V_t définie par $V_t(\alpha) = V(t, \alpha)$ au point $V(t, \alpha)$).

Si X est un champ de vecteurs défini le long de f, on désignera par X' si aucune confusion n'est à craindre, ou $\frac{\nabla X}{dt}$, la dérivée covariante de X le long de f, i. e., en coordonnées locales, le vecteur de coordonnées :

$$\left(\frac{\nabla X}{dt}\right)^i = \frac{dX^i}{dt} + \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma_{j\,k}^{\,i} X^j \left(\frac{df}{dt}\right)^k \qquad (i = 1 , \ldots , n)$$

où $\Gamma_{j\,k}^{\,i}$ désigne le symbole de Christoffel donné par la structure riemannienne, et X^i (resp. $(\frac{df}{dt})^i$) la i-ième composante de X (resp. $\frac{df}{dt}$).

Si, en coordonnées locales, $R^i_{j,k\ell}$ est le tenseur de courbure, et si X, Y sont deux champs de vecteurs sur M, on désignera par $R(X, Y)$ la forme de courbure, qui, à tout champ de vecteurs Z fait correspondre le champ de vecteurs $R(X, Y) Z$ de coordonnées

$$(R(X , Y) Z)^\alpha = \sum_{\rho, \lambda, \mu = 1}^{n} R^\alpha_{\rho,\lambda,\mu} Z^\rho X^\lambda Y^\mu \quad .$$

Les résultats qui suivent sont classiques.

(1.1) $$R(X, Y) = - R(Y , X) \quad .$$

(1.2) Si X , Y , Z , T sont quatre champs de vecteurs et si $(\; , \;)$ désigne le produit scalaire local défini par la métrique, on a

$$(R(X , Y) Z , T) = - (R(X , Y) T , Z) \quad ,$$

$$(R(X , Y) Z , T) = (R(T , Z) Y , X) \quad .$$

(1.3) $$\frac{\nabla}{d\alpha} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial V}{\partial \alpha} \quad .$$

(1.4) $$\frac{\nabla}{d\alpha} \frac{\nabla}{dt} W - \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{d\alpha} W = R(\frac{\partial V}{\partial \alpha} , \frac{\partial V}{\partial t}) W$$

pour tout champ W défini sur la surface V .

(1.5) Si le paramètre t est proportionnel à la longueur de l'arc s comptée à partir d'une origine t_0 , l'équation différentielle des géodésiques $g : \underset{\sim}{R} \to M$ est

$$\frac{\nabla}{dt} \frac{dg}{dt} = 0 \quad .$$

M étant complète, toute solution locale de cette équation se prolonge à $\underset{\sim}{R}$ tout entier de façon unique.

(1.6) Soient $P_0 \in M$, $X_0 \in M_{P_0}$ et $f : \underset{\sim}{R} \to M$ une courbe telle que $f(t_0) = P_0$. Le champ de vecteurs le long de f , $X(t)$ tel que $X(t_0) = X_0$, $\frac{\nabla}{dt} X = 0$, est par définition le champ obtenu par transport parallèle de X_0 le long de f .

2. Champs de Jacobi.

(2.1) CONVENTION. Dans cet exposé, et le suivant, on appellera géodésique une courbe $g : \underset{\sim}{R} \to M$ qui satisfait à l'équation différentielle des géodésiques et qui est paramétrée par un paramètre proportionnel à la longueur de l'arc s comptée à partir de $t = 0$.

(2.2) DÉFINITION : variation d'une géodésique. - On appelle variation d'une géodésique g une application $V : \underset{\sim}{R} \times A \to M$, où A est un intervalle ouvert de $\underset{\sim}{R}$ contenant 0 , telle que :

(i) pour tout $\alpha \in A$, la courbe $V_\alpha : \underset{\sim}{R} \to M$ définie par $V_\alpha(t) = V(t , \alpha)$ est une géodésique ;

(ii) $V_0 = g$.

(2.3) DÉFINITION. - On dit qu'un champ de vecteurs η défini le long de g est un champ de Jacobi s'il existe une variation V de g telle que :

$$\eta = \frac{\partial V}{\partial \alpha}(t \ , 0) \quad .$$

(2.4) PROPOSITION. - Les deux conditions :

a. η est un champ de Jacobi ;

b. η est une solution de l'équation différentielle

$$(J_g) \qquad \eta'' + R(\eta \ , \frac{dg}{dt}) \frac{dg}{dt} = 0$$

sont équivalentes.

DÉMONSTRATION.

a.$\Longrightarrow$b. Soit V une variation de g telle que $\eta = \frac{\partial V}{\partial \alpha}(t \ , 0)$. D'après (1.4), on a pour tout t et pour tout α :

$$\frac{\nabla}{d\alpha}\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{d\alpha}\frac{\partial V}{\partial t} = R(\frac{\partial V}{\partial \alpha} \ , \frac{\partial V}{\partial t})\frac{\partial V}{\partial t} \quad .$$

D'après (1.3) $\frac{\nabla}{d\alpha}\ \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\nabla}{dt}\frac{\partial V}{\partial \alpha}$, et d'après (1.5) $\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial V}{\partial t} = 0$, d'où le résultat.

b.$\Longrightarrow$a. Une solution de (J_g) est parfaitement déterminée par les conditions initiales η_0 et η_0' pour $t = t_0$. On considère une courbe $\varphi : A \to M$ telle que $\varphi(0) = g(t_0)$ et que $\frac{d\varphi}{d\alpha}(0) = \eta_0$. Le long de cette courbe φ , on considère un champ de vecteurs $Y(\alpha)$ tel que $\frac{\nabla Y}{d\alpha}(0) = \eta_0'$, $Y(0) = \frac{dg}{dt}(t_0)$. Par le point $\varphi(\alpha)$, il passe une unique géodésique $V_\alpha(t)$ telle que $V_\alpha(t_0) = \varphi(\alpha)$, $\frac{d}{dt}\, V_\alpha(0) = Y(\alpha)$. On pose $V(\alpha \ , t) = V_\alpha(t)$. $V(\alpha \ , t)$ est une variation de g telle que $\frac{\partial V}{\partial \alpha}(t_0 \ , 0) = \eta_0$, $\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial V}{\partial \alpha}(t_0 \ , \alpha) = \frac{\nabla}{d\alpha}\frac{\partial V}{dt}(t_0 \ , \alpha) = \frac{\nabla}{d\alpha}\, Y$. En particulier $\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial V}{\partial \alpha}(t_0 \ , 0) = \eta_0'$; le champ de Jacobi défini par V est donc η .

REMARQUE. - D'après la condition b, on voit qu'un champ de Jacobi est une isométrie infinitésimale le long de g .

COROLLAIRE 1. - L'ensemble J_g des champs de Jacobi le long de g est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$), et $\dim J_g = 2n$.

COROLLAIRE 2. - Soient σ un "segment" de géodésique (i. e. la restriction de g à un intervalle fermé de $\mathbb{R}$), et J_σ la restriction à σ des champs de Jacobi de g . Alors la restriction $J_g \to J_\sigma$ est une bijection.

(2.5) L'espace vectoriel $\Lambda_g(t_0)$.

On désigne par $\Lambda_g(t_0)$ le sous-espace vectoriel de J_g formé par les champs de Jacobi η tels que $\eta(t_0) = 0$.

Avec les notations de (2.4), on voit que pour construire une variation donnant un tel η , on peut prendre $\varphi(\alpha) = g(t_0)$ pour tout $\alpha \in A$. Autrement dit : pour obtenir les champs de Jacobi de $\Lambda_g(t_0)$, il suffit de considérer les variations V de g telles que $V(t_0 , \alpha) = g(t_0)$.

(2.6) L'espace vectoriel $J_g^N(t_0)$.

Soient N une sous-variété de M , et g une géodésique telle que

(i) $$g(t_0) \in N \quad ;$$

(ii) $$\frac{dg}{dt}(t_0) \quad \text{est un vecteur orthogonal à } N_{g(t_0)} \quad .$$

DÉFINITION. - On désigne par $J_g^N(t_0)$ le sous-ensemble de J_g des champs de Jacobi le long de g obtenus par des variations V satisfaisant à :

(i) $$V(t_0 , \alpha) \in N \quad ,$$

(ii) $$\frac{\partial V}{\partial t}(t_0 , \alpha) \perp N_{V(t_0,\alpha)} \quad .$$

On peut caractériser les champs de $J_g^N(t_0)$ comme étant des solutions de l'équation différentielle (J_g) satisfaisant à certaines conditions initiales. Ces conditions initiales font intervenir la deuxième forme fondamentale de N définie par le vecteur normal $\frac{dg}{dt}(t_0)$.

(2.7) La deuxième forme fondamentale d'une sous-variété N de M .

Soient $m \in N$, $X \in M_m$, $X \perp N_m$, et Y , Z , deux vecteurs de N_m . Soit $\varphi : A \to N$ une courbe de N telle que $\varphi(0) = m$, $\frac{d\varphi}{d\alpha}(0) = Y$. On note $Z^*(\alpha)$ le champ de vecteurs le long de φ défini par transport parallèle le long de φ du vecteur Z , et $Z^*_T(\alpha)$ la projection orthogonale de $Z^*(\alpha)$ dans l'espace vectoriel $N_{\varphi(\alpha)}$. On pose

$$Q_X(Y , Z) = (X , \frac{\nabla}{d\alpha} Z^*_T(0)) \quad .$$

LEMME 1. - $Q_X(Y , Z)$ est une forme bilinéaire symétrique en Y , Z , indépendante de la courbe φ de N satisfaisant aux conditions $\varphi(0) = m$, $\frac{d\varphi}{d\alpha}(0) = Y$.

DÉMONSTRATION. - Soit q la dimension de N. Dans un voisinage assez petit de m, on peut considérer N comme donnée par une représentation paramétrique $\Phi : A^q \to M$ telle que $\Phi(0) = m$. Alors

$$Y = \sum_{i=1}^{q} Y^i \frac{\partial\Phi}{\partial z^i}(0) \quad ,$$

$$Z = \sum_{i=1}^{q} Z^i \frac{\partial\Phi}{\partial z^i}(0) \quad ,$$

et $\varphi(\alpha)$ est la courbe donnée par $\varphi(\alpha) = \Phi(z^1(\alpha), \ldots, z^q(\alpha))$, où $z^1(\alpha), \ldots, z^q(\alpha)$ sont des fonctions telles que $z^i(0) = 0$, $\frac{dz^i}{d\alpha}(0) = Y^i$, $i = 1, \ldots, q$. Alors Z^*_T s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{q} (Z^*_T)^i \frac{\partial\Phi}{\partial z^i} \quad ,$$

et

$$(X , \frac{\nabla}{d\alpha} Z^*_T(0)) = (X , \sum_{i=1}^{q} \frac{d}{d\alpha}(Z^*_T)^i \frac{\partial\Phi}{\partial z^i}(0)) + (X , \sum_{i=1}^{q} (Z^*_T)^i \frac{\nabla}{d\alpha} \frac{\partial\Phi}{dz^i}(0))$$

$$= (X , \sum_{i=1}^{q} Z^i \frac{\nabla}{d\alpha} \frac{\partial\Phi}{\partial z^i}(0)) = \sum_{i,j=1}^{q} (X , Z^i Y^j \frac{\nabla}{dz^j} \frac{\partial\Phi}{\partial z^i}(0)) \quad ,$$

car $(X , \frac{\partial\Phi}{\partial z^i}(0)) = 0$ par hypothèse, et $Z^*(0) = Z^*_T(0) = Z$. Le fait que $Q_X(Y , Z)$ est symétrique résulte alors de (1.3),

C. Q. F. D.

On pose maintenant $T_X Y = \frac{\nabla}{d\alpha} X^*_T(0)$, où $X^*(\alpha)$ (resp. $X^*_T(\alpha)$) désigne le champ de vecteurs défini le long de φ par transport parallèle le long de φ du vecteur X (resp. la projection de ce champ sur $N_{\varphi(\alpha)}$.

LEMME 2. - $T_X Y \in N_m$, $(T_X Y , Z) = Q_X(Y , Z)$. <u>En particulier,</u> $T_X Y$ <u>est une transformation linéaire autoadjointe de</u> N_m, <u>indépendante du choix de la courbe</u> φ <u>satisfaisant à</u> $\varphi(0) = m$, $\frac{d\varphi}{d\alpha}(0) = Y$.

DÉMONSTRATION. - Soit $\nu(\alpha)$ un champ de vecteurs le long de φ tel que, pour tout α, $\nu(\alpha) \perp N_{\varphi(\alpha)}$. On a donc $(X^*_T(\alpha) , \nu(\alpha)) = 0$, soit, en dérivant par rapport à α et en faisant $\alpha = 0$:

$$(T_X Y , \nu(0)) + (X^*_T(0) , \frac{\nabla}{d\alpha} \nu(0)) = 0 \quad .$$

X étant normal à N_m, on a $X^*_T(0) = 0$, i. e. $T_X Y \in N_m$. Désignons par $X^*_N(\alpha)$ (resp. $Z^*_N(\alpha)$) la composante de $X^*(\alpha)$ (resp. $Z^*(\alpha)$) dans le sous-espace supplémentaire orthogonal de $N_{\varphi(\alpha)}$. En dérivant les deux relations

$$(X^*_T(\alpha)\ ,\ Z^*_N(\alpha)) = 0 \quad , \quad (X^*_N(\alpha)\ ,\ Z^*_T(\alpha)) = 0 \quad ,$$

compte tenu du fait que :

$$\frac{\nabla}{d\alpha} X^*_T + \frac{\nabla}{d\alpha} X^*_N = \frac{\nabla}{d\alpha} X^* = 0$$

$$\frac{\nabla}{d\alpha} Z^*_T + \frac{\nabla}{d\alpha} Z^*_N = \frac{\nabla}{d\alpha} Z^* = 0 \qquad \text{(cf. (1.6))},$$

on obtient

$$\left(\frac{\nabla}{d\alpha} X^*_T\ ,\ Z^*_N\right) = \left(X^*_T\ ,\ \frac{\nabla}{d\alpha} Z^*_T\right)$$

$$\left(\frac{\nabla}{d\alpha} X^*_T\ ,\ Z^*_T\right) = \left(X^*_N\ ,\ \frac{\nabla}{d\alpha} Z^*_T\right) \quad .$$

Soit, en ajoutant et en faisant $\alpha = 0$:

$$(T_X Y\ ,\ Z) = Q_X(Y\ ,\ Z) \quad .$$

(2.8) PROPOSITION. - Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

a. $\eta \in J_g^N(t_0)$;

b. η est une solution de l'équation différentielle (J_g) satisfaisant aux conditions initiales :

b_1. $\eta(t_0) \in N_{g(t_0)}$

b_2. $\eta'(t_0) + T_g\, \eta(t_0) \perp N_{g(t_0)}$.

(On a écrit T_g au lieu de $T_{\frac{dg}{dt}(t_0)}$).

DÉMONSTRATION.

a.$\Longrightarrow$b. D'après (2.6)(i), $\varphi(\alpha) = V(t_0\ ,\ \alpha) \in N$. Donc :

$$\frac{d\varphi}{d\alpha}(0) = \frac{\partial}{\partial\alpha} V(t_0\ ,\ 0) = \eta(t_0) \in N_{g(t_0)} \quad .$$

Soit alors $Z \in N_{g(t_0)}$; d'après (2.6)(ii), on a :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} V(t_0\ ,\ \alpha)\ ,\ Z^*_T(\alpha)\right) = 0 \quad .$$

On dérive cette relation, et on obtient, pour $\alpha = 0$, compte tenu de (1.3) :

$$(\eta'(t_0) \ , Z) + (\frac{dg}{dt}(t_0) \ , \frac{\nabla}{d\alpha} Z^*_T(0)) = 0 \qquad .$$

mais, comme $\frac{d\varphi}{d\alpha}(0) = \eta(t_0)$, le dernier produit scalaire est égal à $(T_g \, \eta(t_0), Z)$ d'après le lemme 2 de (2.7), et par conséquent

$$(\eta'(t_0) + T_g \, \eta(t_0) \ , Z)) = 0 \qquad ,$$

d'où le résultat, compte tenu de (2.4).

b.$\Longrightarrow$a. Soit η une solution de (J_g) satisfaisant aux conditions b_1 et b_2. On reprend les notations de la démonstration ((2.4), b.$\Longrightarrow$a.). D'après b_1, on peut choisir la courbe φ dans N. Soient alors $Y(\alpha)$ un champ de vecteurs le long de φ tel que $Y(0) = \frac{dg}{dt}(t_0)$, $\frac{\nabla Y}{d\alpha}(0) = \eta'(t_0)$, et $Y_T(\alpha)$ (resp. $Y_N(\alpha)$) les projections de $Y(\alpha)$ dans $N_{\varphi(\alpha)}$ (resp. le supplémentaire orthogonal de $N_{\varphi(\alpha)}$).

Je dis que $Y_N(0) = \frac{dg}{dt}(t_0)$, $\frac{\nabla}{d\alpha} Y_N(0) = \eta'(t_0)$, ce qui démontre la propriété, compte tenu du raisonnement fait dans (2.4) avec $Y_N(\alpha)$ au lieu de $Y(\alpha)$.

$Y(0)$ étant orthogonal à $N_{g(t_0)}$, on a bien $Y_N(0) = Y(0) = \frac{dg}{dt}(t_0)$. Soit $Z \in N_{g(t_0)}$. On a $(Y_N(\alpha) \ , Z^*_T(\alpha)) = 0$; en dérivant par rapport à α, faisant $\alpha = 0$, et compte tenu du fait que $Y_N(0) = \frac{dg}{dt}(t_0)$, on obtient :

$$(\frac{\nabla}{d\alpha} Y_N(0) \ , Z) + (T_g \, \eta(t_0) \ , Z) = 0 \qquad ,$$

ce qui peut encore s'écrire, d'après b_2 :

(1) $$(\frac{\nabla}{d\alpha} Y_N(0) - \eta'(t_0) \ , Z) = (\frac{\nabla}{d\alpha} Y_T(0) \ , Z) = 0 \qquad .$$

Prenons un vecteur K orthogonal à $N_{g(t_0)}$. Dérivons l'égalité

$$(Y_T(\alpha) \ , K^*_N(\alpha)) = 0 \qquad ;$$

on obtient, pour $\alpha = 0$,

$$(\frac{\nabla}{d\alpha} Y_T(0) \ , K) + (Y_T(0) \ , \frac{\nabla}{d\alpha} K^*_N) = 0 \qquad ;$$

mais $Y_T(0) = 0$, puisque $Y(0) \perp N_{g(t_0)}$. Donc :

(2) $$(\frac{\nabla}{d\alpha} Y_T(0) \ , K) = 0 \qquad .$$

D'après (1) et (2), on a :

$$0 = \frac{\nabla}{d\alpha} Y_T(0) = \frac{\nabla}{d\alpha} Y(0) - \frac{\nabla}{d\alpha} Y_N(0) = \eta'(t_0) - \frac{\nabla}{d\alpha} Y_N(\alpha)$$

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 1. - $J_g^N(t_0)$ <u>est un sous-espace vectoriel de dimension</u> $n = \dim M$.

COROLLAIRE 2. - Soient η , μ deux champs de $J_g^N(t_0)$; alors $(\eta' , \mu) = (\eta , \mu')$. En effet, d'après (2.4)b, et (1.3), on a $(\eta'' , \mu) - (\eta , \mu'') = 0$. Donc $(\eta' , \mu) - (\eta , \mu') = $ Cte . Puisque $\mu(t_0) \in N_{g(t_0)}$, on a

$$(\eta'(t_0) , \mu(t_0)) + (T_g \eta(t_0) , \mu(t_0)) = 0$$

d'après (2.8)b_2. Comme T_g est autoadjoint pour (,) , on voit que

$$(\eta' , \mu) - (\eta , \mu') = (\eta'(t_0) , \mu(t_0)) - (\eta(t_0) , \mu'(t_0)) = 0 .$$

3. <u>Points focaux</u>.

Soient N une sous-variété de M , $g : \underset{\sim}{R} \to M$ une géodésique telle que $g(t_1) \in N$, $\frac{dg}{dt}(t_1) \perp N_{g(t_1)}$.

DÉFINITION. - On dit que $t_0 \in \underset{\sim}{R}$ est une <u>valeur focale</u>, ou que $g(t_0)$ est un <u>point focal</u> de N relativement à la géodésique g , si

$$\lambda(t_0) = \dim J_g^N(t_1) \cap \Lambda_g(t_0) \neq 0 .$$

EXEMPLE. - $M = \underset{\sim}{R}^3$, N est une surface, g une normale. Il y a deux points focaux : les points de contact de g avec les deux normales. Les points focaux généralisent la notion de <u>foyer</u> de l'optique géométrique.

(3.1) Soit σ la restriction de la géodésique g à $[a , t_1]$. On a le théorème suivant :

THÉORÈME. - <u>Il n'y a qu'un nombre fini de points focaux sur</u> σ .

Comme $[a , t_1]$ est compact, il suffit de démontrer que les valeurs focales de N relativement à g sont <u>isolées</u>.

On a vu dans (2.8) que $J_g^N(t_1)$ est un espace vectoriel à n dimensions. Soit $(\eta_1(t) , \ldots , \eta_n(t))$ une <u>base</u> de $J_g^N(t_1)$. Soit $t_0 \in \underset{\sim}{R}$, et soit U un voisinage de $g(t_0)$ assez petit pour qu'il existe un champ de n-repères dans U . Pour un ρ assez petit, $g(t) \in U$ si $|t - t_0| < \rho$. Dans ces conditions, on peut considérer le déterminant

$$D(t) = D(\eta_1(t) \, , \, \dots \, , \, \eta_n(t))$$

calculé en chaque point $g(t)$ par rapport au n-repère de ce point. Puisque tout champ $\eta(t) \in J_g^N(t_1)$ est une combinaison linéaire (à coefficients constants !) des $\eta_j(t)$ ($j = 1, \dots, n$), on voit que la condition nécessaire et suffisante pour que t soit une valeur focale $(t \in]t_0 - \rho, t_0 + \rho[)$ est que $D(t) = 0$. Supposons alors que t_0 soit une valeur focale, et soit $\lambda(t_0) = \dim J_g^N(t_1) \cap \Lambda_g(t_0)$. Le fait que t_0 soit une valeur isolée résulte du lemme suivant :

LEMME. - $D(t) = (t - t_0)^{\lambda(t_0)} A(t)$, $A(t)$ étant une fonction continue de t non nulle pour $t = t_0$ ($t \in]t_0 - \rho', t_0 + \rho'[$ pour un $\rho' < \rho$).

DÉMONSTRATION du lemme. - Si on change de base $\eta_1, \dots, \eta_n$ de $J_g^N(t_1)$, $D(t)$ est multiplié par une constante non nulle. On choisit alors une base adaptée à notre problème de la façon suivante : on prend une base $\eta_1(t), \dots, \eta_{\lambda(t_0)}(t)$ de $J_g^N(t_1) \cap \Lambda_g(t_0)$ et on la complète par $n - \lambda(t_0)$ champs de $J_g^N(t_1)$, $\eta_{\lambda(t_0)+1}(t), \dots, \eta_n(t)$ de façon à obtenir une base de $J_g^N(t_1)$.

Si $j \leqslant \lambda(t_0)$, et si $\eta^i{}_j(t)$ est la i-ième composante de $\eta_j(t)$ sur le repère au point $g(t)$, on a, puisque $\eta_j(t_0) = 0$,

$$\eta^i{}_j(t) = (t - t_0)\, \varphi^i{}_j(t) \qquad ,$$

où $\varphi^i_j(t)$ est une fonction continue de t pour $|t - t_0| < \rho'$. Par conséquent $D(t) = (t - t_0)^{\lambda(t_0)} A(t)$, où $A(t)$ est continue pour $|t - t_0| < \rho'$.

A démontrer : $A(t_0) \neq 0$.

Comme $\varphi^i{}_j(t_0) = \frac{d}{dt} \eta^i{}_j(t_0)$, on voit que :

$$A(t_0) = D(\eta'_1(t_0) \, , \, \dots \, , \, \eta'_{\lambda(t_0)}(t_0) \, , \, \eta_{\lambda(t_0)+1}(t_0) \, , \, \dots \, , \, \eta_n(t_0))$$

(où le prime désigne la dérivée covariante).

Premier cas. - $\lambda(t_0) = n$.

Si $A(t_0) = D(\eta'_1(t_0), \dots, \eta'_n(t_0)) = 0$, il existe une combinaison linéaire à coefficients (constants) non tous nuls

$$\eta(t) = \sum_{j=1}^{n} .\mu_j \; \eta_j(t)$$

telle que $\eta'(t_0) = 0$. Mais comme on a aussi $\eta(t_0) = 0$ puisque $\lambda(t_0) = n$, on a, d'après (2.4)b, $\eta(t) = 0$, ce qui est impossible puisque les η_j forment une base, et que les μ_j ne sont pas tous nuls.

Deuxième cas. - $\lambda(t_0) < n$.

Soient c_1 , ... c_n des constantes non toutes nulles. On pose :

$$u(t) = \sum_{j \leqslant \lambda(t_0)} c_j \eta_j(t) \quad , \quad v(t) = \sum_{j > \lambda(t_0)} c_j \eta_j(t) \quad .$$

D'après (2.8), corollaire 2, on a $(u' , v) - (u , v') = 0$. Mais, pour $t = t_0$, $u(t_0) = 0$ puisque $u(t) \in \Lambda_g(t_0)$. Donc

$$(u'(t_0) , v(t_0)) = 0 \quad .$$

Supposons alors que $A(t_0)$ soit nul. On pourrait choisir des constantes c_i non toutes nulles telles que, pour ces constantes, $u'(t_0) = v(t_0)$; on aurait donc :

$$(v(t_0) , v(t_0)) = 0 \quad ,$$

soit $v(t_0) = 0$. Autrement dit, puisque les $n - \lambda(t_0)$, vecteurs $\eta_j(t_0)$ pour $j > \lambda(t_0)$, sont linéairement indépendants, on aurait $c_j = 0$ pour $j > \lambda(t_0)$, i. e. les c_j ne seraient pas toutes nulles pour $j \leqslant \lambda(t_0)$. Or, on aurait $u(t_0) = 0$, $v(t_0) = u'(t_0) = 0$, soit $u(t) = 0$ d'après (2.4)b, i. e. $c_j = 0$ pour $j \leqslant \lambda(t_0)$. D'où une contradiction.

B. Cas où un groupe compact d'isométries de M est à "action variationnellement complète"

4. Rappels et notations.

Soit K un groupe de Lie compact, connexe, d'isométries de M qui opère sur M par l'intermédiaire de l'application $\pi : K \times M \to M$ ($\pi(k , m) = k.m$). On désigne par $\pi_k : M \to M$ l'isométrie induite (par π) par $k \in K$. Soit $\mathfrak{k}$ l'algèbre de Lie de K . On rappelle la définition suivante, ([3] et [4]).

(4.1) Champs de vecteurs de Killing.

Soit $X \in \mathfrak{k}$; $\exp tX$ est un groupe à un paramètre d'isométries de M . Si $x \in M$, on considère la courbe $h_x : \underset{\sim}{R} \to M$ définie par $h_x(t) = (\exp tX).x$. L'application $x \to \frac{d}{dt} h_x(0) = \widetilde{X}_x$ définit un champ de vecteurs $\widetilde{X}$ sur M , appelé champ de Killing, défini par X . On note $\widetilde{\pi}$ l'application $X \to \widetilde{X}$.

(4.2). - Soient g une géodésique de M , et $h(\alpha)$ un sous-groupe à un paramètre de K ; K étant un groupe d'isométries, pour chaque α , $h(\alpha).g$ est encore une géodésique. L'application $(t, \alpha) \to h(\alpha).g(t)$ est donc une variation de g.

CONSÉQUENCE : La restriction d'un champ de Killing à g est un élément de J_g. On notera $\tilde{\pi}_g$ l'application $\mathfrak{k} \to J_g$ ainsi définie.

(4.3) Soient g une géodésique, et $X \in \mathfrak{k}$; alors

$$\left(\frac{dg}{dt}, \tilde{X}_{g(t)}\right) = \text{Cte} \quad .$$

En effet, $\tilde{X}$ laisse invariante la métrique ; si donc on note γ le tenseur métrique et $\mathfrak{L}(\tilde{X})$ la dérivée de Lie associée au champ $\tilde{X}$, on a (cf. [4]) $\mathfrak{L}(\tilde{X})\gamma = 0$, ce qui s'exprime en coordonnées locales $(x^1, \ldots, x^n)$ par l'équation

$$\sum_k \tilde{X}^k \nabla_k \gamma_{ij} + \sum_r \gamma_{rj} \nabla_i \tilde{X}^r + \sum_r \gamma_{ir} \nabla_j \tilde{X}^r = 0 \quad .$$

Multiplions par $\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}$, sommons pour i, j variant de 1 à n ; on obtient, compte tenu de $\nabla\gamma = 0$, $\left(\frac{dg}{dt}, \frac{\nabla}{dt}\tilde{X}_{g(t)}\right) = 0$; comme $\frac{\nabla}{dt}\frac{dg}{dt} = 0$, la relation annoncée est bien démontrée [voir aussi (6.3) pour une autre démonstration].

(4.4) Si $x \in M$, on désignera par $O(x)$ l'orbite du point x, i. e.

$$O(x) = \{k.x \mid k \in K\} \quad .$$

Il est clair sur les définitions que :

$$O(x)_x = \{\tilde{X}_x \mid X \in \mathfrak{k}\} \quad . \tag{1}$$

Soit g une géodésique ; supposons que $\frac{dg}{dt}(t_0)$ soit perpendiculaire à $O(g(t_0))_{g(t_0)}$. On a donc, pour tout $X \in \mathfrak{k}$,

$$\left(\frac{dg}{dt}, \tilde{X}_{g(t)}\right) = \left(\frac{dg}{dt}(t_0), \tilde{X}_{g(t_0)}\right) = 0 \quad .$$

On a démontré, compte tenu de (1), la proposition suivante :

PROPOSITION. - Si g est orthogonale à l'orbite d'un point $g(t_0)$, elle est orthogonale à l'orbite du point $g(t)$ quel que soit t.

DÉFINITION. - On dit qu'une géodésique est transversale si, quel que soit t, elle est orthogonale à l'orbite du point $g(t)$. (Il suffit donc, pour qu'il en soit ainsi, qu'elle soit orthogonale à l'orbite d'un seul point). Si g est une géodésique transversale, on notera $J_g^{\pi}(t_0)$ l'espace vectoriel

$$J_g^{O(g(t_0))}(t_0) \quad .$$

(4.5) Soit g une géodésique transversale. Si $h(\alpha)$ est un sous-groupe à un paramètre de K, alors, pour chaque α, $h(\alpha).g$ est une géodésique transversale puisque $h(\alpha)$ est une isométrie. De plus, $h(\alpha)\ g(t) \in O(g(t))$. Appliquons cela au cas où $h(\alpha) = \exp(\alpha X)$, $X \in \mathfrak{k}$: <u>si</u> g <u>est transversale, et si</u> $X \in \mathfrak{k}$, <u>alors</u> $\tilde{\pi}_g X \in J_g^{\pi}(t)$ <u>quel que soit</u> $t \in \underset{\sim}{R}$.

En particulier, $\tilde{\pi}_g X \in J_g^{\pi}(t_0) \cap J_g^{\pi}(t_1)$ pour t_0 et $t_1 \in \underset{\sim}{R}$. En général, l'application $\tilde{\pi}_g : \mathfrak{k} \to J_g^{\pi}(t_0) \cap J_g^{\pi}(t_1)$ n'est pas surjective, d'où l'intérêt de la définition suivante.

DÉFINITION. - <u>On dit que</u> K <u>est à action variationnellement complète si, pour toute géodésique transversale, et tout</u> $t_0 \neq t_1$, $\tilde{\pi}_g : \mathfrak{k} \to J_g^{\pi}(t_0) \cap J_g^{\pi}(t_1)$ <u>est surjective</u>.

PROPOSITION. - <u>Les deux conditions suivantes sont équivalentes</u> :

a. K <u>est à action variationnellement complète</u> ;

b. <u>si</u> $\eta \in J_g^{\pi}(t_0) \cap \Lambda_g(t_1)$ <u>avec</u> $t_0 \neq t_1$, <u>alors</u> η <u>est la restriction à</u> g <u>d'un champ de Killing</u> (g étant transversale).

DÉMONSTRATION.

a.$\Rightarrow$b. - Soit $\eta \in J_g^{\pi}(t_0) \cap \Lambda_g(t_1)$. On a $\eta(t_1) = 0$, donc en particulier $\eta(t_1) \in O(g(t_1))_{g(t_1)}$. Montrons que $\eta'(t_1) \perp O(g(t_1))_{g(t_1)}$. Compte tenu de $\eta(t_1) = 0$ et de (2.8)b_2, cela démontrera que $\eta \in J_g^{\pi}(t_1)$, donc que a.$\Rightarrow$b. Si $\tilde{X}$ est un champ de Killing, $\tilde{X}_{g(t)} \in J_g^{\pi}(t_0)$ et par conséquent, ((2.8), corollaire 2) : $(\eta'(t), \tilde{X}_{g(t)}) = (\eta(t), \tilde{X}'_{g(t)})$; en particulier, pour $t = t_1$, on a $(\eta'(t_1), \tilde{X}_{g(t_1)}) = 0$. On en déduit le résultat en utilisant (4.4)(1).

b.$\Rightarrow$a. - Soit $\eta \in J_g^{\pi}(t_0) \cap J_g^{\pi}(t_1)$. D'après (2.8)$b_1$, $\eta(t_1)$ est tangent à $O(g(t_1))$. Donc, d'après (4.4)(1), il existe $X \in \mathfrak{k}$ tel que $\eta(t_1) = \tilde{X}_{g(t_1)}$; η et $\tilde{X}_{g(t)}$ appartiennent à $J_g^{\pi}(t_0)$, donc $\eta - \tilde{X}_{g(t)} \in J_g^{\pi}(t_0)$; mais, par définition de X, $\eta - \tilde{X}_{g(t)} \in \Lambda_g(t_1)$; $\eta - \tilde{X}_{g(t)}$ est donc la restriction à g d'un champ de Killing, et $\eta = \eta - \tilde{X}_{g(t)} + \tilde{X}_{g(t)}$ aussi.

5. Calcul de $\lambda(t_0) = \dim(J_g^{\pi}(t_1) \cap \Lambda_g(t_0))$ (t_1 fixé, $t_0 \neq t_1$) .

(5.1) DÉFINITION. - Soit W un sous-ensemble de M ; le stabilisateur K_W de W est le sous-groupe de K formé des éléments k tels que $kw = w$ pour tout $w \in W$.

(5.2) Soit g une géodésique transversale, $K_{g(t_0)}$ le stabilisateur de $g(t_0)$, K_g le stabilisateur de g .

L'application $\tilde{\pi}_g$ applique la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{k}_{g(t_0)}$ de $\mathfrak{k}$ dans $J_g^{\pi}(t_1)$ d'après (4.5). De plus, si $X \in \mathfrak{k}_{g(t_0)}$, $(\exp \alpha X)\, g(t_0) = g(t_0)$ pour tout α , et par conséquent $(\tilde{\pi}_g X)(t_0) = 0$ d'après (2.5) ; réciproquement, si $(\tilde{\pi}_g X)(t_0') = 0$, $X \in \mathfrak{k}_{g(t_0')}$. Donc $\tilde{\pi}_g$ induit une application (encore notée $\tilde{\pi}_g$) : $\mathfrak{k}_{g(t_0)} \to J_g^{\pi}(t_1) \cap \Lambda_g(t_0)$ dont le noyau est $\mathfrak{k}_g$. Autrement dit, la suite

$$0 \to \mathfrak{k}_g \to \mathfrak{k}_{g(t_0)} \xrightarrow{\pi_g} J_g^{\pi}(t_1) \cap \Lambda_g(t_0)$$

est exacte.

Si maintenant K est à action variationnellement complète, $\tilde{\pi}_g$ est surjective, et par conséquent on a démontré :

(5.3) PROPOSITION. - Soit g une géodésique transversale. On a :

$$\dim K_{g(t_0)} - \dim K_g \leqslant \lambda(t_0) \quad .$$

Si K est à action variationnellement complète, on a plus précisément :

$$\dim K_{g(t_0)} - \dim K_g = \lambda(t_0) \quad .$$

(5.4) Soit P , un point tel que $O(P)$ soit une orbite de dimension maximum. Si Q est un point quelconque de M , on pose :

$$\delta(Q) = \dim O(P) - \dim O(Q) = \dim K_Q - \dim K_P \quad .$$

Soit g une géodésique transversale, et supposons que $O(g(\tau))$ soit de dimension maximum pour un certain $\tau \in \mathbb{R}$.

PROPOSITION. - Dans ces conditions, $\mathfrak{k}_{g(\tau)} = \mathfrak{k}_g$.

DÉMONSTRATION. - g étant transversale, $\frac{dg}{dt}(\tau) \perp O(g(\tau))_{g(\tau)}$; et par conséquent, (cf. [2]), le stabilisateur de tout point Q de g assez près de $g(\tau)$ est contenu dans $K_{g(\tau)}$. La dimension de $O(g(\tau))$ étant maximum, les composantes de l'identité de K_Q et $K_{g(\tau)}$ coïncident, et par conséquent les composantes de l'identité de K_g et $K_{g(\tau)}$ aussi.

(5.5) PROPOSITION. - Soit g une géodésique transversale qui passe par un point dont l'orbite est de dimension maximum. Alors :

$$\lambda(t_0) \geqslant \delta(g(t_0)) \quad .$$

Si K est à action variationnellement complète, on a plus précisément :

$$\lambda(t_0) = \delta(g(t_0)) \quad .$$

C'est une conséquence immédiate de (5.3) et (5.4). Dans certains cas, on sait calculer effectivement $\delta(g(t_0))$, d'où l'intérêt de la proposition précédente.

C. L'indice d'une géodésique.

6. Calcul d'une dérivée seconde.

Soient N_1 et N_2 deux sous-variétés de M , g une géodésique telle que $g(t_1) \in N_1$, $g(t_2) \in N_2$. Soit $V_\alpha(t)$ une famille de courbes telles que :

(i) $V(t , \alpha) = V_\alpha(t)$ est une application C^∞ de $\underset{\sim}{R} \times A$ dans M telle que $V(t , 0) = V_0(t) = g(t)$;

(ii) il existe deux fonctions $t_\varepsilon(\alpha)$ ($\varepsilon = 1 , 2$) telles que $V_\alpha(t_\varepsilon(\alpha)) \in N_\varepsilon$ et que $t_\varepsilon(0) = t_\varepsilon$;

(iii) si $s_\alpha(t)$ désigne la longueur de l'arc de la courbe $V_\alpha(t)$ compris entre une certaine origine $t_0(\alpha)$ et t , alors

$$\frac{t - t_1(\alpha)}{s_\alpha(t) - s_\alpha(t_1(\alpha))} = k(\alpha) \quad ,$$

$k(\alpha)$ étant une fonction positive.

Pour simplifier l'écriture, on pose :

$$X = \frac{\partial V}{dt} \quad , \quad Y = \frac{\partial V}{\partial \alpha} \quad , \quad T(t) = X(t , 0) = \frac{dg}{dt} \quad , \quad \mu(t) = Y(t , 0) \; .$$

D'après (iii), $|X|^2 = (X , X) = \dfrac{1}{k^2(\alpha)}$; en particulier, $|X|$ est indépendant de t .

On se propose de calculer la dérivée seconde de la fonction

$$I(\alpha) = \int_{t_1(\alpha)}^{t_2(\alpha)} \sqrt{(X , X)}\, dt = |X|(t_2(\alpha) - t_1(\alpha)) = s_\alpha(t_2(\alpha)) - s_\alpha(t_1(\alpha))$$

pour $\alpha = 0$.

(6.1) $$I'(\alpha) = t_2'(\alpha) - t_1'(\alpha))|X| + \int_{t_1(\alpha)}^{t_2(\alpha)} \frac{(\frac{\nabla X}{d\alpha}, X)}{|X|} dt \quad .$$

Remarquons que, $|X|$ étant indépendant de t, il en est de même de $(\frac{\nabla X}{d\alpha}, X)$. En particulier, puisque $\frac{\nabla X}{d\alpha} = \frac{\nabla}{dt} Y$ (cf. (1.3)) :

(6.2) $$(\mu' , T) = Cte \quad ,$$

et

(6.3) si $k'(0) = 0$, alors $(\mu , T) = Cte$.

(6.4) $$I''(\alpha) = (t_2''(\alpha) - t_1''(\alpha))|X| + \frac{2(t_2'(\alpha) - t_1'(\alpha))}{|X|} (\frac{\nabla X}{d\alpha}, X)$$
$$+ \int_{t_1(\alpha)}^{t_2(\alpha)} [\frac{(\frac{\nabla^2}{d\alpha^2} X , X) + (\frac{\nabla X}{d\alpha}, \frac{\nabla X}{d\alpha})}{|X|} - \frac{(\frac{\nabla X}{d\alpha}, X)^2}{|X|^3}] dt \quad .$$

D'après (1.3) et (1.4), on a :

$$\frac{\nabla^2 X}{d\alpha^2} = \frac{\nabla}{d\alpha}\frac{\nabla}{dt} Y = \frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{d\alpha} Y + R(Y , X) Y \quad ,$$

et, pour $\alpha = 0$, on a, d'après (1.5) :

$$(\frac{\nabla}{d\alpha} Y(t , 0) , T)' = (\frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{d\alpha} Y(t , 0) , T) \quad .$$

Finalement :

(6.5) $$I''(0) = (t_2''(0) - t_1''(0))|T| + 2(t_2'(0) - t_1'(0)) \frac{(\mu' , T)}{|T|}$$
$$+ (\frac{\nabla}{d\alpha} Y(t_2 , 0) , T(t_2)) - (\frac{\nabla}{d\alpha} Y(t_1 , 0) , T(t_1))$$
$$+ \int_{t_1}^{t_2} [\frac{(\mu' , \mu') + (R(\mu , T)\mu , T)}{|T|} - \frac{(\mu' , T)^2}{|T|^3}] dt \quad .$$

Utilisons l'hypothèse 6(ii). Posons $\varphi_\varepsilon(\alpha) = V(t_\varepsilon(\alpha) , \alpha)$ ($\varepsilon = 1 , 2$). φ_ε est une courbe de M_ε. On a, en dérivant :

(6.6) $$\frac{d\varphi_\varepsilon}{d\alpha} = X(t_\varepsilon(\alpha) , \alpha)\, t_\varepsilon'(\alpha) + Y(t_\varepsilon(\alpha) , \alpha)$$

(6.7) $$K_\varepsilon(\alpha) = \frac{\nabla}{d\alpha}\frac{d\varphi_\varepsilon}{d\alpha} = 2\, \frac{\nabla X}{d\alpha}(t_\varepsilon(\alpha) , \alpha)\, t_\varepsilon'(\alpha) + \frac{\nabla}{d\alpha} Y(t_\varepsilon(\alpha) , \alpha)$$
$$+ \frac{\nabla}{dt} X(t_\varepsilon(\alpha) , \alpha)\, t_\varepsilon'^2(\alpha) + X(t_\varepsilon(\alpha) , \alpha)\, t_\varepsilon''(\alpha) \quad .$$

Soit, pour $\alpha = 0$, d'après (1.3) :

$$(6.8) \qquad \frac{d\varphi_\varepsilon}{d\alpha}(0) = T(t_\varepsilon)\ t'_\varepsilon(0) + \mu(t_\varepsilon)$$

$$(6.9) \qquad K_\varepsilon(0) = 2\mu'(t_\varepsilon) t'_\varepsilon(0) + \frac{\nabla Y}{d\alpha}(t_\varepsilon , 0) + T(t_\varepsilon)\ t''_\varepsilon(\alpha) \quad .$$

La formule (6.5) s'écrit finalement, compte tenu de (6.9) et de (1.2) :

$$(6.10) \quad I''(0) = \frac{(K_2(0) , T(t_2)) - (K_1(0) , T(t_1))}{|T|} +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{(\mu' , \mu') - R(\mu , T) T , \mu)}{|T|} - \frac{(\mu' , T)^2}{|T|^3} \right] dt \ .$$

(6.11) REMARQUE. - Si $t_2(\alpha) = t_2$ et si $T(t_2) \perp (N_2)_{g(t_2)}$, (6.6) et (6.9) deviennent $\frac{d\varphi_2}{d\alpha} = Y(t_2 , \alpha)$, $K_2(0) = \frac{\nabla Y}{d\alpha}(t_\varepsilon , 0)$. $Y(t_2 , \alpha)$ étant un champ de vecteurs tangents le long de $\varphi(\alpha)$ à N_2 , et $\frac{d\varphi_2}{d\alpha}(0) = Y(t_2 , 0) = \mu(t_2)$, on a :

$$(K_2(0) , T) = (T_g\ \mu , \mu)$$

d'après (2.7).

Si $t_1(\alpha) = t_1$ et si $\varphi_1(\alpha) = g(t_1)$, alors $K_1(0) = 0$.

7. La forme quadratique Q .

Soient $P \in M$, N une sous-variété de M , et g une géodésique normale à N telle que $g(0) = P$, $g(1) \in N$.

On munit M de sa structure d'espace métrique induite par la structure riemannienne, i. e., $d(A , B) = \inf$ des longueurs des arcs de courbes différentiables par morceaux joignant A à B . (La topologie induite par cette métrique est d'ailleurs la même que la topologie initiale).

Pour tout $A \in M$, il existe un nombre $d_A > 0$ tel que si $d(A , B) < d_A$, alors on peut joindre A et B par une géodésique unique (paramétrée par la longueur de l'arc), dont la longueur est égale à $d(A , B)$. Puisque M est complète pour la métrique ci-dessus, la boule fermée de centre P et de rayon $2d(P , g(1))$ (par exemple) est compacte. Il existe donc un nombre $d > 0$, tel que si A et B sont deux points quelconques de la boule, et si $d(A , B) < d$, alors A et B peuvent être joints par une géodésique unique, dont la longueur est égale à $d(A , B)$.

Il existe donc un nombre entier p assez grand, un $\varepsilon > 0$ assez petit et des nombres réels t_ρ ($\rho = 0 , \dots , p+1$), avec $0 \leqslant \tau = t_0 < t_1 < \dots < t_p < t_{p+1} = 1$, où τ est un nombre fixé, tels que $d(A , B) < d$ pour tout A (resp. B) tel que $d(A , g(t_\rho)) < \varepsilon$ (resp. $d(B , g(t_{\rho+1})) < \varepsilon$) ($\rho = 0 , \dots , p$). On fixe p , τ , t_ρ dans toute la suite.

Par les points $g(t_\rho)$ ($0 < \rho \leqslant p$) on fait passer une hypersurface S_ρ non tangente à g en $g(t_\rho)$. On choisit le ε précédent assez petit pour que S_ρ (resp. $N = S_{p+1}$) admette dans la boule fermée de centre $g(t_\rho)$ (resp. $g(1)$) de rayon ε , une représentation paramétrique régulière de la forme

$$m_\rho = \Phi_\rho(z^i_\rho)$$

($i = 1 , \dots , n-1$, $\rho = 1 , \dots , p$) (resp. $i = 1 , \dots , q$ avec $q = \dim N$, $\rho = p+1$) et où $g(t_\rho)$ correspond à $z^i_\rho = 0$.

Soit $z = (z^i_\rho)$. Se donner z , c'est se donner un système (m_ρ) de points avec $m_\rho \in S_\rho$. On a tout fait pour que l'on puisse joindre m_ρ à $m_{\rho+1}$ par une unique géodésique pour $\rho = 0 , \dots , p$. On obtient ainsi une géodésique brisée $u(z)$. On paramètre $u(z)$ proportionnellement à la longueur de l'arc, de façon que

$$\begin{cases} t = \tau & \text{en } g(\tau) \\ t = 1 & \text{sur } N \end{cases} .$$

Si $t_\rho(z)$ désigne la valeur du paramètre au point m_ρ , $s_\rho(z)$ la longueur de l'arc de $u(z)$ calculée à partir de $g(\tau)$, on a :

$$\frac{t - t_\rho(z)}{s(z) - s_\rho(z)} = \frac{1-\tau}{I(z)} = k(z) ,$$

où $I(z)$ désigne la longueur de $u(z)$ entre τ et 1 , $s(z)$ la longueur de $u(z)$ entre τ et t .

(7.1) LEMME. - $\dfrac{\partial I}{\partial z^i_\rho}(0) = 0$ ($i = 1 , \dots , n-1$; $\rho = 1 , \dots , p$, ou $i = 1 , \dots , q$, $\rho = p+1$).

DÉMONSTRATION. - $I(z) = \sum_{\rho=0}^{p} \int_{t_\rho(z)}^{t_{\rho+1}(z)} ds$. On applique (6.1) et (6.6) aux p intégrales qui figurent sous le Σ ; avec un peu de soin, on s'aperçoit que $\dfrac{\partial I}{\partial z^i_\rho}(z) = 0$ si :

1° $u(z)$ est orthogonal à N ;

2° $u(z)$ a un champ de vecteurs tangents continu.

Ceci est justement vérifié pour $z = 0$, car alors $u(z) = g$.

(7.2) DÉFINITION de $Q_\tau(Z)$.

Soit $Z = (Z^i_\rho)$ un système de $(n-1)\,p + q$ nombres réels. On pose :

$$Q_\tau(Z) = \Sigma \frac{\partial^2 I}{\partial z^i_\rho \, \partial z^{i'}_{\rho'}}(0)\, Z^i_\rho\, Z^{i'}_{\rho'} \quad , \quad Q(Z) = Q_0(Z) \quad .$$

Pour $|\alpha|$ assez petit, αZ est un système de paramètres qui représente un système (m_ρ) de points avec $m_\rho \in S_\rho$. On pose alors $I(\alpha) = I(\alpha Z)$. On a, bien entendu,

$$Q_\tau(Z) = \frac{d^2 I}{d\alpha^2}(0) \quad .$$

Pour calculer $Q_\tau(Z)$, on peut appliquer le résultat du paragraphe 6 à chaque portion de courbe $m_\rho\, m_{\rho+1}$, et sommer pour ρ variant de 0 à p ; $m_\rho\, m_{\rho+1}$ étant une géodésique, le champ de vecteurs désigné par μ dans 6, et que l'on désignera ici par η_ρ , est défini pour $t_\rho \leqslant t \leqslant t_{\rho+1}$ et est un champ de Jacobi.

Soit $\varphi_\rho(\alpha) = \Phi_\rho(\alpha Z^i_\rho)$ la courbe décrite par m_ρ dans S_ρ , et $K_\rho = \frac{\nabla}{d\alpha}\frac{d}{d\alpha}\varphi_\rho$. D'après (7.1), on a $\frac{dk}{d\alpha}(\alpha Z) = 0$ pour $\alpha = 0$, donc, d'après (6.3)

$$(\eta'_\rho \, , T) = 0 \quad , \quad (\eta_\rho \, , T) = \mathrm{Cte} \quad .$$

D'après (6.8) :

$$\frac{d\varphi_\rho}{d\alpha}(0) = T(t_\rho)\, t'_\rho(0) + \eta_\rho(t_\rho)$$
$$= T(t_\rho)\, t'_\rho(0) + \eta_{\rho-1}(t_\rho)$$

et, par conséquent :

$$\eta_\rho(t_\rho) = \eta_{\rho-1}(t_\rho) \quad .$$

Si donc η est le champ de vecteurs le long de g tel que

$$\eta \,|\, [t_\rho \, , t_{\rho+1}] = \eta_\rho \quad ,$$

η est un champ <u>continu</u> de vecteurs tel que η' soit continu, sauf peut-être aux points t_ρ , $0 < \rho \leqslant p$.

Un tel champ sera appelé dans la suite un champ de Jacobi <u>brisé</u>. η étant continu, on a $(\eta \, , T) = \mathrm{Cte}$ pour $\tau \leqslant t \leqslant 1$. Comme $m_0 = g(\tau)$ est indépendant de α , $\eta(\tau) = 0$ et par conséquent :

$$(\eta \, , T) = 0 \quad .$$

Enfin, (6.10) donne

$$I''_\rho(0) = \frac{(K_{\rho+1}(0)\ ,\ T(t_{\rho+1})) - (K_\rho(0)\ ,\ T(t_\rho))}{L} + \int_{t_\rho}^{t_{\rho+1}} \frac{(\eta'_\rho\ ,\eta'_\rho) - (R(\eta_\rho\ ,T)\ T\ ,\eta_\rho)}{L}$$

où L désigne la longueur de g comprise entre $g(0)$ et $g(1)$. Finalement :

$$Q_\tau(Z) = \frac{(T_g\ \eta(1)\ ,\ \eta(1))}{L} + \int_0^1 \frac{(\eta'\ ,\ \eta') - (R(\eta\ ,\ T)\ T\ ,\ \eta)}{L}\, dt$$

d'après (6.11).

L'ensemble des champs de Jacobi brisés en $t_1, \dots, t_p$, nuls en 0, tels que $(\eta\ ,\ T) = 0$ et que $\eta(1) \in N_{g(1)}$ forme un espace vectoriel V. On a alors le lemme suivant :

(7.3) LEMME. - L'application $Z \to \eta$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Rappelons d'abord brièvement comment s'introduit le nombre d : sur la géodésique g, les points conjugués (i. e. les points distincts a, b tels qu'il existe un champ de Jacobi η non nul avec $\eta(a) = \eta(b) = 0$) sont isolés (démonstration entièrement analogue à celle de (3.1)). Alors, on cherche un nombre d inférieur ou égal à inf des distances de deux points conjugués sur g (voir (9.6)).

Autrement dit, un champ de Jacobi est parfaitement déterminé par ses valeurs en deux points de g dont la distance est inférieure à d.

Donc, ici, η est déterminé par les valeurs $\eta(t_\rho)$. Or, si V_ρ^i désigne le vecteur tangent à la courbe $\Phi_\rho(0\ ,\ \dots\ ,\ z_\rho^i\ ,\ \dots\ ,\ 0)$ au point $g(t_\rho)$, on a, pour $\rho \neq p+1$:

(7.3.1) $$\eta(t_\rho) = \eta_\rho(t_\rho) = \sum_{i=1}^{n-1} Z_\rho^i\, V_\rho^i + T(t_\rho)\ t'_\rho(0) \quad ,$$

et, pour $\rho = p+1$:

(7.3.2) $$\eta(1) = \sum_{i=1}^{q} Z_{p+1}^i\ V_{p+1}^i \quad .$$

Comme $(\eta\ ,\ T) = 0$, on a $t'_\rho(0) = -\sum_{i=1}^{n-1} Z_\rho^i \dfrac{(V_\rho^i\ ,\ T(t_\rho))}{L^2}$. L'application $Z \to \eta$ est donc linéaire. C'est un isomorphisme, car les V_ρ^i et $T(t_\rho)$ forment une base de $M_{g(t_\rho)}$ pour $\rho < p+1$, et les V_{p+1}^i forment une base de $N_{g(1)}$.

(7.4) PROPOSITION. - Q_τ est dégénérée si et seulement si τ est une valeur focale de N relativement à g ; de plus, le corang de Q_τ est égal à $\lambda(\tau)$ (cf. paragraphe 3). (On appelle corang de la forme quadratique Q_τ la dimension du noyau de la matrice associée à Q_τ).

DÉMONSTRATION. - η_ρ satisfait à l'équation (J_g), $(\eta'_\rho, \eta'_\rho) - (R(\eta, T)T, \eta_\rho) = (\eta, \eta')'$ et, par conséquent :

$$LQ_\tau(Z) = (T_g \eta_p(1) + \eta'_p(1), \eta_p(1)) + \sum_{\rho=1}^{p} (\eta'_{\rho-1}(t_\rho) - \eta'_\rho(t_\rho), \eta_\rho(t_\rho)) \quad .$$

Soit Y^i_ρ le champ de Jacobi brisé en $t_1, \dots, t_p$ qui correspond au vecteur Z dont toutes les composantes sont nulles, sauf $Z^i_\rho = 1$. D'après (7.3), on a :

$$\eta(t, Z) = \Sigma\, Y^i_\rho Z^i_\rho \quad , \quad \eta'(t, Z) = \Sigma\, Y'^i_\rho Z^i_\rho \quad .$$

Par conséquent, si $j = {}^{i'}_{\rho'}$, on a :

$$\frac{\partial}{\partial Z_j} LQ_\tau(Z) = (T_g \eta_p(1) + \eta'_p(1), Y_j(1)) + \sum_{\rho=1}^{p} (\eta'_{\rho+1}(t_\rho) - \eta'_\rho(t_\rho), Y_j(t_\rho)) \quad .$$

Si $Q_\tau(Z)$ est dégénéré, $\frac{\partial}{\partial Z_j} Q_\tau(Z) = 0$ quel que soit j pour un $Z \neq 0$, donc d'après (7.3) pour un $\eta \neq 0$. Mais $(\eta', T) = 0$. Il suffit donc de calculer Y_j Y_j mod T. Mais, d'après (7.3.1),

$$\begin{cases} Y_j(t_\rho) = 0 \bmod T & \text{si } \rho \neq \rho' \quad , \\ Y_j(t_{\rho'}) = V^{i'}_{\rho'} \bmod T & . \end{cases}$$

(V^i_ρ) et T formant une base de $M_{g(t_\rho)}$ pour $\rho \neq p+1$, et (V^i_{p+1}) étant une base de $N_{g(1)}$, on voit que $Q_\tau(Z)$ dégénéré entraîne :

$$\begin{cases} \eta'_{\rho-1}(t_\rho) = \eta'_\rho(t_\rho) \\ T_g \eta_p(1) + \eta'_p(1) \perp N_{g(1)} \quad ; \end{cases}$$

autrement dit : η' est continu, $\eta \neq 0$ et $\eta \in J_g^N(1) \cap \Lambda_g(\tau)$.

Pour conclure, il suffit d'appliquer (7.3).

(7.5) <u>Le théorème sur l'indice</u>.

a. Q <u>est dégénéré si et seulement si</u> 0 <u>est une valeur focale de</u> N <u>relativement à</u> g, <u>et corang</u> $Q = \lambda(0)$.

b. <u>Indice de</u> $Q = \sum_{0 \leq t < 1} \lambda(t)$. ($\sum_{0 \leq t < 1} \lambda(t)$ est un nombre fini d'après (3.1). On l'appelle <u>l'indice</u> du segment $[g(0), g(1)]$ de la géodésique g).

(7.5)a est déjà démontré : il suffit de faire $\tau = 0$ dans (7.4). La démonstration de b est une conséquence de (7.4) et des deux lemmes suivants :

(7.6) Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble des champs de vecteurs continus différentiables par morceaux (i. e. si $\mu \in \mathfrak{M}$, μ' existe et est continu sauf en un nombre fini de points, et en ces points μ' a une limite à gauche et une limite à droite) le long de g . On pose :

$$I_a^b(\mu) = (\theta\mu(b) \ , \mu(b)) + \int_a^b \Omega(\mu \ , \mu') \, dt \quad ,$$

où $\mu \in \mathfrak{M}$, $\Omega(\mu , \mu') = (\mu' , \mu') - (R(\mu , T)\, T , \mu)$, θ étant une transformation linéaire autoadjointe de $M_{g(b)}$.

LEMME 1. - Pour tout a assez voisin de b , il existe un champ de Jacobi unique prenant des valeurs données pour $t = a$ et $t = b$. Pour ces a , soit $\mu \in \mathfrak{M}$ tel que $\mu(a) = \bar{\mu}(a)$, $\mu(b) = \bar{\mu}(b)$ avec $\bar{\mu} \in J_g$; alors :

$$I_a^b(\mu) \geqslant I_a^b(\bar{\mu}) \quad ,$$

l'égalité n'ayant lieu que si $\mu = \bar{\mu}$.

LEMME 2. - Pour tout a assez voisin de b , $I_a^b(\mu) > 0$ pour tous les $\mu \in \mathfrak{M}$ tels que $\mu(a) = 0$, $\mu \neq 0$.

8. Démonstration de (7.5)b.

(8.1) Indice de $Q \leqslant \sum_{0 \leqslant t < 1} \lambda(t)$.

DÉMONSTRATION. - Appliquons le lemme 2 de (7.6) avec $b = 1$, $\theta = T_g$ sur $N_{g(1)}$; $\theta = 0$ sur l'espace supplémentaire orthogonal. Il existe τ_0 , $1 > \tau_0 > 0$; tel que $I_{\tau_0}^1(\mu) > 0$ pour tout $\mu \in \mathfrak{M}$ tel que $\mu \neq 0$, $\mu(\tau_0) = 0$.

Soient t_1 , ... , t_p les valeurs choisies dans le paragraphe 7 pour construire $Q(= Q_0)$, S_ρ les surfaces correspondantes. On construit alors Q_τ avec les valeurs $t_1 \tau$, ... , $t_p \tau$ et des surfaces $S_\rho(\tau)$ dont le plan tangent en $g(t_\rho \tau)$ est obtenu à partir du plan tangent en $g(t_\rho)$ à S_ρ par transport parallèle le long de g .

Q_τ est une forme quadratique dont les coefficients sont des fonctions continues de τ pour $0 \leqslant \tau < 1$. Pour $\tau = \tau_0$, Q_{τ_0} est définie positive d'après (7.2) et (7.3) ; l'indice de Q_{τ_0} est donc nul. Or, quand τ varie de τ_0 à 0 , l'indice de Q_τ ne peut varier que lorsque τ passe par une valeur τ_1 pour laquelle Q_{τ_1} est dégénérée, la variation de l'indice étant alors au plus égale au corang de Q_{τ_1} . D'où le résultat en appliquant (7.4).

(8.2) <u>Indice de</u> $Q \geqslant \sum_{0 \leqslant t < 1} \lambda(t)$.

S'il n'y a pas de points focaux, le raisonnement de (8.1) montre que l'indice est nul, et (7.5)b est démontré dans ce cas.

Supposons maintenant qu'il y ait effectivement des points focaux, et soient $0 \leqslant x_1 < \dots < x_\ell < 1$ les valeurs focales correspondantes. Un raisonnement par continuité analogue à celui de (8.1) montre que l'on peut supposer les t_ρ différents des x_i . On peut même supposer que les t_ρ <u>séparent</u> les x_i ; en effet, on a le lemme suivant :

LEMME. - <u>L'indice de</u> Q <u>est indépendant du nombre des points de subdivision</u> t_ρ , <u>pourvu que</u> $d(g(t_\rho) , g(t_{\rho+1})) < d$.

Pour chaque x_i , soit $(\eta_{i,j})$ une base de $\Lambda_g(x_i) \cap J_g^N(1)$ ($1 \leqslant j \leqslant \lambda(x_i)$); $\eta_{i,j}$ étant un champ de Jacobi, $(\eta_{i,j} , T)$ est une fonction linéaire de t . Cette fonction étant nulle en x_i (car $\eta_{i,j}(x_i) = 0$) et en 1 (d'après (2.8)), on a $(\eta_{i,j} , T) = 0$.

Soit $\mu_{i,j}$ ($1 \leqslant i \leqslant \ell$, $1 \leqslant j \leqslant \lambda(x_i)$) le champ de vecteurs le long de g défini par

$$\mu_{i,j} = \begin{cases} \eta_{i,j} & \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant x_i \\ 0 & \text{pour } x_i \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} .$$

On a encore $(\mu_{i,j} , T) = 0$, et, par conséquent, les $\mu_{i,j}(t)$ définissent un unique élément de V (notation de (7.2)), qui définit à son tour un unique vecteur $Z_{i,j}$ d'après (7.3). Les vecteurs $Z_{i,j}$ sont au nombre de

$$\lambda(x_1) + \dots + \lambda(x_\ell) = \sum_{0 \leqslant t < 1} \lambda(t) .$$

Pour démontrer (8.2), il suffit de montrer que Q est définie négative sur un sous-espace vectoriel à $\sum_{0 \leqslant t < 1} \lambda(t)$ dimensions:

a. <u>Les vecteurs</u> $Z_{i,j}$ <u>sont linéairement indépendants</u>. - En effet, supposons que $\Sigma a_{i,j} Z_{i,j} = 0$ et soit $\mu = \Sigma a_{i,j} \mu_{i,j}$. Comme $(\mu , T) = 0$, les formules (7.3.1) et (7.3.2) montrent que

$$\mu(t_\rho) = 0 \qquad \text{pour tout } \rho , \qquad 0 \leqslant \rho \leqslant p + 1 .$$

Soit alors k le plus grand entier tel que $t_k < x_\ell$. Comme les t_ρ séparent les x_i , il n'y a pas de valeurs focales entre t_k et x_ℓ , et par conséquent, sur $[t_k , x_\ell]$, $\mu = \sum_j a_{\ell,j} \eta_{\ell,j}$. Donc μ est un champ de Jacobi <u>non brisé</u> ; or, ce champ est nul en t_k (car $\mu(t_k) = 0$) et en x_ℓ (car $\eta_{\ell,j}$ s'annule en x_ℓ par définition). Donc $\mu \equiv 0$, puisque $d(g(t_k) , g(x_\ell)) < d(g(t_k) , g(t_{k+1})) < d$. Comme les $\eta_{\ell,j}$ sont linéairement indépendants, les $a_{\ell,j}$ sont tous nuls ; même raisonnement pour $\ell - 1$, etc.

b. Q <u>est définie négative sur l'espace vectoriel engendré par les</u> $Z_{i,j}$. – Soit μ une combinaison linéaire des $\mu_{i,j}$ (à coefficients constants) ; μ est un champ de Jacobi brisé en $x_1 , \dots , x_\ell$, et, par conséquent, dans l'intervalle $]x_i \; x_{i+1}[$, on a $\Omega(\mu , \mu') = (\mu , \mu')$. Donc

$$I_0^1(\mu) = (T_g \, \mu(1) + \mu'(1) , \mu(1)) + \sum_i (\mu , \mu') \Big|_{x_i+0}^{x_i-0} \quad ;$$

le terme avant le Σ est nul d'après (2.8).

En x_ℓ , $\mu(x_\ell) = 0$, donc, dans le Σ , n'interviennent que des $i < \ell$.

En $x_{\ell-1}$:

- pour calculer $\mu(x_{\ell-1})$, seuls interviennent les $\eta_{\ell,j}$;
- pour calculer $\mu'(x_{\ell-1} + 0)$, seuls interviennent les $\eta'_{\ell,j}$;
- pour calculer $\mu'(x_{\ell-1} - 0)$, seuls interviennent les $\eta'_{\ell,j}$ et les $\eta'_{\ell-1,j}$.

Donc, dans le calcul de $(\mu , \mu')\Big|_{x_{\ell-1}+0}^{x_{\ell-1}-0}$, les $\eta'_{\ell,j}$ s'éliminent, et il reste une combinaison linéaire de termes du type :

$$(\eta_{\ell,j}(x_{\ell-1}) , \eta'_{\ell-1,h}(x_{\ell-1})) \quad ;$$

mais, d'après (2.8), corollaire 2, ceci est égal à :

$$(\eta'_{\ell,j}(x_{\ell-1}) , \eta_{\ell-1,h}(x_{\ell-1})) \quad ,$$

qui est nul, puisque $\eta_{\ell-1}(x_{\ell-1}) = 0$ par définition des η .

En poursuivant ce raisonnement, on voit que finalement

$$I_0^1(\mu) = 0 \quad \text{pour toute combinaison linéaire des } \mu_{i,j} \text{ .}$$

Soit maintenant $Z = \Sigma a_{i,j} Z_{i,j}$, $\mu = \Sigma a_{i,j} \mu_{i,j}$, η le vecteur de V qui correspond à Z par l'isomorphisme (7.3). $LQ(Z) = I_0^1(\eta)$, et, par définition des $Z_{i,j}$, $\mu(t_\rho) = \eta(t_\rho)$ pour tout ρ . Or :

$$\begin{cases} \mu' & \text{est discontinu aux points } \mu_i \text{ ,} \\ \eta' & \text{est discontinu aux points } t_\rho \text{ .} \end{cases}$$

Donc, dans l'intervalle $]t_\rho , t_{\rho+1}[$, η est un champ de Jacobi non brisé, et, par conséquent, d'après le lemme 1 de (7.6),

$$I_{t_\rho}^{t_{\rho+1}}(\mu) \geqslant I_{t_\rho}^{t_{\rho+1}}(\eta) \qquad ,$$

l'égalité n'ayant lieu que si μ' est continu dans $]t_\rho , t_{\rho+1}[$, ce qui n'a lieu que s'il n'y a pas de valeur focale dans cet intervalle. Comme on a supposé qu'il y avait effectivement des valeurs focales, on a :

$$I_0^1(\mu) > I_0^1(\eta) = LQ(Z) \qquad .$$

Mais on a vu que $I_0^1(\mu) = 0$. (7.5)b est donc complètement démontré.

(8.3) DÉMONSTRATION du lemme (8.2). - Considérons les deux subdivisions $(t_1 , \dots t_{\rho_0} , t_{\rho_0+1} , \dots , t_p)$ et $(t_1 , \dots , t_{\rho_0} , t_k , t_{\rho_0+1} , \dots , t_p)$ satisfaisant aux conditions du lemme ; soit Q la forme quadratique calculée avec la première, $\overline{Q}$ la forme quadratique calculée avec la seconde ; soit H un sous-espace vectoriel sur lequel Q est définie négative ; si $Z \in H$ et si η correspond à Z par l'isomorphisme (7.3), $\eta(t_k)$ est parfaitement déterminé, et le champ η définit donc un vecteur $\overline{Z}$ dans l'espace vectoriel sur lequel est définie $\overline{Q}$, toujours d'après (7.3). La correspondance ainsi définie $Z \to \overline{Z}$ est un isomorphisme. Comme de plus

$$LQ(Z) = I_0^1(\eta) = L\overline{Q}(\overline{Z}) \qquad ,$$

on en déduit que l'indice de $\overline{Q}$ est supérieur ou égal à celui de Q . Soit maintenant $\overline{H}$ un sous-espace vectoriel sur lequel $\overline{Q}$ est définie négative ; si $\overline{Z} \in \overline{H}$ et si $\overline{\eta}$ correspond à $\overline{Z}$ par l'isomorphisme (7.3), on définit un champ η par les valeurs $\eta(t_\rho) = \overline{\eta}(t_\rho)$ pour $\rho \neq k$, et, par conséquent, un vecteur Z dans l'espace vectoriel sur lequel est définie Q . Comme $\eta = \overline{\eta}$ sauf sur $[t_{\rho_0} , t_{\rho_0+1}]$, que $\overline{\eta}(t_{\rho_0}) = \eta(t_{\rho_0})$, $\overline{\eta}(t_{\rho_0+1}) = \eta(t_{\rho_0+1})$, que sur cet intervalle $\overline{\eta}$ est brisé (peut-être) en t_k , alors que η est non brisé, on a, d'après le lemme 1 de (7.6),

$$0 > L\overline{Q}(\overline{Z}) = I_0^1(\overline{\eta}) \geqslant I_0^1(\eta) = LQ(Z) \qquad .$$

Si on arrive à montrer que la correspondance $\overline{Z} \to Z$ est un isomorphisme, on en déduira que l'indice de $\overline{Q}$ est inférieur ou égal à celui de Q , et le lemme sera démontré.

Vu la définition de η à parti de $\overline{\eta}$, il suffit de démontrer que l'on ne peut pas avoir deux champs $\overline{\eta} \neq \overline{\mu}$ correspondant à des vecteurs de $\overline{H}$ avec $\overline{\eta}(t_\rho) = \overline{\mu}(t_\rho)$ pour tous les $\rho \neq k$. Or, s'il existait deux tels champs, le champ

$\overline{\eta} - \overline{\mu} = \overline{h}$ correspondrait à un vecteur de $\overline{H}$ par l'isomorphisme (7.3), et $\overline{h}$ serait nul en dehors de l'intervalle $[t_{\rho_0}, t_{\rho_0+1}]$ et non identiquement nul sur cet intervalle. On aurait d'une part :

$$0 > I_0^1(\overline{h}) = I_{t_{\rho_0}}^{t_{\rho_0+1}}(\overline{h}) \qquad ,$$

et d'autre part :

$$I_{t_{\rho_0}}^{t_{\rho_0+1}}(\overline{h}) > 0$$

d'après le lemme 1 de (7.6), puisque l'unique champ de Jacobi nul en t_{ρ_0} et t_{ρ_0+1} est le champ nul. D'où une contradiction.

9. Démonstration des lemmes (7.6).

On reprend les notations de (7.6), et on considère pour les $\mu \in \mathfrak{M}$ la fonctionnelle

$$I_a^b(\mu, \lambda) = (\theta\mu(b), \mu(b)) + \int_a^b [\Omega(\mu, \mu') - \lambda(\mu, \mu')]\, dt \qquad ,$$

où λ est un nombre réel.

(9.1) LEMME. - Si $\overline{\mu}$ donne une valeur minimum à la fonctionnelle $I_a^b(\mu, \lambda)$ (λ fixé) quand μ décrit l'ensemble des éléments de $\mathfrak{M}$ tels que $\mu(a)$ soit fixé, on a nécessairement :

$$\begin{cases} \overline{\mu}' \text{ est continu et dérivable,} \\ \overline{\mu}'' + R(\overline{\mu}, T)\, T + \lambda\overline{\mu} = 0 \,, \\ \theta\overline{\mu}(b) + \overline{\mu}'(b) = 0 \,. \end{cases}$$

Si $\overline{\mu}$ donne une valeur minimum à la fonctionnelle $I_a^b(\mu, \lambda)$ ($\theta = 0$, λ fixé) quand μ décrit l'ensemble des éléments de $\mathfrak{M}$ tels que $\mu(a)$ et $\mu(b)$ soient fixés, on a nécessairement :

$$\begin{cases} \overline{\mu}' \ \underline{\text{est continu et dérivable}} \\ \overline{\mu}'' + R(\overline{\mu}, T)\, T + \lambda\overline{\mu} = 0 \end{cases}$$

(ce lemme est une adaptation "vectorielle" des classiques conditions d'Euler, et du lemme de Du Bois-Reymond).

DÉMONSTRATION. - Soit $x(t, \alpha) \in \mathfrak{M}$ un champ dépendant différentiablement d'un paramètre α tel que

$$x(t, 0) = \overline{\mu} \quad , \qquad x(a, \alpha) = \overline{\mu}(a) \qquad .$$

On écrira x' au lieu de $\frac{\nabla x}{dt}$, et on a $\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \frac{\partial x'}{\partial \alpha}$. On a :

$$I'(0) = 2(\Theta\mu(b)\ ,\ \frac{\partial x}{\partial \alpha}(b\ ,\ 0)) + 2\int_a^b [(\frac{\partial x'}{\partial \alpha}\ ,\ \bar{\mu}') - (R(\bar{\mu}\ ,\ T)\ T\ ,\ \frac{\partial x}{\partial \alpha} - \lambda(\mu\ ,\frac{\partial x}{\partial \alpha})]\, dt$$

où, sous la signe somme, $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial x'}{\partial \alpha}$ sont pris pour $\alpha = 0$.

Soit Φ "la primitive covariante" de $-R(\bar{\mu}\ ,\ T)\ T - \lambda\bar{\mu}$, nulle en a, i. e; le champ le long de g tel que $\Phi(0) = 0$, $\Phi' = -R(\bar{\mu}\ ,\ T) - \lambda\bar{\mu}$. Une intégration par parties et $\frac{\partial a}{\partial \alpha}(a\ ,\ 0) = 0$ donnent

$$I'(0) = 2(\Theta\bar{\mu}(b) + \Phi(b)\ ,\ \frac{\partial x}{\partial \alpha}(b\ ,\ 0)) + 2\int_a^b(\bar{\mu}' - \Phi\ ,\ \frac{\partial x'}{\partial \alpha}(t\ ,\ 0))\, dt \quad .$$

Si $\bar{\mu}$ rend minimum I_a^b, on a nécessairement $I'(0) = 0$ pour tous les champs $x(t\ ,\ \alpha)$, donc en particulier pour tous ceux pour lesquels $\frac{\partial x}{\partial \alpha}(b\ ,\ 0) = 0$. Autrement dit, pour tout $\omega \in \mathbb{M}$ tel que $\omega(a) = \omega(b) = 0$, on doit avoir

$$\int_a^b(\bar{\mu}' - \Phi\ ,\ \omega')\, dt = 0 \quad .$$

Ceci entraîne $\bar{\mu}' - \Phi = B^*$, où B^* est à dérivée covariante nulle. En effet, soit K la primitive covariante de $\bar{\mu}' - \Phi$ le long de g, nulle pour $a = 0$; on pose $B = K(b)$, et B^* désigne le champ le long de g obtenu par transport parallèle à partir de B. On pose $\omega = K - \frac{t - a}{b - a} B^*$; on a $\omega(a)$ et $\omega(b) = 0$; de plus

$$0 = \int_a^b(\bar{\mu}' - \Phi,\ \omega')dt = \int_a^b(\bar{\mu}' - \Phi - B^*\ ,\ \bar{\mu}' - \Phi - B^*)\, dt$$

C. Q. F. D.

Mais $\bar{\mu}' = \Phi + B^*$ montre que $\bar{\mu}'$ est continu et dérivable, car Φ et B^* ont ces propriétés ; par conséquent, $\bar{\mu}'' + R(\bar{\mu}\ ,\ T)\ T + \lambda\bar{\mu} = 0$. Mais alors

$$I'(0) = 2(\Theta\bar{\mu}(b) + \bar{\mu}'(b)\ ,\ \frac{\partial x}{\partial \alpha}(b\ ,\ 0)) = 0 \quad \text{quel que soit } \frac{\partial x}{\partial \alpha}(b\ ,0),$$

d'où le lemme.

REMARQUE. - Si on impose, de plus, la condition $\bar{\mu}(b) \in N_{g(b)}$, où N est une sous-variété normale à g, on retrouve (pour $\lambda = 0$) les conditions de (2.8), ce qui fournit une interprétation géométrique de $J_g^N(b)$.

(9.2) LEMME. - <u>Pour tout</u> a <u>assez voisin de</u> b, <u>il existe une solution et une seule de l'équation différentielle</u> (J_g^λ) $\mu'' + R(\mu\ ,\ T)\ T + \lambda\mu = 0$ <u>qui prend des valeurs données en</u> a <u>et en</u> b. <u>Pour ces</u> a, <u>le résultat précédent est encore valable quand</u> λ <u>varie dans un intervalle assez petit</u>.

DÉMONSTRATION. - Les solutions de l'équation J_g^λ nulles en b forment un espace vectoriel à n dimensions. Soit $\mu_1, \dots, \mu_n$ une base de cet espace ; alors $\mu_1'(b), \dots, \mu_n'(b)$ sont linéairement indépendants, car sinon il existerait une combinaison linéaire à coefficients non nuls μ des μ_i telle que $\mu'(b) = 0$; mais, comme $\mu(b) = 0$, on aurait $\mu = 0$, ce qui est incompatible avec le fait que les μ_i forment une base. On considère un repère qui varie continuement avec t sur g, et on pose

$$D(t) = \mathrm{Det}(\mu_1(t), \dots, \mu_n(t)) \quad ;$$

alors $D(t_0) = 0$ si et seulement s'il existe une solution nulle en b et en t_0. Compte tenu du fait que $\mathrm{Det}(\mu_1'(b), \dots, \mu_n'(b)) \neq 0$, on démontre que de telles valeurs t_0 sont <u>isolées</u>, par un raisonnement analogue à celui de (3.1). Il existe donc une valeur a_0 telle que, pour $a_0 < a < b$, $D(t) \neq 0$ pour $a \leq t < b$. Pour ces t, $\mu_1(t), \dots, \mu_n(t)$ forment une base de l'espace vectoriel $M_{g(t)}$, et le seul champ de vecteurs nul en a et b est le champ nul.

L'ensemble de ces champs prenant une valeur $\mu_0(b)$ en b est de la forme

$$\mu = \mu_0 + \sum_{i=1}^{n} k_i \mu_i \qquad \text{avec} \qquad k_i \in \mathbb{R} \quad .$$

Comme les vecteurs $\mu_i(a)$ sont linéairement indépendants, il existe un et un seul champ de vecteurs prenant la valeur $\mu_0(b)$ en b et une valeur fixée en a. Les μ_i étant des fonctions continues de λ, le lemme est complètement démontré.

(9.3) LEMME. - <u>Pour les</u> a <u>du lemme précédent, soit</u> $\bar\mu$ <u>une solution de</u> J_g^λ <u>et</u> $\mu \in \mathfrak{M}$ <u>tel que</u> $\mu(a) = \bar\mu(a)$ <u>et</u> $\mu(b) = \bar\mu(b)$. <u>Alors</u>

$$I_a^b(\mu, \lambda) \geq I_a^b(\bar\mu, \lambda) \quad ,$$

l'égalité n'ayant lieu que pour $\mu = \bar\mu$ ($\theta = 0$). (En particulier, faisons $\lambda = 0$: (9.2) et (9.3) démontrent le lemme 1 de (7.6)).

DÉMONSTRATION. - Soit a vérifiant les conditions du lemme, ces conditions sont encore vérifiées pour un $\tau < a$ assez voisin de a. On considère l'ensemble des solutions de J_g^λ telles que $\mu(\tau) = \bar\mu(\tau)$. On a vu dans (9.2) que ces solutions peuvent s'écrire :

$$\mu = \mu_0 + k_1 \mu_1 + \dots + k_n \mu_n \quad , \qquad \text{avec} \quad k_i \in \mathbb{R} \quad ,$$

$\mu_0(\tau) = \bar\mu(\tau)$, $\mu_i(\tau) = 0$; les $\mu_i(t_0)$ forment une base de l'espace vectoriel $M_{g(t_0)}$ pour tous les t_0 avec $\tau < t_0 \leq b$. Si donc η est un champ de vecteurs $\in \mathfrak{M}$, il existe un système unique de fonctions $k_i(t)$ telles que:

$$\eta(t) = \mu_0(t) + \Sigma\, k_i(t)\, \mu_i(t) \quad ,$$

les k_i étant différentiables par morceaux, pour $\tau + \varepsilon < t < b + \varepsilon$, ε assez petit, $\tau + \varepsilon < a$.

De plus, si γ est un chemin de $]\tau + \varepsilon , b + \varepsilon[\times \underset{\sim}{R}^n$, on vérifie sans peine que l'intégrale

$$J_\gamma = \int_\gamma [\Omega(\mu , \frac{\nabla\mu}{dt}) - \lambda(\mu , \mu)] \, dt + 2 \sum_{i=1}^{n} (\frac{\nabla\mu}{dt} , \frac{\partial\mu}{\partial k_i}) \, dk_i$$

ne dépend que de l'origine et de l'extrémité de γ (intégrale de Hilbert) ($\frac{\nabla\mu}{dt}$ désigne l'expression $\mu_0' + \sum_{i=1}^{n} k_i \mu_i'$).

. Soit $\eta \in \mathfrak{M}$ un champ tel que $\eta(a) = \bar{\mu}(a)$, $\eta(b) = \bar{\mu}(b)$;

η définit dans $]\tau + \varepsilon , b + \varepsilon[\times \underset{\sim}{R}^n$ un chemin γ d'équations paramétriques $t , k_1(t) , \ldots , k_n(t)$.

$\bar{\mu}$ définit dans $]\tau + \varepsilon , b + \varepsilon[\times \underset{\sim}{R}^n$ un chemin $\bar{\gamma}$ d'équations paramétriques $t , \bar{k}_1 , \ldots , \bar{k}_n$, les $\bar{k}_i$ étant constants.

γ et $\bar{\gamma}$ ayant mêmes extrémités pour $t \in [a , b]$, on a $J_\gamma = J_{\bar{\gamma}}$. Mais, d'une part

$$J_{\bar{\gamma}} = I_a^b(\bar{\mu} , \lambda) \quad ,$$

et d'autre part

$$J_\gamma = \int_a^b [\Omega(\eta , \frac{\nabla\mu}{dt}) - \lambda(\eta , \eta) + 2(\frac{\nabla\mu}{dt} , \eta' - \frac{\nabla\mu}{dt})] \, dt \quad .$$

Donc :

$$I_a^b(\eta , \lambda) - I_a^b(\mu , \lambda) = \int_a^b [\Omega(\eta , \eta') - \Omega(\eta , \frac{\nabla\mu}{dt}) - 2(\frac{\nabla\mu}{dt} , \eta' - \frac{\nabla\mu}{dt})] \, dt$$

$$= \int_a^b (\eta' - \frac{\nabla\mu}{dt} , \eta' - \frac{\nabla\mu}{dt}) \, dt \geqslant 0 \quad ,$$

l'égalité n'ayant lieu que pour $\eta' = \frac{\nabla\mu}{dt}$, ce qui entraîne $k_i(t) = Cte$ pour $a \leqslant t \leqslant b$, donc $k_i(t) = \bar{k}_i$ puisque $\eta(a) = \bar{\mu}(a)$.

(9.4) LEMME. - <u>Quels que soient</u> a <u>et</u> b , <u>il existe un nombre</u> λ_* <u>tel que, si</u> $\lambda \leq \lambda_*$, <u>on ait</u> $I_a^b(\mu , \lambda) > 0$ <u>pour tous les</u> $\mu \in \mathfrak{M}$, $\mu \neq 0$, $\mu(a) = 0$.

DÉMONSTRATION. - Il existe un nombre $c > 0$ tel que :

$$(\theta\mu(b) , \mu(b)) > - c(b - a)(\mu(b) , \mu(b)) \quad \text{pour tout } \mu(b) \in M_{g(b)} \quad ,$$

et

$$(\mu(b) , \mu(b)) = \frac{1}{b - a} \int_a^b 2(\mu , \mu') \, dt \quad .$$

Donc

$$I_a^b(\mu , \lambda) > \int_a^b [- 2c(\mu , \mu') + (\mu' , \mu') - (R(\mu , T) T , \mu) - \lambda(\mu , \mu)] \, dt \quad .$$

Il existe un nombre $k > 0$ tel que, sur le compact $a \leqslant t \leqslant b$,

$$(R(\mu , T) T , \mu) > - k(\mu , \mu)$$

puisque les coefficients de R sont des fonctions continues de t . Pour démontrer le lemme, il suffit donc de démontrer que, pour $\lambda < \lambda_*$,

$$- 2c(\mu , \mu') + (\mu' , \mu') - \lambda(\mu , \mu) > 0 \quad .$$

Or, si on pose $X = \sqrt{(\mu , \mu)}$, $Y = \sqrt{(\mu' , \mu')}$, on a $(\mu , \mu') < X.Y$, et par conséquent, l'inégalité est vérifiée pour $c^2 + \lambda < 0$.

(9.5) DÉMONSTRATION du lemme de (7.6).

a. Soit $a_0 < b$, et soit λ_* le nombre défini dans (9.4) pour $a = a_0$. Quel que soit a tel que $a_0 < a < b$, $I_a^b(\mu , \lambda) > 0$ pour les $\mu \in \mathfrak{M}$ tels que $\mu(a) = 0$, $\mu \neq 0$ (on prend $\mu = 0$ entre a_0 et a).

b. <u>Pour tout</u> a <u>suffisamment voisin de</u> b , <u>et</u> $\lambda \leqslant 0$, $\mu = 0$ <u>est la seule solution du système</u> :

(1) $\mu'' + R(\mu , T) T + \lambda\mu = 0$,

(2) $\mu'(b) + \theta\mu(b) = 0$,

(3) $\mu(a) = 0$.

DÉMONSTRATION. - Pour $\lambda < \lambda_*$, $I_a^b(\mu , \lambda) > 0$ pour $\mu \neq 0$ vérifiant (3) d'après a . Or, si μ est solution de (1), (2), (3), $I_a^b(\mu , \lambda) = 0$. Donc $\mu = 0$ est la seule solution de (1), (2), (3) pour $\lambda < \lambda_*$.

Supposons maintenant $\lambda_* \leqslant \lambda \leqslant 0$. Les solutions de (1) et (2) forment un espace vectoriel à n dimensions. On en prend une base $\eta_i(t , \lambda)$, ($i = 1 , \dots , n$), les η_i étant des fonctions continues de λ d'après (1). On considère un repère qui varie continuement le long de g , et on forme

$$D(t , \lambda) = \mathrm{Det}(\eta_1(t , \lambda) , \dots , \eta_n(t , \lambda))$$

sur ce repère. $D(t , \lambda)$ est une fonction continue de t et λ . De plus,

$$D(b , \lambda) \neq 0 \qquad \text{quel que soit } \lambda \quad ;$$

en effet, si $D(b , \lambda) = 0$, il existe une combinaison linéaire des η_i à coefficients constants, soit μ , telle que $\mu(b) = 0$; mais, d'après (2), on a $\mu'(b) = 0$, ce qui est impossible, car alors μ est nul, contrairement à l'hypothèse suivant laquelle les η_i forment une base. Il existe donc un a_1 assez voisin de b tel que sur le compact

$$\lambda_* \leqslant \lambda \leqslant 0 \quad , \quad a_1 \leqslant t \leqslant b \quad ,$$

on ait :

$$D(t , \lambda) \neq 0$$

Or $D(t_0 , \lambda) = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait une solution $\mu \neq 0$ vérifiant (1), (2), (3) avec $a = t_0$. b est donc démontré pour tous les $a \in [a_1 , b[$.

c. Soit $a \in [a_1 , b[$ vérifiant de plus les conditions du lemme (9.3) pour tous les $\lambda \in [\lambda_* , 1]$, où λ_* est le nombre défini dans a. (Un tel a existe d'après (9.2) et (9.3), puisque $[\lambda_* , 1]$ est compact). Soit $\lambda_0 = \sup \lambda | I_a^b(\mu , \lambda) > 0$ pour tout $\mu \in \mathfrak{M}$, $\mu \neq 0$, $\mu(a) = 0$.

Pour démontrer le lemme (7.6)2, il suffit de montrer que $\lambda_0 > 0$. Supposons que $\lambda_0 \leqslant 0$. Comme I_a^b est continue en λ , on a :

$$I_a^b(\mu , \lambda_0) \geqslant 0 \quad \text{pour } \mu \in \mathfrak{M} \quad , \mu \neq 0 , \mu(a) = 0 \; .$$

Supposons qu'il existe un $\bar\mu$ tel que $\bar\mu \neq 0$, $\bar\mu(a) = 0$ et tel que $I_a^b(\bar\mu, \lambda_0) = 0$; $\bar\mu$ rend I_a^b minimum, donc, d'après (9.1), $\bar\mu$ vérifie les conditions (1), (2), (3) de b ; mais alors, d'après b, $\bar\mu$ devrait être nul, puisque $\lambda_0 \leqslant 0$. Par conséquent, un tel μ n'existe pas et on a

$$I_a^b(\mu , \lambda_0) > 0 \quad \text{pour } \mu \in \mathfrak{M} , \mu \neq 0 , \mu(a) = 0 \; .$$

Soit $\mu \in \mathfrak{M}$, $\mu \neq 0$, $\mu(a) = 0$, et soit $\bar\mu$ la solution de (1) avec $\lambda = \lambda_0$, nulle pour $t = a$, égale à $\mu(b)$ pour $t = b$ ($\bar\mu$ existe et est unique d'après (9.2) d'après le choix de a). On a :

$$I_a^b(\mu , \lambda_0) \geqslant I_a^b(\bar\mu , \lambda_0)$$

d'après (9.3).

$\bar\mu$ décrit un espace vectoriel à n dimensions quand μ varie, et si on impose de plus la condition $(\bar\mu(b) , \bar\mu(b)) = 1$ (ce qui revient à multiplier $I_a^b(\bar\mu , \lambda_0)$ par une constante > 0), $I_a^b(\bar\mu , \lambda)$ est une fonction continue de $\bar\mu$, λ , où $\bar\mu$ décrit un <u>compact</u>. Cette fonction étant positive quel que soit $\bar\mu$ pour $\lambda = \lambda_0$, elle reste positive pour λ voisin de λ_0 , en particulier pour un $\lambda_1 > \lambda_0$. Mais alors, d'après (9.3), on aurait $I_a^b(\mu , \lambda_1) > 0$ pour tout $\mu \in \mathfrak{M}$, $\mu \neq 0$, $\mu(a) = 0$, ce qui est impossible puisque $\lambda_1 > \lambda_0$.

(9.6) <u>Retour sur la définition de</u> d_A (cf. paragraphe 7).

a. Il est clair, sur la définition de la métrique de M , que la topologie induite par cette métrique coïncide avec la topologie initiale de M .

b. Soit $A \in M$, U_A un voisinage de A muni de coordonnées x^i $(i = 1 , \ldots , n)$ nulles en A avec $|x^i| \leqslant k$. Dans U_A , l'équation des géodésiques peut s'écrire (paramétrées proportionnellement à la longueur de l'arc à partir de A)

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Sigma \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0 \qquad ,$$

et les solutions de cette équation passant par A sont parfaitement déterminées par la tangente à l'origine, donc par $\frac{dx^i}{dt}(0) = \alpha^i_0$. Dans un voisinage de (α^i) , ces solutions peuvent s'écrire :

$$x^i(t , \alpha^1 , \ldots , \alpha^n)$$

x^i étant une fonction différentiable de $t , \alpha^1 , \ldots , \alpha^n$, telle que

$$x^i(0 , \alpha^1 , \ldots , \alpha^n) = 0 \qquad , \qquad \frac{dx^i}{dt}(0 , \alpha^1 , \ldots , \alpha^n) = 0 \qquad .$$

Soit η_j le champ de vecteurs de coordonnées $\frac{\partial x^i}{\partial \alpha^j}$ ($\alpha^1 , \ldots , \alpha^n$ fixés). Comme $\eta^!_j(0)$ est le vecteur dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la j-ième qui vaut 1 , les n vecteurs $\eta^!_j(0)$ forment une base de M_A . On en déduit que les n champs η_j (qui sont des champs de Jacobi) forment une base de J_g , où g est la géodésique définie par $(\alpha^1 , \ldots , \alpha^n)$. Or, pour $\alpha^1_0 , \ldots , \alpha^n_0$, il existe un nombre a assez voisin de 0 tel que $\eta_1(t), \ldots , \eta_n(t)$ soient linéairement indépendants pour tout $0 < t \leqslant a$. Donc, pour tout $0 < t \leqslant a$, le déterminant

$$D(\frac{\partial x^i}{\partial \alpha^j}(t , \alpha^1_0 , \ldots , \alpha^n_0)) \neq 0 \qquad ,$$

et, d'après le théorème des fonctions implicites, on peut résoudre les équations

$$x^i(t , \alpha^1 , \ldots \alpha^n) = b^i$$

pour tous les b^i appartenant à un voisinage assez petit de $x^i(t , \alpha^1_0 , \ldots , \alpha^n_0)$. Mais, pour les mêmes valeurs de t , $D(\frac{\partial x^i}{\partial \alpha^j} (t , \alpha^1 , \ldots , \alpha^n)) \neq 0$ pour des $\alpha^1 , \ldots , \alpha^n$ assez voisins des $\alpha^1_0 , \ldots , \alpha^n_0$. Donc le a précédent est encore valable pour ces géodésiques. On déduit de ce qui précède qu'il existe un voisinage $V_A \subset U_A$ tel que, quel que soit $B \in V_A$, il existe une géodésique unique dans U_A joignant A à B .

c. On désigne par Ω l'ensemble des courbes issues de A , tracées dans U_A , paramétrées proportionnellement à la longueur de l'arc à partir de A , pour

$0 \leq t \leq 1$. On munit Ω de la métrique :

$$d(u , v) = \sup_{0 \leq t \leq 1} \delta(u(t) , v(t)) , \qquad \delta = \sqrt{\Sigma(u^i - v^i)^2} \quad .$$

Soit alors d_A un nombre > 0 tel que la boule de centre A et de rayon d_A (pour la métrique de M) soit contenue dans V_A (ce qui est possible d'après a). Soit B un point de cette boule. Toute courbe joignant A à B et de longueur $\leq d_A$ est tracée dans V_A , donc, quitte à changer de représentation paramétrique, est un élément de Ω . Mais ces éléments de Ω forment un ensemble compact pour la topologie de Ω associée à sa métrique, d'après le théorème d'Ascoli, puisque U_A est un espace métrique complet pour δ . Soit $L(u)$ la longueur de l'arc de courbe u pour t variant de 0 à 1 ; L est une fonction semi-continue inférieurement et, sur le compact précédent, elle atteint sa borne inférieure. Il existe donc une courbe u joignant A à B et de longueur minimum. C'est donc une géodésique. Mais, d'après b , cette géodésique est unique ; d_A a bien les propriétés demandées.

(9.7) En utilisant le lemme 2 de (7.6), on montre de même que si $d(A , N)$ est assez petit (où N désigne une sous-variété de M), il existe une unique géodésique, paramétrée par la longueur de l'arc, issue de A , de longueur $d(A , N)$; cette géodésique est alors normale à N .

D. Le théorème de finitude.

(10.1) NOTATIONS. - Soient $P \in M$, N une sous-variété de M ; on désigne par $S(P , N , M)$ l'ensemble des géodésiques telles que $g(0) = P$, $g(1) \in N$, $\frac{dg}{dt}(1) \perp N$ paramétrées proportionnellement à la longueur de l'arc à partir de P . On désigne par $L(g)$ la longueur de l'arc de la géodésique g , compris entre $g(0)$ et $g(1)$. Si $g \in S(P , N , M)$, on dira que g est non dégénérée si $g(0)$ n'est pas un point focal de N relativement à g (i. e., si la forme quadratique Q relative à g est non dégénérée ; cf. théorème (7.5)b).

(10.2) THÉORÈME. - Supposons que P ne soit pas adhérent à N . Supposons que, quel que soit $g \in S(P , N , M)$, g soit non dégénérée ; alors, quel que soit $\ell > 0$, l'ensemble des $g \in S(P , N , M)$ telles que $L(g) \leq \ell$ est fini.

DÉMONSTRATION. - Soit $\Omega(P , N , M)$ l'ensemble des courbes u différentiables par morceaux, paramétrées proportionnellement à la longueur de l'arc à partir de P , telles que $u(0) = P$, $u(1) \in N$. On munit $\Omega(P , N , M)$ de la topologie associée à la métrique

$$d(u , v) = \sup_t d(u(t) , v(t)) + |L(u) - L(v)|$$

pour u et $v \in \Omega(P , N , M)$.

a. Si g est non dégénérée, il existe un voisinage de g (pour la topologie de $\Omega(P , N , M)$ qui ne contient que $g \in S(P , N , M)$.

En effet, sinon il existerait des géodésiques $\gamma \in S(P , N , M)$ aussi près que l'on veut de g et distinctes de g . En particulier, il existerait des géodésiques γ telles que $d(g , \gamma) < \varepsilon$ (notation du paragraphe 7 pour g) ; mais alors γ couperait chacune des S_ρ en un point m_ρ , d'où un ensemble z_γ de paramètres associé à γ .

D'après la démonstration (7.1), on aurait $\frac{\partial I}{\partial z^i}(z_\gamma) = 0$. Mais, Q étant non dégénérée, on a $\mathrm{Det}(\frac{\partial^2 I}{\partial z^i_\rho \, \partial z^{i'}_{\rho'}}) \neq 0$, et, par conséquent, 0 est un point isolé dans l'ensemble de ceux qui annulent $\frac{\partial I}{\partial z^i_\rho}$ pour tout $\frac{i}{\rho}$; d'où une contradiction. On a en effet le lemme suivant :

Soit f une fonction numérique de k variables $x_1 , \dots , x_k$ telle que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0$ pour $i = 1 , \dots , k$; le hessien $\det(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \, \partial x^j}(0))$ est différent de zéro si et seulement si 0 est isolé dans l'ensemble des points qui annulent $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ pour $i = 1 , \dots , k$.

b. Supposons que le théorème soit faux.

Il existe une bijection entre l'ensemble des vecteurs tangents en P à M , et l'ensemble des segments de géodésiques issues de P , paramétrées par la longueur de l'arc à partir de P pour $0 \leq t \leq 1$. Donc, aux géodésiques $g \in S(P , N , M)$ telles que $L(g) \leq \ell$, correspondrait un ensemble infini de vecteurs de M_P dont la longueur est supérieure à $\frac{1}{\ell}$ (car $L(g) \leq \ell$) et bornée (car $N \not\ni P$). Donc cet ensemble aurait un point d'accumulation ; à ce point d'accumulation correspondrait une géodésique de longueur $\leq \ell$ (car L est une fonction continue sur Ω) et appartenant à S . De plus, cette géodésique serait un point d'accumulation des géodésiques considérées (au sens de la topologie de Ω). Mais ceci est impossible d'après a .

(10.3) Le théorème (10.2) est intéressant, car il existe effectivement des points P tels que les géodésiques de $S(P , N , M)$ soient toutes non dégénérées (un tel point est appelé par Morse un point régulier).

THÉORÈME. - N _étant donné, l'ensemble des_ P _réguliers est partout dense dans_ M. La démonstration étant assez longue, on renvoie le lecteur au paragraphe 14 du livre de Morse.

Dans la pratique, la théorie n'a été appliquée avec fruit que dans le cas où un groupe K d'isométries de M, à action variationnellement complète, opère sur M, N étant l'orbite d'un point. Dans ce cas, il est facile de trouver des points P réguliers. En effet :

PROPOSITION. - _Si_ P _appartient à une orbite de dimension maximum, (le groupe_ K _étant à action variationnellement complète),_ P _est régulier_ ($N = O(g(1))$).

DÉMONSTRATION. - D'après (5.5), on a $\lambda(0) = \delta(g(0)) = \delta(P) = 0$ pour toute géodésique transversale g.

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOTT (Raoul). - An application of the Morse theory to the topology of Lie-groups, Bull. Soc. math. France, t. 84, 1956, p. 251-281.

[2] BOTT (Raoul) and SAMELSON (Hans). - Applications of the theory of Morse to symmetric spaces, Amer. J. of Math., t. 80, 1958, p. 964-1029.

[3] LICHNEROWICZ (André). - Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie. - Paris, Dunod ; Roma, Cremonese, 1955 (Travaux et Recherches mathématiques, 2).

[4] LICHNEROWICZ (André). - Géométrie des groupes de transformation. - Paris, Dunod, 1955 (Travaux et Recherches mathématiques, 3).

[5] MORSE (Marston). - The calculus of variations in the large. - New York, American mathematical Society, 1934 (Amer. math. Soc. Coll. Publ., 18).

ADDITIF

SUR L'INDICE D'UNE GÉODÉSIQUE

(Complément au théorème (7.5) de l'exposé 14)

Soit $\mathcal{V}$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}$ (notation de (7.6)) des champs de vecteurs continus différentiables par morceaux sur g tels que si $\mu \in \mathcal{V}$ alors $\mu(0) = 0$, $\mu(1) \in N_{g(1)}$, $(\mu , T) = 0$. Sur $\mathcal{V}$ (qui est de dimension infinie) on considère la forme quadratique I définie par

$$I(\mu) = (T_g \, \mu(b) \, , \mu(b)) + \int_0^1 \Omega(\mu \, , \mu') \, dt \quad .$$

On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME. - La forme quadratique I est d'indice et de corang fini. De plus, l'indice de I est égal à l'indice de la géodésique g , le corang de I est égal à $\lambda(0)$.

DÉMONSTRATION. - Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{V}$ sur lequel I est définie négative. Soit H un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . On voit immédiatement (en considérant par exemple une base de H) qu'il existe un nombre fini de valeurs de t , soient $t'_1 , \ldots , t'_k$, telles que pour tout $\mu \in H$, μ ne peut être brisé (éventuellement) qu'en une de ces valeurs. On rajoute à $t'_1 , \ldots , t'_k$ un nombre fini de valeurs de t de façon que l'ensemble obtenu, soit $\{t_1 , \ldots , t_p\}$, vérifie les hypothèses du paragraphe 7. Avec les notations de (7.2), $H \subset V$, et d'après le lemme (7.3), pour $\eta \in V$

$$I(\eta) = Q(Z) \quad ,$$

mais alors, d'après (7.5), $\dim H \leqslant$ indice de g . Et par conséquent E est de dimension finie, de dimension $\leqslant$ indice de g . On en déduit immédiatement que l'indice de I est égal à l'indice de g .

Même démonstration pour le corang.

REMARQUE. - Le théorème précédent donne en fait une définition intrinsèque de l'indice d'une géodésique.