Joseph A. Wolf

Quelques résultats de R. Bott sur la topologie des groupes de Lie

Séminaire Henri Cartan, tome 12, nº 2 (1959-1960), exp. nº 13, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1959-1960__12_2_A3_0>

8 février 1960
et 22 février 1960

QUELQUES RÉSULTATS DE R. BOTT SUR LA TOPOLOGIE DES GROUPES DE LIE

par Joseph A. WOLF

Modulo quelques résultats de la théorie de Morse, nous allons prouver le théorème suivant :

THÉORÈME. - Soient G un groupe de Lie compact connexe, $\Omega(G)$ l'espace des lacets de G, $Z(S)$ le centralisateur d'un tore S de G. Alors les groupes d'homologie entière $H_*(\Omega(G) ; Z)$ et $H_*(G/Z(S) ; Z)$ n'ont pas de torsion ni d'éléments de degrés impairs. Par suite, il en est de même pour les groupes $H^*(\Omega(G) ; Z)$ et $H^*(G/Z(S) ; Z)$, groupes de cohomologie à coefficients entiers.

Dans le cours de la démonstration, nous verrons beaucoup de formules qui explicitent ce théorème. Enfin, on doit remarquer une conséquence évidente : $\pi_3(G) = \pi_2(\Omega(G))$ est un groupe abélien libre.

I. Résultats de la théorie de Morse.

J'explicite les résultats de la théorie de Morse modulo lesquels ce théorème sera démontré. Ils sont aussi utilisés par BOTT pour ses théorèmes de périodicité.

On considère une variété riemannienne M, une sous-variété N, et un point $p \in M$ non contenu dans N qui a une certaine propriété qu'on appelle régularité. Soit $\mathbf{S}(M , N , p)$ l'ensemble des segments géodésiques $s : [0 , a_s] \longrightarrow M$ de M telles que $s(0) \in N$, $s'(0) \perp N$, $s(a_s) = p$. Soit $\Omega'(M , N , p)$ l'ensemble des chemins $c : [0 , 1] \longrightarrow M$ différentiables par morceaux, paramétrisés proportionnellement à la longueur, avec $c(0) \in N$ et $c(1) = p$; $\Omega'(M , N , p)$ est topologisé par la métrique suivante :

$$d(c , c') = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} d(c(t) , c'(t)) + |\text{long } c - \text{long } c'| \quad .$$

Nous avons aussi l'ensemble $\Omega(M , N , p)$ des chemins continus $c : [0 , 1] \longrightarrow M$ tel que $c(0) \in N$ et $c(1) = p$, muni de la topologie compacte-ouverte.

1. $\Omega'(M, N, p)$ et $\Omega(M, N, p)$ ont le même type faible d'homotopie.

Chaque $s \in S(M, N, p)$ nous donne un entier $\lambda^N(s) \geqslant 0$, l'indice de s, utilisé pour définir la série de Morse de (M, N, p) par

$$\mathfrak{M}(M, N, p ; t) = \sum_{s \in S(M,N,p)} t^{\lambda^N(s)} .$$

Evidemment cette série existe si et seulement si, pour chaque entier n, il n'y a qu'un nombre fini d'éléments $s \in S(M, N, p)$ avec $\lambda^N(s) = n$. Les inégalités de Morse nous donnent le théorème puissant :

2. Supposons que $\mathfrak{M}(M, N, p ; t)$ existe et ne contienne aucune puissance impaire de t. Soit $\mathfrak{k}$ un corps arbitraire ; alors la série de Poincaré de $\Omega'(M, N, p)$ avec des coefficients dans $\mathfrak{k}$ est donnée par $P(\Omega'(M, N, p), \mathfrak{k} ; t) = \mathfrak{M}(M, N, p ; t)$.

La partie importante est le calcul de l'indice d'une $s \in S(M, N, P)$: si N est une orbite d'un groupe de Lie compact connexe G opérant par des isométries sur M, p est contenu dans une orbite de dimension maximale, $\delta(x) = \dim$ (orbite de p) $- \dim$ (orbite de x), et si G opère d'une manière qui est dite variationnellement complète, on a la formule

$$\lambda^N(s) = \sum_{0 < t < a_s} \delta(s(t)) . \tag{3}$$

II. Rappel sur les groupes de Lie.

Pour fixer la terminologie et les notations, nous rappelons quelques faits au sujet des groupes de Lie et de leurs algèbres.

Un groupe de Lie est une variété différentiable munie d'une structure de groupe, de telle manière que l'application $G \times G \longrightarrow G$, définie par $(g, h) \longrightarrow gh^{-1}$, soit différentiable. Une algèbre de Lie sur un corps F est un espace vectoriel sur F muni d'une loi de composition $[X, Y]$ bilinéaire telle que :

$$[X, X] = 0 , \qquad \text{ce qui entraîne } [X, Y] + [Y, X] = 0 ,$$

$$[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0 \qquad \text{(identité de Jacobi)} .$$

Soit G un groupe de Lie. On écrit toujours e pour l'élément neutre de G. Si g est un élément de G, nous avons les translations à droite $(d_g : a \rightarrow ag)$ et à gauche $(\ell_g : a \rightarrow ga)$ associées à g. Comme d'habitude, nous identifierons l'espace tangent G_e de G à e avec l'espace des champs de vecteurs invariants à gauche définis sur G . Ainsi, nous obtenons une structure d'algèbre de Lie sur G_e . Muni de cette structure, G_e sera notée $\mathfrak{G}$, l'algèbre de Lie de G .

Un sous-groupe de Lie de G est un sous-groupe engendré par un sous-groupe de Lie local, c'est-à-dire par une sous-variété H d'un voisinage de e , telle que $xy^{-1} \in H$ chaque fois que $x \in H$ et $y \in H$ sont assez voisins de e . Une sous-algèbre $\mathfrak{H}$ de $\mathfrak{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{G}$ tel que $[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}] \subset \mathfrak{H}$. Un résultat classique sur les groupes de Lie est qu'on a une correspondance bijective entre les sous-algèbres $\mathfrak{H}$ de $\mathfrak{G}$ et les sous-groupes de Lie connexes H de G , définie par

$$H \longrightarrow H_e \quad \text{(notée toujours } \mathfrak{H}\text{)} \quad .$$

Un sous-groupe fermé est toujours un sous-groupe de Lie (la réciproque n'est pas vraie).

Soit $f : G \longrightarrow H$ un homomorphisme de groupes de Lie, c'est-à-dire un homomorphisme différentiable du groupe de Lie G dans le groupe de Lie H . L'homomorphisme induit $\mathfrak{G} \longrightarrow \mathfrak{H}$ sera toujours noté $f_* : \mathfrak{G} \longrightarrow \mathfrak{H}$. Si $f : G \rightarrow H$ est un revêtement, nous faisons une identification de $\mathfrak{G}$ avec $\mathfrak{H}$ par f_* . Si G est simplement connexe et $\varphi : \mathfrak{G} \longrightarrow \mathfrak{H}$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie, l'homomorphisme induit $G \longrightarrow H$ sera en général noté $\Phi : G \longrightarrow H$. Un homomorphisme continu de groupes de Lie est automatiquement différentiable.

Soit R la droite réelle, considérée comme groupe de Lie. L'expression $\frac{d}{dt}$ a sa signification habituelle comme champ de vecteurs sur R . Un sous-groupe à un paramètre de G est un homomorphisme continu (et automatiquement différentiable) $\mathfrak{X} : R \longrightarrow G$. Nous associons l'élément $\mathfrak{X}_*(\frac{d}{dt}|_0) \in \mathfrak{G}$. Soit $X \in \mathfrak{G}$; nous avons un homomorphisme $\phi : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{G}$ des algèbres de Lie tel que $\phi(\frac{d}{dt}|_0) = X$. Nous lui associons le sous-groupe à un paramètre Φ de G . Maintenant, nous allons rappeler l'application exponentielle $\exp : \mathfrak{G} \longrightarrow G$. Soit $X \in \mathfrak{G}$ et $\mathfrak{X}$ le sous-groupe à un paramètre associé ; on a $\exp(X) = \mathfrak{X}(1)$. Alors $\mathfrak{X}(t) = \exp(tX)$. Si $f : G \longrightarrow H$ est un homomorphisme de groupes de Lie, nous avons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{G} & \xrightarrow{f_*} & \mathfrak{H} \\ \downarrow{\scriptstyle \exp} & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\ G & \xrightarrow{f} & H \end{array}$$

La correspondance canonique entre les sous-algèbres $\mathfrak{H}$ de $\mathfrak{G}$ et les sous-groupes de Lie connexes H de G peut être donnée par

$$\text{" exp } (\mathfrak{H}) \quad \text{engendre } H \text{ "} .$$

Supposons que G opère différentiablement (à gauche) sur une variété M ; nous avons donc une application $F : G \times M \longrightarrow M$ différentiable, nous écrivons $f(g)(x) = F(g , x)$, $f(e)$ est l'identité sur M , et $f(gh) = f(g).f(h)$. Les champs de vecteurs sur M invariants par G forment une algèbre de Lie, et l'homomorphisme canonique de $\mathfrak{G}$ dans cette algèbre est défini par

$$\hat{f}(X)_x = \frac{d}{dt}\Big|_0 F(\exp (tX) , x) .$$

Soit $O(x)$ l'orbite $F(G , x)$ d'un élément $x \in M$, $G_{(x)}$ le groupe d'isotropie $\{g \in G | f(g)(x) = x\}$ correspondant ; on rappelle l'identification canonique entre l'espace $G/G_{(x)}$ des classes du sous-groupe fermé $G_{(x)}$ de G , et l'orbite $O(x)$; elle est donnée par $g \longrightarrow F(g , x)$. L'espace tangent $O(x)_y$ à une orbite $O(x)$ en un de ses points y est l'ensemble de toutes les $\hat{f}(X)_y$ avec $X \in \mathfrak{G}$. Un point $p \in M$ est dit régulier pour l'action de G s'il est contenu dans une orbite de dimension maximum.

L'action adjointe $F(g , a) = ad(g).a = gag^{-1}$ de G sur lui-même induit une représentation linéaire de G dans $\mathfrak{G}$; on a $ad(g)\, e = e$ pour chaque $g \in G$. En notant $Ad(g)$ la transformation de $\mathfrak{G}$ induite ainsi par $ad(g)$, nous avons $ad(g).(\exp (X)) = \exp (Ad(g).X)$. Cette représentation linéaire de G dans $\mathfrak{G}$ s'appelle la représentation linéaire adjointe de G . La représentation induite de $\mathfrak{G}$ comme algèbre de Lie des transformations linéaires de $\mathfrak{G}$, donnée par

$$Ad(X).Y = \frac{d}{dt}\Big|_0 Ad(\exp (tX)).Y ,$$

s'appelle la représentation adjointe de $\mathfrak{G}$. Rappelons que $Ad(X).Y = [X , Y]$.

Soient H et K sous-groupes de Lie connexes de G , $[H , K]$ le groupe des commutateurs (engendré par les $[h , k] = hkh^{-1} k^{-1}$, où $h \in H$, $k \in K$), $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{K}$ les sous-algèbres de $\mathfrak{G}$ correspondantes, et $[\mathfrak{H} , \mathfrak{K}]$ la sous-algèbre des commutateurs (engendrée par les $[X , Y]$, où $X \in \mathfrak{H}$, $Y \in \mathfrak{K}$). En utilisant la formule $[X , Y] = \frac{d}{dt}\Big|_0 Ad(\exp (tX)).Y$, on peut démontrer que $[H , K]$ est un sous-groupe de Lie connexe de G ayant pour sous-algèbre $[\mathfrak{H} , \mathfrak{K}]$. De là, on déduit facilement que H est abélien (resp. résoluble, resp. nilpotent, resp. distingué) si et seulement si $\mathfrak{H}$ est abélienne (resp. résoluble, resp. nilpotente, resp. un idéal). On voit aussi que l'algèbre de Lie de $G_1 \times \ldots \times G_n$ est isomorphe à $\mathfrak{G}_1 \times \ldots \times \mathfrak{G}_n$.

Soit G un groupe de Lie compact connexe. Nous rappelons (cf. exposé 1) qu'un tore de G est un sous-groupe abélien connexe fermé, et qu'un tore maximal de G

est un tore de G maximal dans l'ensemble des tores de G. G est la réunion de ses tores maximaux, et les tores maximaux de G sont tous conjugués ; ils ont tous la même dimension, le <u>rang</u> de G.

Si $x \in G$ (resp. $A \subset G$), son centralisateur dans G sera toujours noté $Z(x)$ (resp. $Z(A)$). Soient A un tore de G et $x \in Z(A)$; nous rappelons (exposé 1, théorème 4) qu'il y a un tore S de G contenant A et x. Par suite, le centralisateur d'un tore A de G est la réunion des tores de G contenant A, le centralisateur d'un tore maximal T de G est T lui-même, et le centralisateur connexe d'un élément x de G est la réunion des tores de G contenant x. Un élément x de G est <u>régulier</u> s'il est contenu dans un seul tore maximal, c'est-à-dire si la composante connexe de $Z(x)$ est un tore maximal de G.

L'algèbre $\mathfrak{G}$ de G étant somme directe d'un idéal semi-simple $\mathfrak{G}_{ss}$ et de son centre $\mathfrak{A}$, on peut écrire $G = G_{ss} . A$, où G_{ss} est un sous-groupe fermé semi-simple de G, et A est le centre connexe de G. En fait, nous rappelons que $G_{ss} = [G , G]$ s'appelle la <u>partie semi-simple</u> de G et $\mathfrak{G}_{ss} = [\mathfrak{G} , \mathfrak{G}]$ s'appelle la partie semi-simple de $\mathfrak{G}$. L'intersection $G_{ss} \cap A$, étant centrale dans G_{ss}, est finie. Nous avons un revêtement $q : G_{ss} \times A \longrightarrow G$ par $q(g , a) = ga$. Soient $u : G' \longrightarrow G_{ss}$ et $v : R^n \longrightarrow A$ les revêtements universels. Avec q ils nous donnent le revêtement universel $\Phi : G' \times R^n \longrightarrow G$ de G.

LEMME 1. - <u>Soient G un groupe de Lie compact connexe, et G'' sa partie semi-simple (ou bien le revêtement universel de sa partie semi-simple). Si $H_*(\Omega(G'') ; Z)$ n'a pas de torsion ni d'éléments de degré impair, il en est de même de $H_*(\Omega(G) ; Z)$.</u>

DÉMONSTRATION. - Nous avons un revêtement $w : G'' \times R^n \longrightarrow G$. Puisque R^n est contractile, $H_*(\Omega(R^n) ; Z)$ est acyclique. Comme nous avons une identification canonique entre $\Omega(G'' \times R^n)$ et $\Omega(G'') \times \Omega(R^n)$, $H_*(\Omega(G'' \times R^n) ; Z)$ n'a pas de torsion ni d'éléments de degré impair. Mais w nous donne un homéomorphisme entre la composante connexe du chemin constant de $\Omega(G'' \times R^n)$ et celle de $\Omega(G)$. Alors $H_*(\Omega(G) ; Z)$ n'a pas de torsion ni d'éléments de degré impair,

C. Q. F. D.

G étant compact, $Ad(G)$ est un groupe compact de transformations linéaires de $\mathfrak{G}$. Alors nous pouvons trouver un produit scalaire (X , Y) défini positif sur $\mathfrak{G}$, tel que $(X , Y) = (Ad(g) X , Ad(g) Y)$ pour $X , Y \in \mathfrak{G}$ et $g \in G$. Soient $d_g : a \longrightarrow ag$ et $\ell_g : a \longrightarrow ga$ les translations à **droite et à gauche** de G. Si $U , V \in G_g$, nous définissons (U , V) par

$$(U , V) = (d_{g^{-1}}.U , d_{g^{-1}}.V) \quad .$$

Alors nous avons une structure riemannienne sur G qui est invariante par les d_g et les $\mathfrak{g}_g$. On supposera désormais G muni d'une telle structure. Ces structures sont utiles parce que G est alors un <u>espace symétrique</u> ($g \rightarrow g^{-1}$ étant la symétrie au point $e \in G$) ; on peut démontrer que les géodésiques passant par e sont les sous-groupes à un paramètre de G .

Soit x un point d'une sous-variété N d'une variété riemannienne M tel que chaque géodésique $x(t)$ de M , $x(0) = x$, x tangente à N au point x , soit contenue dans N . On dit alors que N est <u>totalement géodésique</u> au point x . Nous disons que N est <u>totalement géodésique</u> si elle est totalement géodésique en chacun de ses points.

LEMME 2. - <u>Soient</u> G <u>un groupe de Lie compact connexe, et</u> H <u>un sous-groupe de Lie</u> ; H <u>est totalement géodésique dans</u> G .

DÉMONSTRATION. - Soit $g(t)$ une géodésique de G , $g(0) = h \in H$, et $g(t)$ tangente à H au point h . Puisque H_h est $\mathfrak{g}_h \mathfrak{H}$ et que $g(t)$ est de la forme $g(t) = h.\exp(tX)$ avec direction $\mathfrak{g}_h X$ en h , nous avons $X \in \mathfrak{H}$. Alors, chaque élément $\exp(tX)$ de G est contenu dans H , et par suite chaque élément $g(t) = h.\exp(tX)$ est contenu dans H ,

C. Q. F. D.

Une autre chose intéressante pour la métrique riemannienne de G est la formule $([X , Y] , Z) + (Y , [X , Z]) = 0$ pour $X , Y , Z \in \mathfrak{G}$. On l'obtient à partir de

$$(\mathrm{Ad}(\exp(tX)).Y , \mathrm{Ad}(\exp(tX)).Z) = (Y , Z)$$

par différentiation.

III. <u>Les théorèmes de Bott.</u>

Considérons maintenant l'action adjointe de G sur une boule ouverte $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{G}$, de centre 0 et assez petite pour que l'application $\exp : \mathfrak{M} \rightarrow M = \exp(\mathfrak{M}) \subset G$ soit un homéomorphisme. Evidemment $\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$ et $\mathrm{ad}(g) M = M$ pour chaque $g \in G$. Le point p sera un élément régulier de G contenu dans M . Son centralisateur connexe, tore maximal de G , sera noté T ; N sera une orbite $O(g)$ d'un $g \in M$ tel que $p \notin N$. Il est clair que N est contenu dans M .

LEMME 3. - <u>On a</u> $S(G, N, p) = S(T, N \cap T, p)$ <u>et</u> $S(M , N , p) = S(M \cap T , N \cap T , p)$.

Pour démontrer ce lemme, il suffit de démontrer que chaque élément de $S(G, N, p)$ est contenu dans T. Parce que T est un sous-groupe fermé de G, le lemme 2 nous dit qu'il contient chaque géodésique de G qui lui est tangente. Alors il suffit de démontrer que chaque $s \in S(G, N, p)$ est tangente à T en p.

D'abord, soit $g \in G$, et soit s un segment de géodésique $t \longrightarrow g.\exp(tX)$ qui commence en g. L'espace tangent $O(g)_g$ à l'orbite $O(g)$ de g se compose des éléments

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_0 (\mathrm{ad}(\exp(tY))\, g) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 (\exp(tY).g.\exp(-tY))$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 (d_g(\exp(tY).\exp(-\mathrm{Ad}(g)(tY)))) = (d_{g*} - \ell_{g*})\, Y$$

pour chaque $Y \in \mathfrak{G}$. Alors s commence orthogonalement à $O(g) \Longleftrightarrow \ell_{g*} X \perp O(g)_g$, i. e.,

$$\Longleftrightarrow 0 = (\ell_{g*} X, (d_{g*} - \ell_{g*})\mathfrak{G}) = (X, \ell_{g^{-1}*}(d_{g*} - \ell_{g*})\mathfrak{G})$$

$$= (X, (\mathrm{Ad}(g^{-1}) - I)\mathfrak{G}) = ((\mathrm{Ad}(g) - I)X, \mathfrak{G})$$

$$\Longleftrightarrow \mathrm{Ad}(g)\, X = X .$$

Cela implique que G_g est la somme directe orthogonale de $O(g)_g$ et de l'espace tangent $Z(g)_g$ au centralisateur de g. En particulier, l'espace tangent T_p à T en p est le complémentaire orthogonal de l'espace tangent $O(p)_p$ de l'orbite $O(p)$.

Soit $s \in S(G, N, p)$. Comme s commence orthogonalement à l'orbite N, s est $\perp$ à chaque orbite qu'elle rencontre. En particulier, s est $\perp$ à $O(p)_p$ en p, c'est-à-dire s est tangente à T en p. Alors s est contenue dans T,

C. Q. F. D.

Nous avons vu aussi que $x \in G$ est régulier si et seulement si x est régulier pour l'action adjointe de G sur lui-même.

Soit $\mathfrak{T}$ la sous-algèbre de $\mathfrak{G}$ relative à T. Evidemment $\exp : \mathfrak{T} \longrightarrow T$ est le revêtement universel de T. De plus, $N \cap T$ est fini parce que deux éléments quelconques sont conjugués par le groupe de Weyl. Soit P l'unique point de $\mathfrak{M}$ tel que $\exp(P) = p$, et soit $\mathfrak{P}$ l'ensemble de tous les points de $\mathfrak{T}$ envoyés sur p par $\exp$; $\mathfrak{N}$ sera l'unique sous-ensemble de $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{T}$ qui est envoyé sur $N \cap T$ par $\exp$. Enfin, $S(\mathfrak{T}, \mathfrak{N}, \mathfrak{P})$ est l'ensemble des droites de $\mathfrak{T}$ commençant en un point de $\mathfrak{N}$ et se terminant en un point de $\mathfrak{P}$, et $S(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, P)$ est l'ensemble des droites de $\mathfrak{T} \cap \mathfrak{M}$ commençant en un point de $\mathfrak{N}$ qui se terminent en P. Le lemme 3 nous donne sans peine le lemme suivant :

LEMME 4. - <u>La restriction</u> $\exp|_{\mathfrak{T}}$ de $\exp$ <u>donne une correspondance biunivoque entre les droites de</u> $S(\mathfrak{T}, \mathfrak{N}, \mathfrak{P})$ (resp. $S(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, P)$) <u>et les segments géodésiques de</u> $S(G, N, p)$ (resp. $S(M, N, p)$).

Considérons une décomposition de $\mathfrak{G}$ sous l'action de $Ad(T)$:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{T} \oplus \mathfrak{E}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{E}_m \quad ,$$

où $Ad(T)$ opère trivialement sur $\mathfrak{T}$ et non trivialement par des rotations sur chaque 2-plan $\mathfrak{E}_j$ (cf. l'exposé 1, paragraphe 3). Soit $X \in \mathfrak{T}$; alors $ad(\exp X)$ est, dans $\mathfrak{E}_j$, une rotation d'un angle $2\pi\theta_j(X)$. Les θ_j sont des formes linéaires sur $\mathfrak{T}$. En général, on considère les $\pm\theta_j$ comme les <u>racines</u> de G dans la théorie des groupes de Lie compacts. Les racines ordinaires (de la théorie des algèbres de Lie) sont les $\pm 2\pi\sqrt{-1}\,\theta_j$.

Pour chaque $x \in T$, s'il existe dans $\mathfrak{E}_j$ un $X \neq 0$ tel que $Ad(x).X = X$, la restriction de $Ad(x)$ à $\mathfrak{E}_j$ est l'identité. Soit $f(x)$ le nombre des $\mathfrak{E}_j$ tels que la restriction de $Ad(x)$ à $\mathfrak{E}_j$ soit l'identité. La dimension de $Z(x)$ est $\dim T + 2f(x)$. On en déduit que :

$$\delta(x) = 2f(x) \quad ,$$

δ désignant la fonction définie en I, 2.

Soit U_j le sous-groupe des $x \in T$ tels que la restriction de $Ad(x)$ à $\mathfrak{E}_j$ soit l'identité, et soit $\mathfrak{U}_j$ son algèbre de Lie. On rappelle que le <u>diagramme infinitésimal</u> de G est la réunion des $\mathfrak{U}_j$; on le note $D'(G)$. C'est une réunion d'hyperplans de $\mathfrak{T}$ passant par l'origine. Les composantes connexes du complémentaire de $D'(G)$ dans $\mathfrak{T}$ sont les <u>chambres de Weyl</u> (ou <u>chambres fondamentales</u>). Soit $\mathfrak{D}_j$ l'ensemble des $X \in \mathfrak{T}$ tels que $\exp X \in U_j$; $\mathfrak{D}_j$ est une réunion d'hyperplans parallèles à $\mathfrak{U}_j$; la réunion des $\mathfrak{D}_j$ (pour j variable) est le <u>diagramme</u> $D(G)$ du groupe G. Les composantes connexes du complémentaire de $D(G)$ dans $\mathfrak{T}$ sont les <u>polyèdres de Cartan</u>.

Soit $x \in T$. Observons que $f(x)$ est le nombre des U_j qui contiennent x. Si $x = \exp X$, $f(\exp X)$ est le nombre des hyperplans de $D(G)$ qui contiennent X. Soient $s \in S(G, N, p)$ (resp. $S(M, N, p)$), et $s \in S(\mathfrak{T}, \mathfrak{N}, \mathfrak{P})$ (resp. $S(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, P)$) les éléments qui se correspondent par l'application exponentielle. L'<u>indice</u> $\lambda(s)$ est égal à $\sum_t \delta(s(t))$, et par suite : $\lambda(s) = 2g(s)$,

$g(s)$ désignant le nombre des hyperplans de $D(G)$ traversés par s .

PROPOSITION 1. - $H_*(G/Z(s))$ <u>n'a pas de torsion ni d'élément non nul de degré impair</u>.

DÉMONSTRATION. - $S(\mathfrak{M} \cap \Sigma , \mathfrak{N} , P)$ étant fini, puisque $\mathfrak{N}$ est fini, $S(M , N , p)$ est fini. Par suite, la série de Morse

$$\mathcal{M}(M , N , p ; t) = \sum_{s \in S(M , N , p)} t^{\lambda^N(s)}$$

existe. Nous venons de voir que chaque $\lambda^N(s)$ est pair. Par suite, pour tout corps $\mathfrak{k}$ de coefficients, $\mathcal{M}(M , N , p ; t)$ est égal à la série de Poincaré $P_*(\Omega'(M , N , p) , \mathfrak{k} ; t)$, et cette dernière ne contient que des puissances paires de t . Il s'ensuit bien que $H_*(\Omega'(M , N , p) ; Z)$ n'a pas de torsion ni d'élément non nul de degré impair.

Soit T un tore maximal de G qui contienne un tore S , et soit x un élément "générateur" de S tel que $x \in M$; soit $N = ad(g).x$, et soit p un "générateur" de T tel que $p \in M$, $p \notin N$; soit enfin $X \in \mathfrak{M}$ tel que $\exp (X) = x$. Alors :

$$Z(S) = Z(x) \quad ,$$

$$G/Z(S) \approx G/Z(x) \approx ad(G)\, x \approx Ad(G)\, X \quad ,$$

le dernier isomorphisme étant défini par l'exponentielle ; d'où finalement :

$$G/Z(S) \approx S(\mathfrak{M} , Ad(G)\, X , P)$$

qui est un rétracte par déformation de $\Omega'(\mathfrak{M} , Ad(G)\, X , P)$ parce que $\mathfrak{M}$ est une boule euclidienne. D'autre part

$$\exp : (\mathfrak{M} , Ad(G)\, X , P) \approx (M , N , p)$$

donne

$$\Omega'(\mathfrak{M} , Ad(G)\, X , P) \approx \Omega'(M , N , p) \quad ,$$

d'où finalement

$$H_*(\Omega'(M , N , p) ; \underset{\sim}{Z}) \approx H_*(G/Z(S) ; \underset{\sim}{Z}) \quad ,$$

C. Q. F. D.

PROPOSITION 2. - $H_*(\Omega(G) ; \underset{\sim}{Z})$ <u>n'a pas de torsion et est nul dans les degrés impairs</u>.

DÉMONSTRATION. - D'après le lemme 1, il suffit de démontrer la proposition dans le cas où G est semi-simple. On doit montrer que, l'entier n étant donné, il n'existe qu'un nombre fini de $s \in S(\mathfrak{X}, \mathfrak{N}, \mathfrak{P})$ qui traversent exactement n hyperplans de $D(G)$. Or $\mathfrak{N}$ étant fini, il suffit de prouver qu'il n'y a qu'un nombre fini de $s \in S(\mathfrak{X}, Y, \mathfrak{P})$ qui traversent exactement n hyperplans de $D(G)$, avec $Y \in \mathfrak{X}$. Soit $q \geq 0$, $S_q(\mathfrak{X}, Y, \mathfrak{P})$ l'ensemble des $s \in S(\mathfrak{X}, Y, \mathfrak{P})$ tels que $\|s\| \leq q$. Puisque $\mathfrak{P}$ est discret, $S_q(\mathfrak{X}, Y, \mathfrak{P})$ est fini. Soit alors m un entier ≥ 0, et soit $S^m(\mathfrak{X}, Y, \mathfrak{P})$ l'ensemble des $s \in S(\mathfrak{X}, Y, \mathfrak{P})$ tels que $g(s) \leq m$, où $g(s)$ désigne le nombre des hyperplans de $D(G)$ traversés par s. Je dis qu'il existe un $q \geq 0$, $q \in S^m \subset S_q$, comme conséquence de la semi-simplicité de G. Une fois cela démontré, il sera évident que le nombre des $s \in S(\mathfrak{X}, Y, \mathfrak{P})$ traversant exactement m hyperplans de $D(G)$ est fini.

G étant semi-simple, son centre $Z(G) = \bigcap_j U_j$ est fini, et $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) = \bigcap_j \mathfrak{U}_j = \{0\}$. Par suite chaque polyèdre de Cartan est borné : il existe un $s > 0$ tel que chaque polyèdre ait un diamètre $\leq s$. Soit $s \in S^m(\mathfrak{X}, Y, \mathfrak{P})$; la longueur $\|s\|$ de s ne peut être $\geq (m+1)\, s$. Donc

$$s \in S_{(m+1)s}(\mathfrak{X}, Y, \mathfrak{P}) \quad ,$$

.../...

d'où finalement

$$S^m(\mathfrak{X}, Y, \mathfrak{P}) \subset S_{(m+1)s}(\mathfrak{X}, Y, \mathfrak{P})$$

comme annoncé.

Terminons la démonstration de la proposition 2. On suppose G semi-simple. Alors

$$\sum_{s \in S(G,N,p)} t^{2g(s)} = \mathfrak{M}(G, N, p; t) = P_*(\Omega'(G, N, p), \mathfrak{k}; t)$$

pour un corps arbitraire $\mathfrak{k}$. Par suite, $H_*(\Omega'(G, N, p); \underset{\sim}{Z})$ n'a pas de torsion ni d'élément de degré impair ; $\Omega'(G, N, p)$ et $\Omega(G, N, p)$ ayant le même type faible d'homotopie, il en est de même pour $H_*(\Omega(G, N, p); \underset{\sim}{Z})$. Dans le cas spécial où N est l'orbite $e = ad(G)e$, nous utilisons le fait bien connu :

$$H_*(\Omega(G); \underset{\sim}{Z}) = H_*(\Omega(G, e, e); \underset{\sim}{Z}) \approx H_*(\Omega(G, e, p); \underset{\sim}{Z})$$

et nous voyons que $H_*(\Omega(G); \underset{\sim}{Z})$ n'a pas de torsion et est nul dans les degrés impairs.

REMARQUE 1. - La considération des racines et du groupe de Weyl de G donne des formules explicites, d'une manière évidente, pour les séries de Poincaré de $H_*(G/Z(S); \underset{\sim}{Z})$ et de $H_*(\Omega(G); \underset{\sim}{Z})$.

REMARQUE 2. - On peut expliciter une décomposition cellulaire de $G/Z(S)$ qui permet de calculer directement l'homologie : pour le cas du quotient de G par un tore maximal, c'est fait dans [4],(voir théorème 2, page 42 et suivantes) et [2]. Le cas général a été étudié par CHEVALLEY (non publié).

REMARQUE 3. - En général, $H_*(\Omega(G, N, p); \underset{\sim}{Z})$ n'a pas de torsion et est nul en degrés impairs. Lorsque G est semi-simple, cela résulte de ce qui précède. Le cas général se ramène à celui-là : G possède un revêtement $G_{ss} \times A$, produit de la partie semi-simple G_{ss} de G et du centre connexe A de G ; soit $\pi : G' \longrightarrow G$ l'application de revêtement, définie par $\pi(g, a) = ga$; soit

$$x' = (y', a'), \quad p' = (z', b'), \quad \pi(x') = x, \quad \pi(p') = p,$$
$$p \notin N = ad(G)\, x, \quad p' \notin N' = ad(G')\, x' = (ad(G_{ss})\, y') \times a'.$$

Alors

$$\Omega(G', N', p') = \Omega(G_{ss}, ad(G_{ss})\, y', z') \times \Omega(A, a', b'),$$

le second facteur du second membre est acyclique, tandis que l'homologie du premier facteur est sans torsion et nulle en degrés impairs. D'où le résultat.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOTT (Raoul). - An application of the Morse theory to the topology of Lie groups, Bull. Soc. math. France, t. 84, 1956, p. 251-281.

[2] BRUHAT (François). - Représentations induites des groupes de Lie semi-simples complexes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 238, 1954, p. 437-439.

[3] CHEVALLEY (Claude). - Theory of Lie groups, I. - Princeton, Princeton University Press, 1946 (Princeton mathematical Series, 8).

[4] CHEVALLEY (Claude). - Sur certains groupes simples, Tôhoku math. J., Series 2, t. 7, 1955, p. 437-439.