SÉMINAIRE HENRI CARTAN

JOHN C. MOORE

Algèbre homologique et homologie des espaces classifiants

Séminaire Henri Cartan, tome 12, nº 1 (1959-1960), exp. nº 7, p. 1-37
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1959-1960__12_1_A7_0>

ALGÈBRE HOMOLOGIQUE ET HOMOLOGIE DES ESPACES CLASSIFIANTS (1)

par John C. MOORE

1. Modules différentiels.

Soit K un anneau commutatif. Un K-module gradué est une suite de K-modules (M_q) indexée par les entiers. Un tel module est borné inférieurement s'il existe un entier n tel que $M_q = 0$ pour $q < n$. Si M et N sont des K-modules gradués, $M \otimes N$ est le K-module gradué défini par $(M \otimes N)_q = \bigoplus_{r+s=q} M_r \otimes_K N_s$, et $\mathrm{Hom}(M, N)$ est le K-module gradué, où $(\mathrm{Hom}(M, N))_q$ est l'ensemble des applications $f : M \to N$ de degré q. Une telle application est une suite (f_r) où $f_r : M_r \to N_{r+q}$ est un homomorphisme de K-modules.

Le module gradué est concentré en degré n si $M_q = 0$ pour $q \neq n$. On considère K comme un module gradué concentré en degré 0.

Comme nous aurons toujours à faire à des K-modules gradués, nous nous contenterons de dire "module". L'application identique d'un module se notera i quand il n'y aura pas de danger de confusion.

Selon la convention habituelle [3], si M, N, M' et N' sont des modules, $f : M \to M'$ est une application de degré p, et $g : N \to N'$ une application de degré q, alors $f \otimes g : M \otimes N \to M' \otimes N'$ est l'application de degré $p + q$ telle que, si $x \in M_r$ et $y \in N_s$,

$$(f \otimes g)_{r+s}(x \otimes y) = (-1)^{rq} f_r(x) \otimes g_s(y) \quad .$$

Si M est un module, un opérateur différentiel sur M est une application $d : M \to M$ de degré -1, telle que $d \circ d = 0$. On note $Z(M)$ le noyau de d, $B(M)$ l'image de d, et $H(M) = Z(M)/B(M)$. Un module différentiel est un module M muni d'un opérateur différentiel. On le notera encore M. On appelle $Z(M)$ le module des cycles de M, $B(M)$ celui des bords, et $H(M)$ l'homologie de M.

On considérera K comme un module différentiel concentré en degré zéro quand ce sera commode.

(1) Les méthodes employées dans cet exposé sont tirées d'un travail, non publié, avec S. EILENBERG. On peut trouver dans [7] un exposé préliminaire de ce travail.

Si M et N sont des modules différentiels, $M \otimes N$ est le module différentiel avec pour opérateur différentiel $d \otimes i + i \otimes d$. Comme module, $\mathrm{Hom}(M , N)$ est le même que si M et N n'étaient pas munis d'opérateurs différentiels. Mais $\mathrm{Hom}(M , N)$ est un module différentiel avec l'opérateur différentiel d tel que, si $f \in \mathrm{Hom}(M , N)_r$, d' est la différentielle de N et d'' celle de M,

$$df = d' \circ f + (-1)^{r+1} f \circ d'' \quad .$$

f est un <u>homomorphisme de modules différentiels</u> si $df = 0$, deux applications $f , g : M \to N$ de degré r sont <u>homotopes</u> s'il existe une application $h : M \to N$ de degré $r + 1$ telle que $dh = f - g$. On voit ainsi que $Z(\mathrm{Hom}(M , N))_r$ est le module des homomorphismes de modules différentiels de degré r, et que $H(\mathrm{Hom}(M , M))_r$ n'est autre que le module des classes d'homotopie de telles applications. Le diagramme,

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g'} & M' \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ N & \xrightarrow{g} & N' \end{array}$$

d'homomorphismes de modules différentiels, est commutatif à l'homotopie près, si gf et $f' g'$ sont homotopes.

Si M est un module différentiel, et r un entier, $s^r M$ est le module différentiel défini par $(s^r M)_{q+r} = M_q$, et $s^r : M \to s^r M$ est l'application de degré r telle que, si $x \in M_q$, $s^r x = x \in (s^r M)_{q+r}$. L'opérateur différentiel est défini sur $s^r M$ par la condition

$$ds^r = (-1)^r s^r d \quad .$$

Remarquons que pour deux entiers r_1, r_2,

$$s^{r_1}(s^{r_2} M) = s^{r_1+r_2} M \qquad \text{et} \qquad s^{r_1+r_2} = s^{r_1} \circ s^{r_2} \quad .$$

Le module $s^r M$ est appelé la suspension r-uple de M. En particulier $s^1 M = sM$ est appelé la <u>suspension</u> de M, l'application $s : M \to sM$ est appelée <u>suspension</u>, et son inverse τ <u>transgression</u>.

Dans la catégorie des modules, les notions de projectifs et de suites exactes sont les notions courantes, mais quand il s'agira de modules différentiels, on donnera à ces mots un sens spécial : un module différentiel M est dit <u>projectif</u> si les modules M, $Z(M)$ et $H(M)$ sont projectifs. Il s'ensuit qu'un module différentiel projectif M est somme directe de deux modules différentiels M'

et M'' vérifiant les conditions : la différentielle est nulle dans M', M' est un module projectif, M'' est un module projectif, et il existe $s : M'' \to M''$ de degré $+1$, tel que $ds + sd = i$, ds et sd étant des projecteurs. Les cycles de M'' sont alors l'image de ds, et l'image de sd s'applique isomorphiquement sur les cycles par d.

On dit qu'une suite de modules différentiels et d'homomorphismes de modules différentiels

$$M' \to M \to M''$$

est <u>exacte</u> si les suites $M' \to M \to M''$, $Z(M') \to Z(M) \to Z(M'')$ et $H(M') \to H(M) \to H(M'')$ sont des suites exactes de modules. En particulier $M \to M''$ est un <u>épimorphisme</u> de modules différentiels si $M \to M''$, $Z(M) \to Z(M'')$ et $H(M) \to H(M'')$ sont tous des épimorphismes de modules. On vérifie alors aisément que le module différentiel P est projectif si et seulement si pour tout épimorphisme de modules différentiels $M \xrightarrow{\pi} M''$, tout homomorphisme de modules différentiels $f : P \to M''$ se relève en un homomorphisme de modules différentiels $\overline{f} : P \to M$ tel que $f = \pi \circ \overline{f}$.

Rappelons que pour tout module différentiel M'', il existe un module différentiel projectif P et un épimorphisme de modules différentiels $f : P \to M''$. Le degré de f peut être choisi arbitrairement. De tels faits sont considérés en détail dans [3], chapitre XVII.

Remarquons que si $f : M \to N$ est un homomorphisme de modules différentiels qui est un épimorphisme de modules, ce n'est pas nécessairement un épimorphisme de modules différentiels, et par suite, il n'est pas vrai que tout homomorphisme de modules différentiels soit composé d'un épimorphisme et d'un monomorphisme de modules différentiels.

2. <u>Modules différentiels sur des algèbres différentielles</u>.

DÉFINITIONS. - Une algèbre différentielle est un module différentiel Λ tel que $\Lambda_q = 0$ pour $q < 0$, muni d'homomorphismes de modules différentiels de degré zéro $\varphi : \Lambda \otimes \Lambda \to \Lambda$ et $\eta : K \to \Lambda$, tels que

1. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Lambda \otimes \Lambda \otimes \Lambda & \xrightarrow{\varphi \otimes i} & \Lambda \otimes \Lambda \\ \downarrow{\scriptstyle i \otimes \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ \Lambda \otimes \Lambda & \xrightarrow{\varphi} & \Lambda \end{array}$$

est commutatif, et

2. Les diagrammes

$$\begin{tikzcd} K \otimes \Lambda \arrow[d, "\eta \otimes i"'] \arrow[dr, "\approx"] & \\ \Lambda \otimes \Lambda \arrow[r, "\varphi"'] & \Lambda \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Lambda \otimes K \arrow[d, "i \otimes \eta"'] \arrow[dr, "\approx"] & \\ \Lambda \otimes \Lambda \arrow[r, "\varphi"'] & \Lambda \end{tikzcd}$$

sont commutatifs.

Si Λ est une algèbre différentielle, un <u>module différentiel à gauche sur</u> Λ est un module différentiel M muni d'un homomorphisme de modules différentiels de degré zéro $\varphi : \Lambda \otimes M \to M$ tel que les diagrammes

$$\begin{tikzcd} \Lambda \otimes \Lambda \otimes M \arrow[r, "\varphi \otimes i"] \arrow[d, "i \otimes \varphi"'] & \Lambda \otimes M \arrow[d, "\varphi"] \\ \Lambda \otimes M \arrow[r, "\varphi"'] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K \otimes M \arrow[d, "\eta \otimes i"'] \arrow[dr, "\approx"] & \\ \Lambda \otimes M \arrow[r, "\varphi"'] & M \end{tikzcd}$$

soient commutatifs.

Un <u>module différentiel à droite sur</u> Λ est un module différentiel M muni d'un homomorphisme de modules différentiels de degré zéro $\varphi : M \otimes \Lambda \to M$, tel que les diagrammes correspondant aux diagrammes ci-dessus soient commutatifs.

Si A est un module différentiel à droite sur Λ, et B un module différentiel à gauche sur Λ, alors $A \otimes_\Lambda B$ est le module différentiel qui est le conovau de l'homomorphisme de modules différentiels

$$\varphi \otimes i - i \otimes \varphi : A \otimes \Lambda \otimes B \to A \otimes B \quad .$$

Si A et B sont des modules différentiels à gauche sur Λ, alors $\mathrm{Hom}_\Lambda(A , B)$ est le module différentiel qui est le noyau de l'homomorphisme de modules différentiels

$$\xi : \mathrm{Hom}(A , B) \to \mathrm{Hom}(\Lambda \otimes A , B)$$

défini par $\xi(f) = \varphi \circ (i \otimes f) - f \circ \varphi$, i. e. $f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(A , B)$ si et seulement si le diagramme

$$\begin{tikzcd} \Lambda \otimes A \arrow[r, "i \otimes f"] \arrow[d, "\varphi"] & \Lambda \otimes B \arrow[d, "\varphi"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

est commutatif. Il en est de même si A et B sont des modules différentiels à droite sur Λ.

Si A est un module différentiel à gauche sur Λ, on munit sA de la structure de module différentiel à gauche sur Λ qui est déterminée par la condition : $s : A \to sA$ est un isomorphisme de Λ-modules différentiels de degré $+1$.

La suite $M' \to M \to M''$ de Λ-modules différentiels est <u>exacte</u> si la suite sous-jacente de modules différentiels est exacte. Pour abréger la terminologie, quand nous dirons Λ-module, on entendra toujours Λ-module différentiel. Nous noterons $\Lambda^{\#}$ l'algèbre sans différentielle sous-jacente à Λ, et pour un Λ-module M, nous noterons $M^{\#}$ le $\Lambda^{\#}$-module sans différentielle sous-jacent à M. De plus, quand nous dirons homomorphisme de Λ-modules, on entendra toujours homomorphisme de Λ-modules différentiels.

Maintenant que nous avons défini la notion de suite exacte de Λ-modules, on se pose la question de savoir s'il y a assez de projectifs.

Si M est un module différentiel, $\Lambda \otimes M$ est un Λ-module à gauche. Si B est un Λ-module à gauche, $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(\Lambda \otimes M , B) = \mathrm{Hom}(M , B)$. Donc si M est un module différentiel projectif, $\Lambda \otimes M$ est un Λ-module à gauche projectif. Pour exprimer B comme quotient d'un Λ-module projectif, il suffit de se donner d'abord un épimorphisme $\pi : M \to B$ de modules différentiels, où M est un module différentiel projectif, et d'étendre π en une application, qu'on appelle encore $\pi : \Lambda \otimes M \to B$, qui soit un homomorphisme de Λ-modules à gauche. Il est alors un épimorphisme de Λ-modules. Ceci signifie que :

1. π est un homomorphisme de Λ-modules
2. $\Lambda \otimes M \to B$ est un épimorphisme de modules
3. $Z(\Lambda \otimes M) \to Z(B)$ est un épimorphisme de modules .

On voit ainsi que dans la catégorie des Λ-modules à gauche et de leurs homomorphismes, il y a assez de projectifs, avec la notion de suite exacte définie plus haut. Nous ne nous occuperons pas de savoir s'il y a d'autres projectifs que ceux que nous avons construits [2].

LEMME 2.1. - Si A est un Λ-module à droite, et P un Λ-module à gauche projectif, alors

$$H(A \otimes_{\Lambda} P) = H(A) \otimes_{H(\Lambda)} H(P) .$$

DÉMONSTRATION. - On peut supposer que $P = \Lambda \otimes M$, où M est un module différentiel projectif. Alors $A \otimes_{\Lambda} P = A \otimes M$, et $H(A \otimes_{\Lambda} P) = H(A) \otimes H(M)$, $H(\Lambda \otimes M) = H(\Lambda) \otimes H(M)$, et $H(A) \otimes_{H(\Lambda)} H(\Lambda \otimes M) = H(A) \otimes H(M) = H(A \otimes_{\Lambda} P)$, ce qui démontre le lemme.

---

[2] Cette question est étudiée dans le travail avac EILENBERG.

DÉFINITION. - Si B est un Λ-module à gauche, une résolution projective X de B est une suite $\{X_n\}$ de Λ-modules projectifs indexée sur les entiers positifs, avec des homomorphismes de Λ-modules $\alpha_n : X_n \to X_{n-1}$ de degré zéro pour $n > 0$, et un homomorphisme de Λ-modules de degré zéro $\varepsilon : X_0 \to B$, tels que

$$\dots \to X_n \xrightarrow{\alpha_n} \dots \xrightarrow{\alpha_1} X_0 \xrightarrow{\varepsilon} B \to 0$$

soit une suite exacte de Λ-modules.

Si $f : B \to B'$ est un homomorphisme de Λ-modules de degré zéro, et si X' est une résolution projective de B', une application $\tilde{f} : X \to X'$ <u>au-dessus de</u> f est une suite d'homomorphismes $\{\tilde{f}_n\}$ de Λ-modules, telle que :

1. Chaque $\tilde{f}_n$ est de degré zéro ;
2. $\tilde{f}_n : X_n \to X'_n$;
3. $\alpha_n \tilde{f}_n = \tilde{f}_{n-1} \alpha_n$ pour $n > 0$;
4. $\varepsilon \tilde{f}_0 = f\varepsilon$.

Si $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ sont des applications au-dessus de f, une homotopie entre $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ est une suite d'homomorphismes de Λ-modules $h = \{h_n\}$, telle que

1. $h_n : X_n \to X'_{n+1}$ est de degré zéro ;
2. $\alpha_{n+1} h_n + h_{n-1} \alpha_n = \tilde{f}_n - \tilde{g}_n$ pour $n > 0$;
3. $\alpha_1 h_0 = \tilde{f}_0 - \tilde{g}_0$.

PROPOSITION 2.1. - Si B et B' sont des Λ-modules, et $f : B \to B'$ une application de degré zéro, alors

1. Il existe des résolutions projectives X de B et X' de B' ;
2. Il existe une application $\tilde{f} : X \to X'$ au-dessus de f ;
3. Si $\tilde{g} : X \to X'$ est une autre application au-dessus de f, il existe une homotopie entre $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$.

La démonstration de cette proposition est classique, et nous la laissons au lecteur.

Nous allons maintenant associer un Λ-module à toute résolution projective X d'un Λ-module B .

DÉFINITION. - Soit B un Λ-module et X une résolution projective de B . On définit $D(X)$ comme la somme directe $\bigoplus s^q X_q$. On note d' l'opérateur différentiel sur $D(X)$ induit par les différentielles internes des Λ-modules $s^q X_q$, et d'' : $s^q X_q \to s^{q-1} X_{q-1}$ l'application de degré (-1) induite par $\alpha_q : X_q \to X_{q-1}$ pour $q > 0$. d' est appelé différentielle interne de $D(X)$, d'' différentielle externe, on a $d' d'' + d'' d' = 0$, et on pose $d = d' + d''$. Si $\lambda \in \Lambda_r$, $a \in D(X)$, on a

$$d'(\lambda a) = (d\lambda)\, a + (-1)^r \lambda d' a$$

$$d''(\lambda a) = (-1)^r \lambda d'' a \quad ,$$

et

$$d(\lambda a) = (d\lambda)\, a + (-1)^r \lambda da \quad ,$$

d' et d sont donc tous deux des opérateurs différentiels, qui font de $D(X)$ un Λ-module. L'opérateur d est l'opérateur différentiel total sur $D(X)$, et c'est celui dont on se servira sauf mention du contraire.

DÉFINITION. - Si B est un Λ-module et X une résolution projective de B sur Λ, on pose

1. $$H(X) = \{H(X_n)\}$$
2. $$X^{\#} = \{X_n^{\#}\} \quad .$$

PROPOSITION 2.2. - Si B est un Λ-module et X une résolution projective de B, alors

1. $H(X)$ est une résolution projective de $H(B)$ sur $H(\Lambda)$;
2. $X^{\#}$ est une résolution projective de $B^{\#}$ sur $\Lambda^{\#}$.

La partie 1 se démontre immédiatement à partir du lemme démontré plus haut dans ce paragraphe, et la partie 2 est évidente à partir des définitions.

DÉFINITION. - Soient B un Λ-module et X une résolution projective de B. On pose :

$$D(X)_{p,q} = (s^p X_p)_{p+q} = s^p((X_p)_q)$$

$$D(X)_{p,*} = s^p X_p \qquad = \bigoplus_q D(X)_{p,q}$$

$$D(X)_{*,q} = \bigoplus_p D(X)_{p,q} \quad .$$

DÉFINITIONS et COMMENTAIRES. - Puisque, pour toute résolution projective X de B, $D(X)$ est un complexe double, il se trouve muni de deux filtrations. La première filtration, appelée filtration par degré de résolution, possède la propriété que ${}^I F_p D(X) = \sum_{n \leqslant p} D(X)_{n,*}$ est pour tout p un sous-Λ-module de $D(X)$. La seconde filtration, appelée <u>filtration par degré interne</u>, ne jouit pas de cette propriété. Mais si A est un Λ-module à droite, on peut filtrer $A \otimes D(X)$ par la somme du degré sur A et du degré interne sur $D(X)$; alors, si $a \in A$, $\lambda \in \Lambda$, $x \in D(X)$, la filtration de $a\lambda \otimes x$ est la même que celle de $a \otimes \lambda x$, de sorte qu'on a défini une filtration induite sur $A \otimes_\Lambda D(X)$.

CONVENTION. - Désormais, quand nous parlerons d'un Λ-module A, nous supposerons $A_q = 0$ pour $q < 0$. Ceci de façon que les suites spectrales, qu'on va commencer à employer aient de bonnes propriétés de convergence.

DÉFINITIONS. - Si A est un Λ-module à droite, B un Λ-module à gauche, X une résolution projective de A, Y une résolution projective de B, on pose :

$$\operatorname{Tor}^\Lambda(A, B) = H(D(X) \otimes_\Lambda D(Y)) .$$

THÉORÈME 2.1. - Si A est un Λ-module à droite, B un Λ-module à gauche, X une résolution projective de A, Y une résolution projective de B, alors

1. Si $D(X) \otimes_\Lambda D(Y)$ est filtré par la somme du degré total dans $D(X)$ et du degré interne dans $D(Y)$,

$$E^1(D(X) \otimes_\Lambda D(Y)) = D(X) \otimes_\Lambda B$$

et

$$E^2(D(X) \otimes_\Lambda B) = \operatorname{Tor}^\Lambda(A, B) .$$

2. Si $A \otimes_\Lambda DY$ est filtré par la somme du degré dans A et du degré interne dans DY,

$$E^1 = \operatorname{Tor}^{\Lambda^\#}(A^\#, B^\#) \qquad \text{et} \qquad E^r \Rightarrow \operatorname{Tor}^\Lambda(A, B) .$$

DÉMONSTRATION. - $D(X)^\#$ est un $\Lambda^\#$-module à droite projectif et $D(Y)^\#$ est un $\Lambda^\#$-module à gauche projectif. Dans les conditions de la partie 1, la différentielle dans $E^0(D(X) \otimes_\Lambda D(Y))$ n'est autre que celle qui est induite par la différentielle externe dans $D(Y)$. Par suite

$$E^0(D(X) \otimes_\Lambda D(Y)) = D(X)^\# \otimes_{\Lambda^\#} D(Y)^\# ,$$

et la différentielle n'est autre que celle qu'on obtient en considérant $D(Y)^\# = D(Y^\#)$ comme le complexe associé à une résolution projective de $B^\#$ sur $\Lambda^\#$. La partie 1 en résulte. On obtient la partie 2 de façon semblable.

COROLLAIRE. - Soient A un Λ-module à droite et B un Λ-module à gauche. Si l'un des modules $A^{\#}$, $B^{\#}$ est $\Lambda^{\#}$-projectif, alors

$$\mathrm{Tor}^{\Lambda}(A , B) = H(A \otimes_{\Lambda} B) \quad .$$

Nous arrivons maintenant à l'existence de la suite spectrale dont nous tirerons la plupart des résultats de cet exposé.

THÉORÈME 2.2. - Soient A un Λ-module à droite, B un Λ-module à gauche, Y une résolution projective de B ; filtrons $A \otimes_{\Lambda} D(Y)$ en posant $F_p(A \otimes_{\Lambda} DY) = A \otimes_{\Lambda} {}^{I}F_p(D(Y))$. Dans la suite spectrale qui en résulte,

1. $$E^2 = \mathrm{Tor}^{H(\Lambda)}(H(A) , H(B))$$
2. $$E^r \Rightarrow \mathrm{Tor}^{\Lambda}(A , B) \quad .$$

DÉMONSTRATION. - Dans la suite spectrale induite par la filtration $\{{}^{I}F_p(D(Y))\}$, on a $E^1(D(Y)) = D(H(Y))$ et c'est une résolution projective de $H(B)$ sur $H(\Lambda)$. En appliquant le lemme 1, on a

$$E^1(A \otimes_{\Lambda} D(Y)) = H(A) \otimes_{H(\Lambda)} E^1(D(Y)) \quad ,$$

et

$$E^2(A \otimes_{\Lambda} D(Y)) = \mathrm{Tor}^{H(\Lambda)}(H(A) , H(B)) \quad .$$

De plus $E^2_{p,q} = 0$ pour $p < 0$ ou $q < 0$. On en déduit le théorème.

THÉORÈME 2.3. de changement d'algèbre et de modules. - Soient Λ et Γ des algèbres différentielles, $f : \Lambda \to \Gamma$ un homomorphisme d'algèbres différentielles, A un Λ-module à droite, B un Λ-module à gauche, A' un Γ-module à droite, B' un Γ-module à gauche, $g : A \to A'$ et $h : B \to B'$ des homomorphismes de Γ-modules, tels que

1. $$f_* : H(\Lambda) \overset{\approx}{\to} H(\Gamma)$$
2. $$g_* : H(A) \overset{\approx}{\to} H(A')$$
3. $$h_* : H(B) \overset{\approx}{\to} H(B') \quad .$$

Alors

$$\mathrm{Tor}^{\Lambda}(A , B) \overset{\approx}{\to} \mathrm{Tor}^{\Lambda}(A' , B') \overset{\approx}{\to} \mathrm{Tor}^{\Gamma}(A' , B') \quad .$$

DÉMONSTRATION. - Ce théorème est une conséquence immédiate du précédent.

3. Relations entre algèbre homologique et géométrie.

Soient G un groupe topologique, X un espace sur lequel G opère à droite, Y un espace sur lequel G opère à gauche. On note $X \times_G Y$ l'espace quotient de $X \times Y$ par la relation d'équivalence obtenue en identifiant les points (xg , y) et (x , gy), quand $x \in X$, $y \in Y$, $g \in G$. Remarquons que, si X est un point, $X \times_G Y$ n'est autre que l'espace des orbites de Y. Remarquons aussi que $G \times_G Y = Y$ et $X \times_G G = X$. Si X est un espace fibré principal de groupe structural G, $X \times_G Y$ est le fibré associé de fibre Y et de groupe structural G. Si p est un point, et $\varepsilon : Y \to p$ l'unique application, l'application $\varepsilon \times i : X \times_G Y \to X \times_G p$ n'est autre que la projection du fibré sur sa base.

Soit $\pi : E \to B$ la projection d'un fibré universel d'un groupe G sur un classifiant de G, et supposons que G opère sur E à gauche. G opère alors sur $Y \times E$ à gauche par action diagonale, i. e. $g(y , z) = (gy , gz)$ pour $g \in G$, $y \in Y$, $z \in E$. Le groupe G opère librement sur $Y \times E$, et la projection $\pi : Y \times E \to Y$ commute avec l'action de G, et est une équivalence d'homotopie faible. L'application $\pi : Y \times E \to Y$ doit être imaginée comme l'analogue d'une résolution projective de Y sur G. On ne précisera pas cette idée.

Nous travaillerons sur un anneau fixe K comme dans le paragraphe précédent. Pour tout espace X, on notera $C(X)$ le groupe des chaînes singulières normalisées de X à coefficients dans K, et $H(X) = H(C(X))$. La multiplication $G \times G \to G$ induit une multiplication $C(G) \otimes C(G) \to C(G)$, qui fait de $C(G)$ une algèbre différentielle graduée [3]. Quand G opère sur X à droite, l'application $X \times G \to X$ induit une application $C(X) \otimes C(G) \to C(X)$ qui fait de $C(X)$ un $C(G)$-module à droite. De même, quand G opère sur Y à gauche, $C(Y)$ est un $C(G)$-module à gauche. Ce qui nous préoccupe est de voir sous quelles conditions $H(X \times_G Y) = \mathrm{Tor}^{C(G)}(C(X) , C(Y))$. Pour cela, nous aurons besoin d'une suite spectrale générale, qui sous certaines conditions se réduira à la suite spectrale d'un certain espace fibré, et nous aurons à démontrer une proposition à propos de cette suite spectrale.

DÉFINITION. - Soit Λ une algèbre différentielle. Un Λ-<u>module filtré</u> est un

---

[3] Pour plus de détails, voir [8].

Λ-module M muni de Λ-sous-modules $F_p M$ tels que

1. $F_p M = 0$ pour $p < 0$;

2. $F_p M$ contient le p-squelette de M, i. e. le sous-Λ-module engendré par les M_q, pour $q \leqslant p$;

3. Si on note $B(M)$ le module différentiel $E^1_{*,0}(M) = \bigoplus_p E^1_{p,0}$, l'application naturelle $H(\Lambda) \otimes B(M) \to H(\Lambda) \otimes E^1(M) \to E^1(M)$ induit un isomorphisme $H(\Lambda) \otimes_{H_0(\Lambda)} B(M) \overset{\approx}{\to} E^1(M)$;

4. $B(M)$ est $H_0(\Lambda)$-projectif.

Remarquons que grâce aux définitions, l'application naturelle $\Lambda \otimes M \to M$ est une application de Λ-modules filtrés, en posant $F_p(\Lambda \otimes M) = \Lambda \otimes F_p M$, ce qui donne un sens aux parties 3 et 4 de la définition ci-dessus.

EXEMPLE. - Si M est $\Lambda^{\#}$-projectif, avec $M_q = 0$ pour $q < 0$, on a un Λ-module fibré en prenant pour $F_p(M)$ le p-squelette de M.

PROPOSITION 3.1. - Si G est un groupe topologique, et $\pi : Y \to p \times_G Y$, où p est un point, est la projection d'un espace fibré principal, $C(Y)$, muni de la filtration classique, est un $C(G)$-module filtré, et

$$K \otimes_{H_0(\Lambda)} B(C(Y)) = C(p \times_G Y) \quad .$$

Cette proposition est un corollaire immédiat du calcul de J. P. SERRE du terme E^1 de la suite spectrale d'un espace fibré [9].

PROPOSITION 3.2. - Soient M un Λ-module filtré, P une résolution projective de M, alors

1. $D(P)$ est un Λ-module filtré quand on le filtre par les squelettes.

2. L'application naturelle $\varepsilon : B(D(P)) \to B(M)$ induit un isomorphisme d'homologie.

DÉMONSTRATION. - La partie 1 est immédiate, vu qu'on peut supposer que $D(P)$ est un $\Lambda^{\#}$-module de la forme $\Lambda^{\#} \otimes N$. Comme P est une résolution projective de M, $H(D(P)) \overset{\approx}{\to} H(M)$. De plus, les deux suites spectrales ont $H(\Lambda)$ pour fibre au niveau E^1, donc, par un théorème classique sur les suites spectrales ([6], [8]), on a

$$H(B(D(P))) \overset{\approx}{\to} H(B(M)) \quad .$$

THÉORÈME 3.1. - Soient G un groupe topologique, X un espace sur lequel G opère à droite, et Y un espace fibré principal de groupe structural G opérant à gauche, alors

$$H(X \times_G Y) = \mathrm{Tor}^{C(G)}(C(X)\ ,\ C(Y)) \quad .$$

DÉMONSTRATION. - Le cas particulier ou X est réduit à un point est une conséquence immédiate des deux propositions précédentes appliquées à $\Lambda = C(G)$. Soit P une résolution projective de $C(Y)$. Considérons P comme un Λ-module filtré par les squelettes. On définit une filtration sur $C(X) \otimes_\Lambda D(P)$ en posant $F_p(C(X) \otimes_\Lambda D(P)) = C(X) \otimes_\Lambda F_p(D(P))$. On munit $C(X \times_G Y)$ de la filtration obtenue de la façon classique en le considérant comme un espace fibré. Le calcul de J. P. SERRE montre que

$$E^1(C(X \times_G Y)) = H(X) \otimes_{H_0(G)} B(C(Y)) \quad .$$

De plus, on a $E^1(C(X) \otimes_{C(G)} D(P)) = H(X) \otimes_{H_0(G)} B(D(P))$. L'application naturelle $C(X) \otimes_\Lambda D(P) \to C(X \times_G Y)$ préserve la filtration, et au niveau E^1 , c'est le produit tensoriel de l'application identique de $H(X)$ avec l'application naturelle $B(D(P)) \to B(C(Y))$ de la proposition précédente. Par suite $E^2(C(X) \otimes_\Lambda D(P)) \to E^2(C(X \times_G Y))$, d'où le théorème.

COROLLAIRE 1. - Soient G un groupe topologique, et $\Pi : E \to B$ la projection d'un fibré universel de G sur un espace classifiant. Alors $H(B) = \mathrm{Tor}^{C(G)}(K\ ,K)$.

DÉMONSTRATION. - Ce théorème découle du précédent, et du théorème de changement de modules du paragraphe précédent, en remarquant que, si p est un point, $C(p) = K = H(p)$, donc K est un $C(G)$-module.

COROLLAIRE 2. - Soient G un groupe topologique, X un espace sur lequel G opère à droite, Y un espace sur lequel G opère à gauche, et E un fibré universel pour G , sur lequel G opère à gauche. Alors

$$H(X \times_G (Y \times E)) = \mathrm{Tor}^{C(G)}(C(X)\ ,\ C(Y)) \quad .$$

DÉMONSTRATION. - Ceci découle du théorème précédent en remarquant que $Y \times E$ est un fibré principal sur lequel G opère à gauche par action diagonale.

Soit U un espace, considérons $p \times_G (Y \times G \times U)$, où G opère sur $Y \times G$ par action diagonale et sur U trivialement. Alors $p \times_G (Y \times G) \times U = p \times_G (Y \times G \times U)$. De plus $Y \to Y \times G$, par $y \to (y\ ,\ e)$, et l'application $Y \to p \times_G (Y \times G)$ est un homéomorphisme.

4. Forme élémentaire du théorème de Borel sur l'homologie des espaces classifiants.

Nous continuons avec les hypothèses du paragraphe précédent.

PROPOSITION 4.1. - Soit $E(x_1 , \dots , x_n)$ l'algèbre extérieure sur K engendrée par des éléments $x_1 , \dots , x_n$ de **degrés** impairs. Soit $\Gamma(y_1 , \dots , y_n)$ l'algèbre de polynômes avec puissances divisées engendrée par des éléments (y_i) où $\deg y_i = \deg x_i + 1$. Alors

$$\mathrm{Tor}^{E(x_1,\dots,x_n)}(K , K) = \Gamma(y_1 , \dots , y_n) \quad .$$

DÉMONSTRATION. - On définit un opérateur différentiel sur $X = E(x_1 , \dots , x_n) \otimes \Gamma(y_1 , \dots , y_n)$ en posant $dy_i = x_i$, et $d(\gamma_k y_i) = x_i \cdot \gamma_{k-1} y_i$ pour $i = 1 , \dots , n$ et $k > 0$. En se rappelant que si y est de degré n , $\Gamma(y_i)_q = 0$ pour $q \not\equiv 0 \mod n$, que $\Gamma(y_i)_{kn}$ est libre de générateur $\gamma_k(y_i)$, et que d'autre part $\Gamma(y_1 , \dots , y_n) = \Gamma(y_1) \otimes \dots \otimes (y_n)$, on voit facilement que $H(X) = K$, et que X est projectif sur $E(x_1 , \dots , x_n)$. Par conséquent

$$\mathrm{Tor}^{E(x_1,\dots,x_n)}(K , K) = H(K \underset{E(x_1,\dots,x_n)}{\otimes} X) = \Gamma(y_1 , \dots , y_n) \quad .$$

THÉORÈME 4.1. (BOREL). - Soit G un groupe topologique, $\Pi : E \to B$ la projection d'un fibré universel pour G sur le classifiant, et supposons que $H_*(G) = E(x_1 , \dots , x_n)$ soit l'algèbre extérieure engendrée par les $x_1 , \dots , x_n$ de **degrés** impairs. Alors $H_*(B)$ est isomorphe à $\Gamma(y_1 , \dots , y_n)$ comme K-module.

DÉMONSTRATION. - D'après le théorème du paragraphe précédent, $H_*(B) = \mathrm{Tor}^{C(G)}(K , K)$. D'après le théorème 2 de la section 2, on a une suite spectrale où $E^2 = \mathrm{Tor}^{H_*(G)}(K , K)$ et $E^r \Rightarrow \mathrm{Tor}^{C(G)}(K , K)$. D'après la proposition précédente $E^2 = \Gamma(y_1 , \dots , y_n)$, et on voit que les éléments de E^2 sont tous de degrés pairs, par suite $E^2 = E^\infty$, i. e. E^2 est le gradué associé à $H_*(B)$ convenablement filtré. Mais $E^2 = \Gamma(y_1 , \dots , y_n)$ est un K-module libre, donc $H_*(B)$ et $\Gamma(y_1 , \dots , y_n)$ sont isomorphes comme K-modules, ce qui démontre le théorème.

Cet énoncé est une forme élémentaire du théorème de Borel pour plusieurs raisons d'abord, il ne dit rien sur la structure multiplicative de la cohomologie de B ; ensuite il ne donne aucune propriété de la suspension $\sigma_* : H_*(G) \to H_*(B)$ (exposé 4). Enfin il ne parle pas du théorème réciproque qui est également vrai, moyennant certaines hypothèses. Nous consacrons le prochain paragraphe à mettre en place l'artillerie homologique nécessaire pour préciser ces relations.

5. Produits de torsion itérés de Λ-bimodules.

DÉFINITION. - Un Λ-bimodule A est un module différentiel A muni de deux applications $\varphi_g : \Lambda \otimes A \to A$ et $\varphi_d : A \otimes \Lambda \to A$ telles que

1. φ_g munit A d'une structure de Λ-module à gauche ;
2. φ_d munit A d'une structure de Λ-module à droite ;
3. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} \Lambda \otimes A \otimes \Lambda \arrow[r, "\varphi_g \otimes i"] \arrow[d, "i \otimes \varphi_d"] & A \otimes \Lambda \arrow[d, "\varphi_d"] \\ \Lambda \otimes A \arrow[r, "\varphi_g"] & A \end{tikzcd}$$

est commutatif.

EXEMPLE. - Λ est un Λ-bimodule avec $\varphi_d = \varphi_g = \varphi : \Lambda \otimes \Lambda \to \Lambda$.

DÉFINITIONS. - Soient $A^0 , \ldots , A^n$ des Λ-bimodules $(n \geqslant 0)$. Une <u>résolution projective à gauche</u> de la suite $(A^0 , \ldots , A^n)$ est une suite $Y = (Y^0 , \ldots , Y^n)$ de $n + 1$ résolutions projectives de Λ-modules à gauche, où

1. Y^n est une résolution projective de A^n ;
2. Y^i est une résolution projective de $A^i \otimes_\Lambda D(Y^{i+1})$ pour $i = 0 , \ldots , n-1$.

Une <u>résolution projective à droite</u> de la suite $(A^0 , \ldots , A^n)$ est une suite $X = (X^0 , \ldots , X^n)$ de résolutions projectives de Λ-modules à droite, où

1. X^0 est une résolution projective de A^0 ;
2. X^{i+1} est une résolution projective de $D(X^i) \otimes_\Lambda A^{i+1}$ pour $i = 0 , \ldots , n - 1$.

LEMME 5.1. - Soient $A^0 , \ldots , A^n$ des Λ-bimodules $(n \geqslant 1)$. Soit $X = (X^0 , \ldots , X^n)$ une résolution projective à droite et $Y = (Y^0 , \ldots , Y^n)$ une résolution projective à gauche de la suite $(A^0 , \ldots , A^n)$. Alors $H(D(X^i) \otimes_\Lambda D(Y^{i+1}))$ ne dépend pas de i pour $i = 0 , \ldots , n - 1$.

DÉMONSTRATION. - En vertu de la théorie du paragraphe 2 (théorème 2.1), on a, pour $i > 0$

$$H(D(X^i) \otimes_\Lambda D(Y^{i+1})) = H(D(X^{i-1}) \otimes_\Lambda A) \otimes_\Lambda D(Y^{i+1}))$$

$$= H(D(X^{i-1}) \otimes_\Lambda (A \otimes D(Y^{i+1}))) = H(D(X^{i-1}) \otimes_\Lambda D(Y^i)) \quad ,$$

C. Q. F. D.

DÉFINITION. - Dans les conditions du lemme précédent, on pose

$$\mathrm{Tor}^\Lambda(A^0 , \ldots , A^n) = H(D(X^0) \otimes_\Lambda D(Y^1)) = \ldots = H(D(X^{n-1}) \otimes D(Y^n)) \quad .$$

Pour $n = 0$, on pose $\mathrm{Tor}^\Lambda(A^0) = H(A^0)$.

COMMENTAIRES. - $\mathrm{Tor}^\Lambda(A^0 , \ldots , A^n)$ ne dépend pas des résolutions projectives choisies. C'est un $H(\Lambda)$-bimodule, et c'est un foncteur covariant des $(n + 1)$-variables $A^0 , \ldots , A^n$. Si Λ est un K-module projectif, on obtient le même résultat par un procédé plus familier [3]. Nous y reviendrons plus loin. Dans le cas géométrique, les algèbres différentielles qu'on considère seront automatiquement projectives comme K-modules (mais non comme modules différentiels). Comme on n'a pas supposé l'algèbre Λ projective comme K-module, le procédé ci-dessus s'applique, par exemple, au cas où $K = Z$, Λ étant un anneau quelconque concentré en degré 0 . (Cas particulier important : Λ est un anneau local).

Remarquons que $\mathrm{Tor}^\Lambda(A^0 , A^1)$ n'est autre que ce qu'on a défini au paragraphe 2.

THÉORÈME 5.1. - Soient $A^0 , \ldots , A^n$ des Λ-bimodules. Alors $H(A^0) , \ldots , H(A^n)$ sont des $H(\Lambda)$-bimodules, et on a une suite spectrale où $E^2 = \mathrm{Tor}^{H(\Lambda)}(H(A^0) , \ldots , H(A^n))$ et $E^r \Rightarrow \mathrm{Tor}^\Lambda(A^0 , \ldots , A^n)$.

DÉMONSTRATION. - Si X est une résolution projective de $A = (A^0 , \ldots , A^n)$ à droite sur Λ , et Y une résolution projective à gauche, alors $H(X)$ est une résolution projective de $H(A) = (H(A^0) , \ldots , H(A^n))$ à droite sur $H(\Lambda)$, et $H(Y)$ une résolution projective à gauche. Pour $0 < m < n$, on filtre $D(X^{n-m}) \otimes_\Lambda D(Y^{n-m+1})$ par la somme de tous les degrés de résolution : on obtient

$$E^1 = D(H(X)^{n-m} \otimes_{H(\Lambda)} D(H(Y)^{n-m+1})) \quad ,$$

d'où on déduit le résultat.

Maintenant que nous avons notre suite spectrale fondamentale, passons à un théorème de changement d'anneau et de modules.

THÉORÈME 5.2. - Soit $f : \Lambda \to \Gamma$ un homomorphisme d'algèbres différentielles tel que $f_* : H(\Lambda) \to H(\Gamma)$ soit un isomorphisme. Soient $A^0 , \ldots , A^n$ des Λ-bimodules, $B^0 , \ldots , B^n$ des Γ-bimodules, et $g^i : A^i \to B^i$ des homomorphismes de Λ-bimodules tels que les $g^i_* : H(A^i) \to H(B^i)$ soient des isomorphismes pour $i = 0 , \ldots , n$. Alors

$$\mathrm{Tor}^\Lambda(A^0 , \ldots , A^n) \stackrel{\approx}{\to} \mathrm{Tor}^\Lambda(B^0 , \ldots , B^n) \stackrel{\approx}{\to} \mathrm{Tor}^\Gamma(B^0 , \ldots , B^n)$$

sont des isomorphismes.

Ce théorème découle immédiatement du précédent.

Remarquons qu'on pourrait généraliser le procédé ci-dessus au cas où on a des algèbres différentielles $\Lambda^1 , \ldots , \Lambda^n$, et des modules différentiels $A^0 , \ldots , A^n$, où A^i est un module à gauche sur Λ^i, à droite sur Λ^{i+1}. Comme nous n'aurons pas besoin de cette théorie, nous ne la développerons pas.

PROPOSITION. - Soient $A^0 , \ldots , A^n$ des Λ-bimodules. Alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Tor}^\Lambda(A^0 , \ldots , A^n) &= \mathrm{Tor}^\Lambda(\Lambda , A^0 , \ldots , A^n) \\ &= \mathrm{Tor}^\Lambda(A^0 , \Lambda , A^1 , \ldots , A^n) = \ldots \\ &= \mathrm{Tor}^\Lambda(A^0 , \ldots , A^n , \Lambda) .\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION immédiate. - Ce n'est qu'une généralisation de l'identité

$$A^0 \otimes_\Lambda A^1 = \Lambda \otimes_\Lambda A^0 \otimes_\Lambda A^1 = A^0 \otimes_\Lambda \Lambda \otimes_\Lambda A^1 = A^0 \otimes_\Lambda A^1 \otimes_\Lambda \Lambda .$$

Les identifications ci-dessus sont distinctes des isomorphismes de permutations.

DÉFINITION. - Une algèbre différentielle augmentée se compose d'une algèbre différentielle Λ, d'un idéal I de K, et d'un homomorphisme d'algèbres différentielles $\varepsilon : \Lambda \to K/I$, où K/I est considérée comme une algèbre différentielle concentrée en degré zéro.

La suite $(K/I , \ldots , K/I)$ de $n + 1$ modules égaux à K/I se notera pour abréger $K/I^{(n)}$. On a $K/I \otimes_\Lambda K/I = K/I$, et $(K/I^{(p)} , K/I^{(q)}) = K/I^{(p+q+1)}$. L'application naturelle $\mathrm{Tor}^\Lambda(K/I^{(n)}) \to \mathrm{Tor}^\Lambda(K/I^{(1)})$ obtenue en contractant les i premiers exemplaires de K/I de la suite $K/I^{(n)}$ en un seul, et les $n + 1 - i$ derniers en un seul, s'appelle <u>projection sur le</u> <u>i-ième facteur</u> $(i = 1 , \ldots , n)$ et se note Π^n_i. L'application naturelle $\tilde{\Pi}^n_i : \mathrm{Tor}^\Lambda(K/I^{(n)}) \to \mathrm{Tor}^\Lambda(K/I^{(n-1)})$ obtenue en contractant le i-ième et le $(i+1)$-ième exemplaires de K/I en un seul dans la suite $K/I^{(n)}$ s'appelle <u>projection sur le</u> <u>i-ième cofacteur</u> $(i = 1 , \ldots , n)$.

Considérons le cas $n = 2$: soient X une résolution projective de K/I à droite sur Λ, Y une résolution projective à gauche. On a

$$\mathrm{Tor}^{\Lambda}(K/I^{(2)}) = H(D(X) \otimes_{\Lambda} K/I \otimes_{\Lambda} D(Y)) ,$$

et l'application Π_1^2 est induite par la projection naturelle

$$D(X) \otimes_{\Lambda} K/I \otimes_{\Lambda} D(Y) \to D(X) \otimes_{\Lambda} K/I \otimes_{\Lambda} K/I = D(X) \otimes_{\Lambda} K/I ,$$

et dans ce cas $\Pi_1^2 = \tilde{\Pi}_2^2$, et $\Pi_2^2 = \tilde{\Pi}_1^2$.

Posons $K/I^{(-1)} = \Lambda$. On a

$$\mathrm{Tor}^{\Lambda}(K/I^{(p-1)}, \Lambda, K/I^{(q-1)}) = \mathrm{Tor}^{\Lambda}(K/I^{(p+q-1)})$$

et $\varepsilon : \Lambda \to K/I$ induit une application dite diagonale

$$\begin{aligned}\mathrm{Tor}^{\Lambda}(K/I^{(p+q-1)}) &= \mathrm{Tor}^{\Lambda}(K/I^{(p-1)}, \Lambda, K/I^{(q-1)}) \\ &\to \mathrm{Tor}^{\Lambda}(K/I^{(p-1)}, K/I, K/I^{(q-1)}) = \mathrm{Tor}^{\Lambda}(K/I^{(p+q)}) .\end{aligned}$$

Autrement dit, pour $n \geqslant 1$, on a des applications diagonales $\Delta_r^n : \mathrm{Tor}^{\Lambda}(K/I^{(n)}) \to \mathrm{Tor}^{\Lambda}(K/I^{(n+1)})$ pour $r = 1, \ldots, n$. L'application unique

$$\Delta_1^1 : \mathrm{Tor}^{\Lambda}(K/I^{(1)}) \to \mathrm{Tor}^{\Lambda}(K/I^{(2)})$$

se note, en abrégé, Δ, et s'appelle l'application diagonale.

Tout ce qui précède pourrait se faire dans un cadre plus général, mais encore une fois, on n'en a pas besoin pour les applications. La raison pour laquelle on exige $\varepsilon : \Lambda \to K/I$ est d'assurer que $\mathrm{Tor}^{\Lambda}(K/I^{(n)})$ soit un module sur un anneau commutatif. Dans la théorie commutative, ce n'est pas nécessaire : on peut prendre n'importe quel anneau A concentré en degré zéro, avec un épimorphisme $\varepsilon : \Lambda \to A$. Ainsi, par exemple, si Λ est un anneau local, d'idéal maximal M, on peut prendre $\varepsilon : \Lambda \to \Lambda/M^m$, m quelconque.

THÉORÈME 5.3. - Soit $\varepsilon : \Lambda \to K/I$ une algèbre différentielle augmentée, alors

1. Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tor}^{\Lambda}(K/I^{(1)}) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & \mathrm{Tor}^{\Lambda}(K/I^{(2)}) \arrow[d, "\Delta_1^2"] \\
\mathrm{Tor}^{\Lambda}(K/I^{(2)}) \arrow[r, "\Delta_2^2"] & \mathrm{Tor}^{\Lambda}(K/I^{(3)})
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

2. $\Pi_1^2 \circ \Delta = \Pi_2^2 \circ \Delta =$ identité : $\operatorname{Tor}^\Lambda(K/I^{(1)}) \to \operatorname{Tor}^\Lambda(K/I^{(1)})$;
3. $\tilde{\Pi}_1^3 \circ \Delta_1^2 = \tilde{\Pi}_2^3 \circ \Delta_1^2 =$ identité : $\operatorname{Tor}^\Lambda(K/I^{(2)}) \to \operatorname{Tor}^\Lambda(K/I^{(2)})$;
4. $\tilde{\Pi}_2^3 \circ \Delta_2^2 = \tilde{\Pi}_3^3 \circ \Delta_2^2 =$ identité : $\operatorname{Tor}^\Lambda(K/I^{(2)}) \to \operatorname{Tor}^\Lambda(K/I^{(2)})$;
5. $\Pi_i^3 \circ \Delta_1^2 \circ \Delta =$ identité : $\operatorname{Tor}^\Lambda(K/I^{(1)}) \to \operatorname{Tor}^\Lambda(K/I^{(1)})$,

pour $i = 1 , 2 , 3$.

DÉMONSTRATION. - Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Tor}^\Lambda(K/I , \Lambda , \Lambda , K/I) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Tor}^\Lambda(K/I , \Lambda , K/I , K/I) \arrow[d] \\
\operatorname{Tor}^\Lambda(K/I , K/I , \Lambda , K/I) \arrow[r] & \operatorname{Tor}^\Lambda(K/I , K/I , K/I , K/I)
\end{tikzcd}$$

démontre la partie 1 car, avec les identifications faites, c'est le même diagramme.

Soient X une résolution projective de K/I à droite sur Λ , Y une résolution projective de K/I à gauche sur Λ , alors Δ est induite par $D(X) \otimes_\Lambda \Lambda \otimes_\Lambda D(Y) \to D(X) \otimes_\Lambda K/I \otimes_\Lambda D(Y)$, $\Pi_1^2 \circ \Delta$ est représentée par l'application naturelle

$$D(X) \otimes_\Lambda D(Y) \to D(X) \otimes_\Lambda K/I \quad ;$$

et $\Pi_2^2 \circ \Delta$ par

$$D(X) \otimes_\Lambda D(Y) \to K/I \otimes_\Lambda D(Y) \quad .$$

Ces deux applications donnent l'identité au niveau de l'homologie, d'où on déduit la partie 2.

Les démonstrations des parties 3 et 4 sont semblables : on les laisse au lecteur.

Intuitivement, la situation est la suivante : soient X un espace, X^n le produit de X par lui-même n fois. $\operatorname{Tor}^\Lambda(K/I^{(n)})$ correspond à l'homologie de X^n . L'application Π_i^n correspond à l'application de l'homologie de X^n sur celle de X induite par la i-ième application coordonnée. L'application $\tilde{\Pi}_i^n$ correspond à l'application de l'homologie de X^n sur celle de X^{n-1} induite par la projection obtenue en omettant la i-ième coordonnée. Dans de nombreuses situations, cette correspondance va se préciser.

THÉORÈME 5.4. - Soit $\varepsilon : \Lambda \to K/I$ une algèbre différentielle augmentée, et supposons que $\operatorname{Tor}^\Lambda(K/I^{(1)})$ soit K/I-projectif. Alors

1. $\operatorname{Tor}^\Lambda(K/I^{(p+q)}) = \operatorname{Tor}^\Lambda(K/I^{(p)}) \otimes \operatorname{Tor}^\Lambda(K/I^{(q)})$,
2. $\operatorname{Tor}^\Lambda(K/I^{(1)})$ est une coalgèbre.

DÉMONSTRATION. - Soient X une résolution projective de $K/I^{(p+q)}$ à droite sur Λ et Y une résolution projective à gauche. Supposons qu'on sache déjà que $\mathrm{Tor}^{\Lambda}(K/I^{(p)})$ et $\mathrm{Tor}^{\Lambda}(K/I^{(q)})$ sont K/I-projectifs.

On a

$$H(D(X^{p-1}) \otimes_{\Lambda} K/I) = \mathrm{Tor}^{\Lambda}(K/I^{(p)})$$

$$H(K/I \otimes_{\Lambda} D(Y^{p+1})) = \mathrm{Tor}^{\Lambda}(K/I^{(q)})$$

$$H(D(X^{p-1}) \otimes_{\Lambda} K/I \otimes_{\Lambda} D(Y^{p+1})) = \mathrm{Tor}^{\Lambda}(K/I^{(p+q)}) \quad .$$

De plus $D(X^{p-1}) \otimes_{\Lambda} K/I$ et $K/I \otimes_{\Lambda} D(Y^{p+1})$ **sont des** K/I-modules projectifs, et

$$D(X^{p-1}) \otimes_{\Lambda} K/I \otimes_{\Lambda} D(Y^{p+1}) = (D(X^{p-1}) \otimes_{\Lambda} K/I) \otimes_{K/I} (K/I \otimes_{\Lambda} D(Y^{p+1})) \quad .$$

Il découle maintenant de la forme élémentaire de la formule de Künneth que la partie 1 est vraie. La partie 1 se démontre ainsi dans le cas général par récurrence.

En vertu du théorème précédent,

$$\Delta : \ \mathrm{Tor}^{\Lambda}(K/I^{(1)}) \to \mathrm{Tor}^{\Lambda}(K/I^{(2)}) = \mathrm{Tor}^{\Lambda}(K/I^{(1)}) \otimes_{K/I} \mathrm{Tor}^{\Lambda}(K/I^{(1)})$$

est une application diagonale qui munit $\mathrm{Tor}^{\Lambda}(K/I^{(1)})$ d'une structure de co-algèbre, avec pour co-unité l'application naturelle $\mathrm{Tor}^{\Lambda}(K/I^{(1)}) \to K/I$.

DÉFINITION. - Soit A un Λ-bimodule. Une résolution simultanée de A sur Λ est une suite $(X_q)_{q \geqslant 0}$ de Λ-bimodules, avec des homomorphismes $\alpha_{q+1} : X_{q+1} \to X_q$ de Λ-bimodules de degré zéro, et un homomorphisme $\alpha_0 : X_0 \to A$ tels que (X_q , α_q) soit à la fois une résolution projective de A considéré comme Λ-module à gauche et de A considéré comme Λ-module à droite.

PROPOSITION 5.1. - Soit Λ une algèbre différentielle, projective en tant que module différentiel, et A un Λ-bimodule. Alors on peut trouver une résolution simultanée de A sur Λ.

DÉMONSTRATION. - Soit Λ^* l'algèbre opposée à Λ . A est alors un $\Lambda^* \otimes \Lambda$-module à gauche, et une résolution projective de A sur $\Lambda^* \otimes \Lambda$ fera l'affaire.

PROPOSITION 5.2. - Soit Λ une algèbre différentielle projective en tant que module différentiel, $A^0 , \ldots , A^n$ des Λ-modules, et X^i une résolution simultanée de A^i pour $i = 0 , \ldots , n$. Alors

$$\mathrm{Tor}^{\Lambda}(A^0 , \ldots , A^n) = H(D(X^0) \otimes_{\Lambda} \ldots \otimes_{\Lambda} D(X^n)) \quad .$$

DEMONSTRATION. - X^0 est une résolution projective de A^0 comme module à droite, $D(X^0) \otimes_{\Lambda} X^1$ une résolution projective de $D(X^0) \otimes_{\Lambda} A^1$ comme module à droite, et ainsi de suite.

DÉFINITIONS. - Soient A et B deux modules. On définit $T : A \otimes B \to B \otimes A$ par $T(x \otimes y) = (-1)^{pq} (y \otimes x)$ si $x \in A_p$ et $y \in B_q$. L'algèbre différentielle Λ est dite <u>commutative</u> si le diagramme

$$\begin{tikzcd} \Lambda \otimes \Lambda \arrow[d, "T"] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ \Lambda \otimes \Lambda \arrow[r, "\varphi"'] & \Lambda \end{tikzcd}$$

est commutatif. Si Λ est commutative, tout Λ-module à gauche se munit d'une structure de Λ-bimodule, de façon que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \Lambda \otimes A \arrow[d, "T"] \arrow[dr, "\varphi_g = \varphi"] & \\ A \otimes \Lambda \arrow[r, "\varphi_d"'] & A \end{tikzcd}$$

soit commutatif.
En théorie commutative, toutes les résolutions sont des résolutions simultanées.

PROPOSITION 5.3. - Soit Λ une algèbre différentielle commutative, $(A^0 , \ldots , A^n)$ des Λ-modules différentiels, X^i une résolution projective de A^i pour $i = 0 , \ldots , n$. Alors

$$\mathrm{Tor}^{\Lambda}(A^0 , \ldots , A^n) = H(D(X^0) \otimes \ldots \otimes D(X^n)) \quad .$$

PROPOSITION 5.4. - Soit $\varepsilon : \Lambda \to K$ une algèbre différentielle augmentée, projective en tant que K-module, et soit $\Lambda^n = \Lambda \otimes \ldots \otimes \Lambda$ l'algèbre différentielle augmentée, produit tensoriel n fois de Λ . Alors

$$\mathrm{Tor}^{\Lambda}(K^{(n)}) = \mathrm{Tor}^{\Lambda^n}(K , K) \qquad \text{pour } n > 0 \quad .$$

DÉMONSTRATION. - Soit Y une résolution projective de K sur Λ à gauche, et soit W la résolution correspondante de K sur Λ^n , de sorte que $D(W) = D(Y) \otimes \ldots \otimes D(Y)$ (n facteurs). On a $\mathrm{Tor}^{\Lambda^n}(K , K) = H(K \otimes_{\Lambda^n} D(W))$. Soit V la résolution projective de $K^{(n)}$ à gauche définie par $V^n = Y$,

$$V^{k-1} = Y \otimes_\Lambda V^k \xrightarrow{\alpha_0 \otimes 1} K \otimes_\Lambda V^k \quad .$$

On a alors

$$\mathrm{Tor}^\Lambda(K^{(n)}) = H(K \otimes_\Lambda V^1) \quad ,$$

mais

$$K \otimes_\Lambda V^1 = K \otimes_{\Lambda^n} D(W) \quad ,$$

ce qui démontre la proposition.

PROPOSITION 5.5. - Soient $\varepsilon : \Lambda \to K/I$ une algèbre différentielle augmentée, Y une résolution projective à gauche de $K/I^{(2)}$ sur Λ, et $f : D(Y^2) \to D(Y^1)$ une application telle que le diagramme ci-dessous soit commutatif à l'homotopie près sur Λ :

$$\begin{tikzcd} D(Y^2) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & D(Y^1) \arrow[d, "g"] \\ & K/I \otimes_\Lambda D(Y^2) \end{tikzcd} \quad ,$$

où g est l'application qui vient de ce que Y^1 est une résolution projective de $K/I \otimes_\Lambda D(Y^2)$, et h est l'application naturelle

$$D(Y^2) = \Lambda \otimes_\Lambda D(Y^2) \xrightarrow{\varepsilon \otimes 1} K/I \otimes_\Lambda D(Y^2) \quad .$$

Alors f induit l'application diagonale définie plus haut.

DÉMONSTRATION. - On a un diagramme

$$\begin{tikzcd} D(X) \otimes_\Lambda D(Y) \arrow[r, "i \otimes f"] \arrow[dr, "i \otimes h"'] & D(X) \otimes_\Lambda D(Y^1) \arrow[d, "i \otimes g"] \\ & D(X) \otimes_\Lambda K/I \otimes_\Lambda D(Y^2) \end{tikzcd}$$

commutatif à l'homotopie près par hypothèse. L'application $i \otimes g$ est une équivalence et $i \otimes h$ induit l'application diagonale que l'on sait. Il en est donc de même de $i \otimes f$, et la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} D(X) \otimes_\Lambda D(Y^2) \arrow[r, "i \otimes f"] \arrow[d] & D(X) \otimes_\Lambda D(Y^1) \arrow[d] \\ K/I \otimes_\Lambda D(Y^2) \arrow[r, "i \otimes f"] & K/I \otimes_\Lambda D(Y^1) \end{tikzcd}$$

démontre la proposition.

6. Algèbres différentielles supplémentées.

DÉFINITION. - Une algèbre différentielle supplémentée est une algèbre différentielle Λ, projective en tant que module, munie d'une augmentation $\varepsilon : \Lambda \to K$. Le noyau de ε se note $I(\Lambda)$.

EXEMPLE. - Si M est un monoïde topologique, $C(M)$ est une algèbre différentielle supplémentée.

COMMENTAIRES. - Si Λ est une algèbre différentielle supplémentée, $I(\Lambda)$ est un module projectif ; et $I(\Lambda)$ est un module différentiel projectif si et seulement si Λ est projective en tant que module différentiel. Remarquons qu'en général, si K est un anneau de Dedekind, et si A est un module différentiel sur K, alors A est un module différentiel projectif si et seulement si A et $H(A)$ sont tous deux des modules projectifs.

DÉFINITION. - Soient Λ une algèbre différentielle supplémentée, et A un Λ-module à droite. Posons $\mathfrak{X}(A)_p = A \otimes I(\Lambda)^p \otimes \Lambda$, où $I(\Lambda)^p$ désigne le produit tensoriel de $I(\Lambda)$ avec lui-même p fois. Soit $\alpha_0 : \mathfrak{X}(A)_0 = A \otimes \Lambda \to A$ l'application naturelle, $\alpha_{p+1} : \mathfrak{X}(A)_{p+1} \to \mathfrak{X}(A)_p$ l'application définie par :

$$\begin{aligned}\alpha_{p+1}(a \otimes \lambda_1 \otimes \dots \otimes \lambda_{p+1} \otimes \lambda) &= a\lambda_1 \otimes \lambda_2 \otimes \dots \otimes \lambda_{p+1} \otimes \lambda \\ &+ \sum_{j=1}^{p} (-1)^j \, a \otimes \lambda_1 \otimes \dots \otimes \lambda_j \lambda_{j+1} \otimes \dots \otimes \lambda_{p+1} \otimes \lambda \\ &+ (-1)^{p+1} \, a \otimes \lambda_1 \otimes \dots \otimes \lambda_p \otimes \lambda_{p+1} \lambda ,\end{aligned}$$

et posons

$$\mathfrak{X}(A) = \{\mathfrak{X}(A)_p , \alpha_p\} .$$

PROPOSITION 6.1. - Si A est un Λ-module à droite,

1. $\alpha_{o,*} : H_*(D(\mathfrak{X}(A))) \to H(A)$ est un isomorphisme.
2. Si A est un module projectif, alors $\mathfrak{X}(A)^{\#}$ est une résolution projective de $A^{\#}$ sur $\Lambda^{\#}$;
3. Si A et Λ sont des modules différentiels projectifs, $\mathfrak{X}(A)$ est une résolution projective de A sur Λ.

DÉMONSTRATION. - Il suffit de remarquer que la suite de Λ-modules

$$\dots \to \mathfrak{X}(A)_{p+1} \to \mathfrak{X}(A)_p \to \dots \to \mathfrak{X}(A)_0 \to A \to 0$$

est exacte comme suite de modules. Sous les hypothèses de la partie 2, chacun des $\mathfrak{X}(A)^{\#}_p$ est $\Lambda^{\#}$-projectif, et sous les hypothèses de la partie 3, la suite ci-dessus est une suite exacte de Λ-modules.

DÉFINITION. - Soit B un Λ-module à gauche ; soient

$$\mathcal{Y}(B)_p = \Lambda \otimes I(\Lambda)^p \otimes B \ , \quad \alpha_0 : \quad \mathcal{Y}(B)_0 = \Lambda \otimes B \to B$$

l'application naturelle,

$$\alpha_{p+1} : \mathcal{Y}(B)_{p+1} \to \mathcal{Y}(B)_p$$

l'application définie par

$$\begin{aligned}\alpha_{p+1}(\lambda \otimes \lambda_1 \otimes \ldots \otimes \lambda_{p+1} \otimes b) &= \lambda\lambda_1 \otimes \lambda_2 \otimes \ldots \otimes \lambda_{p+1} \otimes b \\ &+ \sum_{j=1}^{p}(-1)^{j+1} \lambda \otimes \lambda_1 \otimes \ldots \otimes \lambda_j \lambda_{j+1} \otimes \ldots \otimes \lambda_{p+1} \otimes b \\ &+ (-1)^{p+1} \lambda \otimes \lambda_1 \otimes \ldots \otimes \lambda_p \otimes \lambda_{p+1} b \quad .\end{aligned}$$

On pose

$$\mathcal{Y}(B) = \{\mathcal{Y}(B)_p , \alpha_p\} \quad .$$

PROPOSITION 6.2. - Soit B un Λ-module à gauche ; alors :

1. $\alpha_{0,*} : H_*(D(\mathcal{Y}(B))) \to H_*(B)$ est un isomorphisme ;

2. Si B est un module projectif, $\mathcal{Y}(B)^{\#}$ est une résolution projective de $B^{\#}$ sur $\Lambda^{\#}$;

3. Si B et Λ sont des modules différentiels projectifs, $\mathcal{Y}(B)$ est une résolution projective de B sur Λ .

DÉFINITION. - Si A est un Λ-module à droite, B un Λ-module à gauche,

$D(\mathfrak{X}(A))$ est la <u>bar-construction sur</u> A

$D(\mathcal{Y}(B))$ est la <u>bar-construction sur</u> B .

Dans le cas $A = B = K$, les <u>bar-constructions</u> ont été introduites par EILENBERG-MACLANE. Pour plus de détails sur ces constructions, voir [6], [7] et [8].

DÉFINITIONS et COMMENTAIRES. - Si Λ est une algèbre différentielle supplémentée, on pose $B(\Lambda) = K \otimes_\Lambda D(\mathcal{Y}(K))$. On fait cela parce que l'on pense intuitivement Λ comme un groupe topologique et $B(\Lambda)$ comme son espace classifiant. Le module différentiel $B(\Lambda)$ est bigradué : $B(\Lambda)_{0,*} = K$, $B(\Lambda)_{p,*} = (s(I(\Lambda)))^p$, produit tensoriel p-fois de $s(I(\Lambda))$ par lui-même. Un élément de $B(\Lambda)_{p,*}$ se note $[x_1 , \ldots , x_p]$, où $x_i \in I(\Lambda)$ pour $i = 1 , \ldots , p$. Une formule explicite pour $\Delta : B(\Lambda) \to B(\Lambda) \otimes B(\Lambda)$ est donnée par

$$\Delta([x_1 , \dots , x_p]) = [x_1 , \dots , x_p] \otimes 1 + \sum_{j=1}^{p-1} [x_1 , \dots , x_j] \otimes [x_{j+1} , \dots , x_p] + 1 \otimes [x_1 , \dots , x_p] .$$

Ce n'est autre que l'application diagonale bien connue d'EILENBERG-MACLANE, et elle est associative. De fait, comme coalgèbre, $B(\Lambda)$ n'est autre que la co-algèbre libre engendrée par $s(I(\Lambda)) = B(\Lambda)_{1,*}$.

Nous allons étudier les coalgèbres un peu plus en détail, mais insérons d'abord une proposition bien connue.

PROPOSITION 6.3. - Si Λ' et Λ'' sont des algèbres supplémentées, et $f : B(\Lambda') \otimes B(\Lambda'') \to B(\Lambda' \otimes \Lambda'')$ est l'application naturelle,

$$f_* : H_*(B(\Lambda') \otimes B(\Lambda'')) \to H_*(B(\Lambda' \otimes \Lambda''))$$

est un isomorphisme.

DÉFINITION. - Une coalgèbre est un module C muni d'applications $\Delta : C \to C \otimes C$, $\varepsilon : C \to K$, de degré zéro, telles que les diagrammes

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & C \otimes C \arrow[d, "\Delta \otimes i"] \\ C \otimes C \arrow[r, "i \otimes \Delta"] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & C \otimes C \arrow[d, "\varepsilon \otimes i"] \\ C \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[r, "\approx"] & K \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & C \otimes C \arrow[d, "i \otimes \varepsilon"] \\ C \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[r, "\approx"] & C \otimes K \end{tikzcd}$$

soient commutatifs. C est une <u>coalgèbre différentielle</u> si C est un module différentiel, et si les applications Δ et ε sont des homomorphismes de modules différentiels.

Soit C une coalgèbre différentielle, un <u>comodule à gauche sur</u> C est un module différentiel M muni d'une application de degré zéro $\Delta : M \to C \otimes M$ telle que les diagrammes

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & C \otimes M \arrow[d, "\Delta \otimes i"] \\ C \otimes M \arrow[r, "i \otimes \Delta"'] & C \otimes C \otimes M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & C \otimes M \arrow[d, "\varepsilon \otimes i"] \\ M \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[r, "\approx"] & K \otimes M \end{tikzcd}$$

soient commutatifs. On définit de même des comodules à droite.

Une <u>coalgèbre différentielle supplémentée</u> est une coalgèbre différentielle C, projective comme module, munie d'un homomorphisme de coalgèbres différentielles $\eta : K \to C$. On dit que C est connexe si $\eta_* : K \xrightarrow{\approx} H_0(C)$.

PROPOSITION 6.4. - Si Λ est une algèbre différentielle supplémentée, $B(\Lambda)$ est une coalgèbre différentielle supplémentée connexe.

La démonstration de cette proposition est immédiate à partir des définitions.

DÉFINITION. - Soient C une coalgèbre différentielle, A un C-comodule à droite, B un C-comodule à gauche. On note $A \square_C B$ le module différentiel, noyau de $\Delta \otimes i - i \otimes \Delta : A \otimes B \to A \otimes C \otimes B$.

Nous ne nous étendrons pas ici sur la théorie des coalgèbres et des comodules, mais nous allons indiquer rapidement ce dont nous aurons besoin en vue du théorème géométrique qui va suivre.

DÉFINITION. - Soient C une coalgèbre supplémentée connexe, B un comodule à gauche sur C. Posons $\mathcal{Y}(B)_0 = C \otimes B$, $\bar{\mathcal{Y}}(B)_{-1}$ désigne le conoyau de $B \to C \otimes B$, $\mathcal{Y}(B)_{-1} = C \otimes \bar{\mathcal{Y}}(B)_{-1}$. Quand on a défini $\bar{\mathcal{Y}}(B)_{-p}$, on pose $\mathcal{Y}(B)_{-p-1} = C \otimes \bar{\mathcal{Y}}(B)_{-p-1}$, et on note $\bar{\mathcal{Y}}(B)_{-p-1}$ le conoyau de $\bar{\mathcal{Y}}(B)_{-p} \to \mathcal{Y}(B)_{-p}$. On note $\alpha_{-p-1} : \mathcal{Y}(B)_{-p} \to (B)_{-p-1}$ l'application naturelle

$$\mathcal{Y}(B)_{-p} \to \bar{\mathcal{Y}}(B)_{-p-1} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{Y}(B)_{-p-1} \quad .$$

Soit $D(\mathcal{Y}(B))$ le complexe double tel que, comme module, $D(\mathcal{Y}(B)) = \bigoplus s^{-p}(\mathcal{Y}(B)_{-p})$, d' est l'opérateur différentiel induit par les différentielles internes des $\mathcal{Y}(B)_{-p}$, et d'' est induit par les applications α_p.

Soit $J(C)$ le conoyau de $\eta : K \to C$. Comme module, $\mathcal{Y}(B)_{-p} = C \otimes J(C)^p \otimes B$, et on pourrait écrire des formules explicites pour α_{-p} grâce aux comultiplications $C \to C \otimes C$ et $B \to C \otimes B$. $D(\mathcal{Y}(B))$ s'appelle la cobar-construction sur B : elle a été introduite dans le cas $B = K$ par J. F. ADAMS [1].

Soient A, B des modules différentiels projectifs, A étant un comodule à droite sur C, B un comodule à gauche sur C. On définit

$$\mathrm{Cotor}^C(A , B) = H(A \square_C D(\mathcal{Y}(B))) \quad .$$

DÉFINITIONS et COMMENTAIRES. - Dans la même situation, mais A étant un comodule à droite, on définit $\mathcal{X}(A)$ comme suit : $\mathcal{X}(A)_0 = A \otimes C$; $\bar{\mathcal{X}}(A)_1 = \mathrm{Coker}\ A \to \mathcal{X}_0(A)$; $\mathcal{X}(A)_{-p} = \bar{\mathcal{X}}(A)_{-p} \otimes C$; $\bar{\mathcal{X}}(A)_{-p-1} = \mathrm{Coker}\ \bar{\mathcal{X}}(A)_{-p} \to \mathcal{X}(A)_{-p}$.

L'application canonique $\mathcal{X}(A)_{-p} \to \mathcal{X}(A)_{-p-1}$ se note α_{-p-1}, $D(\mathcal{X}(A))$ est un complexe double,

$$D(\mathfrak{X}(A))_{p,q} = (s^p(\mathfrak{X}(A)_p))_{p+q} \quad ,$$

avec $\mathfrak{X}(A)_p = 0$ pour $p > 0$, d' est la différentielle interne, et d'' la différentielle induite par les α_p .

La filtration de $D(\mathfrak{X}(A))$ ou $D(\mathfrak{Y}(B)$ par le premier degré s'appelle filtration par degré de résolution. Il y a un homomorphisme canonique de comodules à droite $\eta : A \to D(\mathfrak{X}(A))$, et $\eta_* : H(A) \stackrel{\approx}{\to} H(D(\mathfrak{X}(A)))$. De même, il y a un homomorphisme canonique $\eta : B \stackrel{\approx}{\to} D(\mathfrak{Y}(B))$, et $\eta : H(B) \stackrel{\approx}{\to} H(D(\mathfrak{Y}(B)))$. Si A et B sont des modules différentiels projectifs,

$$H(A \,\square_C\, D(\mathfrak{Y}(B))) = H(D(\mathfrak{X}(A)) \,\square_C\, D(\mathfrak{Y}(B))) = H(D(\mathfrak{X}(A)) \,\square_C\, B) \quad ,$$

et $\mathrm{Cotor}^C(A , B)$ est un foncteur équilibré.

DÉFINITION. - La coalgèbre C est dite simplement connexe si $C_0 = K$ et $C_1 = 0$.

THÉORÈME 6.1. - Soient C une coalgèbre simplement connexe, A un comodule à droite sur C , B un comodule à gauche sur C ; supposons que A , B , C soient des modules différentiels projectifs. Alors

1. $H(C)$ est une coalgèbre simplement connexe ;
2. $H(A)$ est un comodule à droite sur $H(C)$;
3. $H(B)$ est un comodule à gauche sur $H(C)$;
4. On a une suite spectrale dans laquelle

$$E^2 = \mathrm{Cotor}^{H(C)}(H(A) , H(B)) \qquad \text{et} \qquad E^r \Rightarrow \mathrm{Cotor}^C(A , B) \quad .$$

DÉMONSTRATION. - Les parties 1, 2, 3 sont immédiates, vu les définitions. On constate que $D(\mathfrak{Y}(B))_{p,q} = 0$ si $q < -2p$, ou si $p > 0$, donc si $p + q < 0$. La suite spectrale obtenue en filtrant $A \,\square_C\, D(\mathfrak{Y}(B))$ par le degré de résolution dans $D(\mathfrak{Y}(B))$ donne

$$E^1 = H(A) \,\square_{H(C)}\, D(\mathfrak{Y}(H(B))) \quad ,$$

$$E^2 = \mathrm{Cotor}^{H(C)}(H(A) , H(B))$$

et converge $E^r \Rightarrow \mathrm{Cotor}^C(A , B)$. En effet $d^r : E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}$ est nulle pour $q + r - 1 < -2(p - r)$, i. e. $r > q + 2p$, et $d^r : E^r_{p+r,q-r+1} \to E^r_{p,q}$ est nulle pour $p + r > 0$, donc $E^r_{p,q} = E^\infty_{p,q}$ pour $r > \sup\{q + 2p , - p\}$.

DÉFINITION. - Soit C une coalgèbre supplémentée telle que $C_0 = K$, on pose $\Omega(C) = D(\mathfrak{X}(K)) \square_C K$. Comme module, $\Omega(C)$ est isomorphe à l'algèbre tensorielle de $s^{-1}(J(C))$, et $s^{-1}(J(C)) = 0$ pour $q < 0$ puisque $J(C)_q = 0$ pour $q < 1$. De plus l'application $\Omega(C) \otimes \Omega(C) \to \Omega(C)$ définie par la structure d'algèbre tensorielle est compatible avec les différentielles, i. e. est un homomorphisme de modules différentiels. $\Omega(C)$ est donc une algèbre différentielle supplémentée, et $\mathrm{Cotor}^C(K , K) = H(\Omega(C))$ comme algèbre.

Intuitivement C est un espace topologique connexe et $\Omega(C)$ est l'espace des lacets sur C.

PROPOSITION 6.5. - Si C est une coalgèbre supplémentée telle que $C_0 = K$, alors $\mathrm{Tor}^{\Omega(C)}(K , K) = H_*(C)$, et le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tor}^{\Omega(C)}(K , K) & \to & \mathrm{Tor}^{\Omega(C)}(K , K , K) \\ \downarrow \approx & & \downarrow \approx \\ H_*(C) & \longrightarrow & H_*(C \otimes C) \end{array}$$

est commutatif.

DÉMONSTRATION. - $D(\mathfrak{X}(K))$ est un module à gauche sur $\Omega(C)$, et $K \otimes_{\Omega(C)} D(\mathfrak{X}(K)) = C$. De plus $D(\mathfrak{Y}(K))^{\#} = \Omega(C) \otimes C$ comme $\Omega(C)$-module à gauche ou comme C-comodule à droite, en oubliant les opérateurs différentiels. Comme $H_*(D(\mathfrak{Y}(K)) = K$, le résultat est immédiat.

DÉFINITION. - L'algèbre différentielle supplémentée Λ sera dite connexe si $\Lambda_0 = K$.

CONVENTION. - Jusqu'à la fin de cet exposé, par algèbre différentielle, nous entendrons algèbre différentielle supplémentée, et par coalgèbre différentielle, nous entendrons coalgèbre différentielle, telle que $C_0 = K$.

PROPOSITION 6.6. - L'algèbre différentielle Λ est connexe si et seulement si la coalgèbre différentielle $B(\Lambda)$ est simplement connexe.

La coalgèbre différentielle C est simplement connexe si et seulement si l'algèbre différentielle $\Omega(C)$ est connexe.

DÉFINITION. - Soit Λ une algèbre différentielle. Comme module,
$s^{-1} J(B(\Lambda)) = I(\Lambda) \oplus \bigoplus_{p>1} s^{-1}(B(\Lambda)_{p,*})$.

Soit $\Pi : \Omega(B(\Lambda)) \to \Lambda$ l'application multiplicative unique telle que

1. Π est l'identité sur $I(\Lambda)$;
2. Π est nulle sur $\bigoplus s^{-1}(B(\Lambda)_{p,*})$.

THÉORÈME 6.2. - Pour toute algèbre différentielle Λ ,

1. $\Pi : \Omega(B(\Lambda)) \to \Lambda$ est un homomorphisme d'algèbres différentielles ;

2. Si Λ est connexe, $\Pi_* : H_*(\Omega(B(\Lambda))) \to H_*(\Lambda)$ est un isomorphisme.

DÉMONSTRATION. - Par définition, Π est un homomorphisme d'algèbres, il suffit donc de montrer que $\Pi \circ d = d \circ \Pi$ pour démontrer la partie 1.

Soit d_1 l'opérateur différentiel sur $\Omega(B(\Lambda))$ obtenu en considérant $\Omega(B(\Lambda))$ comme l'algèbre tensorielle de $s^{-1}(J(B(\Lambda))$, $s^{-1}(B(\Lambda))$ étant muni seulement de l'opérateur différentiel induit par la différentielle interne de $B(\Lambda)$. On voit que $\Pi d_1 = d\Pi$. Posons $d_2 = d - d_1$, opérateur différentiel complémentaire dans $\Omega(B(\Lambda))$, il reste à voir que $\Pi d_2 = 0$. Mais $d_2\, s^{-1}[x_1] = 0$, et $d_2\, s^{-1}[x_1 , \dots , x_{p+1}]$ appartient à l'idéal engendré par $\bigoplus_{q>1} s^{-1}(B(\Lambda)_{q,*})$, si $p > 1$. Il reste donc, pour démontrer la partie 2, à voir que $\Pi d_2\, s^{-1}[x_1 , x_2] = 0$. Par un petit calcul explicite, si $x_1 \in I(\Lambda)_r$ et $x_2 \in I(\Lambda)_s$,

$$d_2\, s^{-1}[x_1 , x_2] = (-1)^{r+s}\, s^{-1}[x_1 , x_2] + (-1)^{r+s+1}\, s^{-1}[x_1] \otimes s^{-1}[x_2] \quad ,$$

et

$$\Pi d_2\, s^{-1}[x_1 , x_2] = (-1)^{r+s}\, x_1 x_2 + (-1)^{r+s+1}\, x_1 x_2 = 0 \quad .$$

Soit maintenant M' la cobar-construction à droite sur $B(\Lambda)$; en négligeant les opérateurs différentiels, $M' = \Omega(B(\Lambda)) \otimes B(\Lambda)$. Si M est la bar-construction à gauche sur Λ , en négligeant les opérateurs différentiels, $M = \Lambda \otimes B(\Lambda)$. D'autre part, l'application $\Pi \otimes i : M' \to M$ est un homomorphisme de modules différentiels compatible avec $\Pi : \Omega(B(\Lambda)) \to \Lambda$, i. e. un homomorphisme de $\Omega(B(\Lambda))$-modules. On a

$$H(M') = H(M) = K \quad ,$$

et $(\Pi \otimes i)_* : H(M') \to H(M)$ est un isomorphisme,

$$E^1(M') = H(\Omega(B(\Lambda))) \otimes B(\Lambda)$$

et

$$E^1(M) = H(\Lambda) \otimes B(\Lambda) \quad ,$$

en filtrant M et M' par les squelettes. Sous les hypothèses de la partie 2, $H_*(\Omega(B(\Lambda)))$ et $H_*(\Lambda)$ sont toutes deux connexes. Par suite, suivant un raisonnement classique, nous avons deux suites spectrales de la bonne forme, leurs termes E^∞ s'appliquent par isomorphisme, et ${}'E^2_{*,0} \approx E^2_{*,0}$, on en déduit

$H_*(\Omega(B(\Lambda))) \stackrel{\approx}{\to} H_*(\Lambda)$. Pour plus de détails sur ce genre de raisonnement sur les suites spectrales, le lecteur se référera à [7], exposé 3.

Les faits géométriques sous-jacents au théorème précédent sont les suivants : soient M un monoïde topologique, X un espace fibré proncipal de fibre M et de base B ; supposons X acyclique, i. e. $\pi_q(X) = 0$ pour tout q . Soit $\Omega(B)$ l'espace des chemins sur X qui partent du point de base $x_0 \in X$ et aboutissent dans la fibre $Mx_0 = M$. On sait que cet espace a même type d'homotopie que l'espace des lacets sur B . Soit $\Pi : \Omega(B) \to M$ l'application définie par $\Pi(f) = f(1) \in M$. Le monoïde M joue le rôle de Λ dans le théorème précédent et les applications que nous avons appelées Π dans les deux cas algèbrique et topologique se correspondent.

PROPOSITION 6.7. - Soient C' et C'' des coalgèbres simplement connexes, $f : \Omega(C' \otimes C'') \to \Omega(C') \otimes \Omega(C'')$ l'application naturelle. Alors $f_* : H(\Omega(C' \otimes C'')) \to H(\Omega(C') \otimes \Omega(C''))$ est un isomorphisme.

La démonstration de cette proposition est classique, et laissée au lecteur. Elle est complètement duale de la proposition correspondante sur les algèbres différentielles.

7. Applications géométriques.

Nous allons maintenant nous servir de la théorie précédente pour démontrer des théorèmes topologiques. Nous ferons d'abord certaines conventions supplémentaires qui, quoique souvent non nécessaires, simplifieront l'exposé.

CONVENTIONS. - Nous supposerons d'abord que l'anneau de base K est un anneau de Dedekind. Nous ne nous occuperons que d'espaces X dont l'homologie $H_q(X)$ de dimension q soit engendrée par un nombre fini d'éléments pour tout q , en d'autres termes tels que $H_*(X)$ soit un K-module de type fini.

On notera $H^*(X)$ la cohomologie de X à coefficients dans K , $H^q(X)$ la cohomologie de dimension q . On observera que, si $H_*(X)$ est un module projectif, $H^*(X) = \mathrm{Hom}(H_*(X) , K)$.

Nous nous placerons dans la catégorie des espaces X munis d'un point de base $x_0 \in X$, et des applications continues respectant les points de base. Si $\Pi : X \to B$ est une fibration, la fibre est $F = \Pi^{-1}(b_0)$ et on prendra comme point de base de F celui de X , afin que l'application $i : F \to X$ soit dans la catégorie.

Si M est un monoïde topologique, le point de base sera l'élément neutre $e \in M$.

DÉFINITION. - Un espace X est dit acyclique si $\pi_q(X) = 0$ pour tout q .

Si B est un espace, une fibration acyclique sur B se compose de :

1. Une fibration $\Pi : X \to B$, où X est acyclique ;
2. Un monoïde topologique M , tel que $M = \Pi^{-1}(b_0)$;
3. Une opération de M sur X , i. e. une application $M \times X \to X$ telle que
   - i. $\Pi(m\, x) = \Pi(x)$;
   - ii. $m_1(m_2\, x) = (m_1\, m_2)\, x$;
   - iii. $ex = x$.

On remarquera que, si G est un groupe topologique, la projection $\Pi : X \to B(G)$ d'un fibré universel pour G est une fibration acyclique. De même, si B est connexe par arcs, il existe une fibration acyclique $\Pi : X \to B$, où X est l'espace des chemins dans B qui partent de b_0 , et la fibre est l'espace des lacets $\Omega(B)$.

DÉFINITION. - Un H-espace ou espace de Hopf est un espace X muni d'une application $\varphi_1 : X \times X \to X$ telle que $\varphi_1(x_0 , x) = x = \varphi_1(x , x_0)$.

Si B est un H-espace connexe par arcs, l'application $\varphi_1 : B \times B \to B$ induit une application, qu'on notera encore $\varphi_1 : \Omega(B) \times \Omega(B) \to \Omega(B)$.

L'application φ_1 est une application de monoïdes topologiques, et est homotope à l'application $\varphi : \Omega(B) \times \Omega(B) \to \Omega(B)$ définie par la multiplication des lacets, et $\Omega(B)$ est commutative à l'homotopie près.

THÉORÈME 7.1. - Soit $\Pi : X \to B$ une fibration acyclique de fibre M , alors

1. $\mathrm{Tor}^{C(M)}(K , K) \approx H_*(B)$;
2. $\mathrm{Tor}^{C(M)}(K , K , K) \approx H_*(B \times B)$;
3. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tor}^{C(M)}(K , K) & \xrightarrow{\ \ } & \mathrm{Tor}^{C(M)}(K , K , K) \\ \downarrow \approx & & \downarrow \approx \\ H_*(B) & \xrightarrow{\ \Delta\ } & H_*(B \times B) \end{array}$$

est commutatif.

DÉMONSTRATION. - On a démontré la partie 1 au paragraphe 3 (coroll. 1 du th. 3.1) sous des hypothèses plus fortes, mais la démonstration est la même ici. La seule raison pour laquelle on a supposé au paragraphe 3 que $M = G$ était un groupe topologique était de pouvoir considérer des fibrés associés. Pour démontrer la partie 2, rappelons d'abord que $\mathrm{Tor}^{C(M)}(K, K, K) = \mathrm{Tor}^{C(M)\otimes C(M)}(K, K)$. D'autre part, il existe un homomorphisme naturel d'algèbres différentielles $C(M) \otimes C(M) \to C(M \times M)$ qui induit un isomorphisme sur l'homologie. Par suite,

$$\mathrm{Tor}^{C(M)\otimes C(M)}(K, K) = \mathrm{Tor}^{C(M\times M)}(K, K) \quad ,$$

et la partie 2 découle de la partie 1.

Pour démontrer la partie 3, on remarque que l'application diagonale $\Delta : X \to X \times X$ induit une application $X \to X \times B$ et par suite une application $C(X) \xrightarrow{\Delta_1} C(X) \otimes C(B)$ telle que, si $\Pi_2 : C(X) \otimes C(B) \to C(B)$ est la projection sur le deuxième facteur, $\Pi_2 \Delta_1$ n'est autre que la projection de $C(X)$ sur $C(B)$. Grâce à la dernière proposition du paragraphe 5 et à la proposition 3.2, ceci entraîne la partie 3.

PROPOSITION 7.1. - Soient Λ une algèbre différentielle, $f : \Lambda \otimes \Lambda \to \Lambda$ un homomorphisme d'algèbres différentielles, homotope à la multiplication $\varphi : \Lambda \otimes \Lambda \to \Lambda$, alors

1. $\mathrm{Tor}^{\Lambda}(K, K)$ est une algèbre ;
2. Si $\mathrm{Tor}^{\Lambda}(K, K)$ est projectif comme module, c'est une algèbre de Hopf.

La démonstration est immédiate.

Dans le cas où Λ est commutative, on peut prendre $f = \varphi$. D'autre part, si X est un H-espace, et $\Lambda = C(\Omega(X))$, on peut prendre pour f l'application induite par la loi de Hopf sur X.

DÉFINITION. - Soit Λ une algèbre différentielle, on note $\sigma : H_*(I(\Lambda)) \to \mathrm{Tor}^{\Lambda}(K, K)$ l'application composée de $H(s(I(\Lambda))) \to H(B(\Lambda))$ avec $s_* : H(I(\Lambda)) \approx H(s(I(\Lambda)))$.

PROPOSITION 7.2. - Soit $\Pi : X \to B$ une fibration acyclique de fibre M, alors

1. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} H(I(C(M))) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, "\sigma_*"'] & \mathrm{Tor}^{C(M)}(K, K) \arrow[d, "\approx"] \\ & H_*(B) \end{tikzcd}$$

est commutatif, σ_* désignant la suspension géométrique.

2. Dans la suite spectrale où $E^2 = \mathrm{Tor}^{H(M)}(K, K)$ et $E^r \Rightarrow H_*(B)$, on a

$$E^{\infty}_{0,0} = E^{r}_{0,0} = K \,, \quad E^{2}_{0,q} = 0 \qquad \text{pour } q > 0$$

et $E^{\infty}_{1,*}$ est l'image de σ_* dans $H_*(B)$.

DÉMONSTRATION. - On a défini la suspension (exposé 4) en contractant M dans X, ou au moins son complexe singulier et en appliquant la projection $sM \to B$. Ce procédé est parallèle à celui de la situation algébrique ci-dessus. Ce qui démontre la partie 1. La partie 2 est évidente.

RAPPEL. - Pour tout espace X, on a défini la notion d'éléments primitifs (exposé 4), et $P(X)$ est le noyau de l'application diagonale $\Delta : H_*(X, x_0) \to H_*(X \times X, X \vee X)$. Si $H_*(X)$ est projectif comme module, c'est une coalgèbre, et $P(X) = P(H_*(X))$.

Si M est un monoïde topologique, on a défini $Q(M)$ comme le conoyau de l'application :

$$H_*(M \times M , M \vee M) \to H_*(M , e)$$

induite par la multiplication. Si $H_*(M)$ est projectif, ce n'est autre que $I(H_*(M))/(I(H_*(M)))^2$, i. e. $Q(M) = Q(H_*(M))$.

DÉFINITIONS. - Soit A un module, $A^* = \mathrm{Hom}(A , K)$.

- Le module A sera dit <u>impair</u> si :
  1. A est projectif de type fini ;
  2. $A_q = 0$ pour q pair.
- Le module A sera dit <u>pair</u> si :
  1. A est projectif de type fini ;
  2. $A_q = 0$ pour q impair.

Si A est impair, on note $E(A)$ l'algèbre de Hopf qui, comme algèbre, est l'algèbre extérieure engendrée par A, et telle que $A = P(E(A))$.

Si A est pair, $L(A)$ est l'algèbre de Hopf qui, comme algèbre, est l'algèbre symétrique engendrée par A, et telle que $A \subset P(L(A))$. On note $\Gamma(A)$ l'algèbre de Hopf duale de $L(A^*)$, i. e., $\Gamma(A) = (L(A^*))^*$.

Si A est libre de générateurs $x_1 , \dots , x_n$, on écrira $E(x_1 , \dots , x_n)$, $L(x_1 , \dots , x_n)$ ou $\Gamma(x_1 , \dots , x_n)$ selon le cas. Remarquons que $\Gamma(x_1 , \dots , x_n)$, comme coalgèbre, est bien ce qui a été défini au paragraphe 3.

Si K est de caractéristique 2, on définit $E(A)$, $L(A)$, $\Gamma(A)$ pour tout module A projectif de type fini.

On observera ceci : soit Λ une algèbre filtrée dont le gradué associé est $E^0(\Lambda) \approx E(A) \otimes L(B)$; dans ces conditions :

1. Si K est de caractéristique différente de 2 et Λ commutative, alors A est impair, B est pair et Λ est isomorphe à $E^0(\Lambda)$ comme algèbre.

2. Si K est de caractéristique 2, $A = 0$, Λ commutative, alors, $\Lambda \approx E^0(\Lambda)$ comme algèbre.

3. Si K est de caractéristique 2, A impair, B pair, Λ strictement commutative, alors $\Lambda \approx E^0(\Lambda)$ comme algèbre.

De même, si C est une coalgèbre strictement commutative filtrée, telle que $E^0(C) = E(A) \otimes \Gamma(B)$, C est isomorphe comme coalgèbre à $E^0(C)$, ...

Remarquons enfin que $P(\Gamma(B)) = B$, exactement comme $Q(L(B)) = B$, quelle que soit la caractéristique de K.

PROPOSITION 7.3. - Soit $\Lambda = E(A) \otimes L(B)$; **alors :**

1. $\mathrm{Tor}^{\Lambda}(K, K) = \Gamma(sA) \otimes E(sB)$;
2. $\sigma : Q(\Lambda) \overset{\approx}{\to} P(\mathrm{Tor}^{\Lambda}(K, K))$.

DÉMONSTRATION. - Posons $M = E(A) \otimes L(B) \otimes \Gamma(sA) \otimes E(sB)$. Soit d l'unique opérateur différentiel dans M compatible avec la structure d'algèbre de Hopf, et tel que $ds(x) = x$ pour $x \in A$, ou $x \in B$. On a $H(M) = K$, M est projectif sur Λ, $K \otimes_{\Lambda} M = \Gamma(sA) \otimes E(sB)$ et a un opérateur différentiel nul.

THÉORÈME I (BOREL). - Soit $\Pi : X \to B$ une fibration acyclique de fibre M, avec $H_*(M) = E(A)$, où A est un module impair

1. $H_*(B) \approx \Gamma(sA)$ comme coalgèbre ;
2. $\sigma : Q(M) \overset{\approx}{\to} P(B)$.

DÉMONSTRATION. - Dans la suite spectrale, où $E^2 = \mathrm{Tor}^{H(M)}(K, K)$, et $E^r \Rightarrow H_*(B)$, on a $E^2 = \Gamma(sA)$, donc E^2 est pair, et $E^2 = E^{\infty}$, soit $E^0(H_*(B)) = \Gamma(sA)$, et $H_*(B) \approx \Gamma(sA)$ comme coalgèbre.

THÉORÈME II. - Soient B un H-espace, $\Pi : X \to B$ une fibration acyclique de fibre M, A' un module impair, A'' un module pair ; supposons K de caractéristique 0, et $H_*(M) = E(A') \otimes L(A'')$ comme algèbre, alors

1. $H_*(B) \approx \Gamma(sA') \otimes E(sA'')$ comme coalgèbre ;
2. $\sigma : Q(M) \overset{\approx}{\to} P(B)$.

DÉMONSTRATION. - On peut remplacer M par $\Omega(B)$. La loi de Hopf $X \times X \to X$ induit une application

$$f : \Omega(B) \times \Omega(B) \to \Omega(B)$$

multiplicative. Dans la suite spectrale où $E^2 = \mathrm{Tor}^{H(M)}(K, K)$ et $E^r \to H_*(B)$, on a $E^2 = \Gamma(sA') \otimes E(sA'')$. L'application diagonale $\Delta : M \to M \times M$ et la loi $f : M \times M \to M$ munissent E^2 d'une structure d'algèbre de Hopf. Si $d^r = 0$ pour $2 \leqslant r \leqslant s$, E^{s+1} est une algèbre de Hopf différentielle, isomorphe à E^2 comme algèbre de Hopf, avec une différentielle d^{s+1} de degré $(-s , s-1)$. On a $P(E^2) = sA' \oplus sA'' = E^2_{1,*}$, et $d^{s+1}(x) = 0$ pour tout élément x appartenant à la sous-algèbre engendrée par $E^2_{1,*}$. Comme K est de caractéristique zéro, pour tout $y \in E^2$, il existe $k \in K$ tel que $k \neq 0$ et ky appartient à la sous-algèbre engendrée par $E^2_{1,*}$. Par suite

$$kd^{s+1}(y) = d^{s+1}(ky) = 0 \quad ,$$

mais E^2 est sans torsion, donc $d^{s+1} y = 0$. On en déduit par récurrence que $E^r = E^\infty$. On a donc

$$E^0(H_*(B)) = \Gamma(sA') \otimes E(sA'') \quad ,$$

et $H_*(B)$ est isomorphe à $\Gamma(sA') \otimes E(sA'')$ comme coalgèbre. La partie 2 du théorème découle du fait que $E^2 = E^\infty$.

THÉORÈME 7.2. - Soit $\Pi : X \to B$ une fibration acyclique de fibre M . Supposons B simplement connexe et $H_*(B)$ projective comme module. Alors

1. $\mathrm{Cotor}^{C(B)}(K , K) = H_*(M)$;
2. On a une suite spectrale où $E^2 = \mathrm{Cotor}^{H_*(B)}(K , K)$ et $E^r \Rightarrow H_*(M)$.

DÉMONSTRATION. - Soit $C(M)$ le complexe de chaînes singulières de M dont tous les sommets sont en e . $C(M)$ est une algèbre différentielle connexe, et

$$\mathrm{Tor}^{C(M)}(K , K) = H_*(B) \quad .$$

Soit

$$\Pi : \Omega(B(C(M))) \to C(M)$$

l'application naturelle. On a vu que

$$\Pi_* : H(\Omega(B(C(M)))) \to H_*(M)$$

est un isomorphisme. Filtrons $\Omega(B(C(M)))$ par le degré de résolution. Dans la suite spectrale qui en résulte,

$$E^2 = \mathrm{Cotor}^{H(B(C(M)))}(K , K) \;, \qquad \text{et} \qquad E^r \Rightarrow H_*(M) \quad .$$

Mais la coalgèbre $H(B(C(M)))$ n'est autre que $H_*(B)$: on en déduit le résultat annoncé.

PROPOSITION 7.4. - Soit $C = \Gamma(sA) \otimes E(sB)$; alors :

1. $\mathrm{Cotor}^C(K , K) = E(A) \otimes L(B)$;
2. $\sigma : Q(\mathrm{Cotor}^C(K , K)) \overset{\approx}{\rightarrow} P(C)$.

La démonstration de cette proposition est identique à celle de la proposition duale 7.3 démontrée plus haut.

THÉORÈME III. - Soient $\Pi : X \to B$ une fibration acyclique de fibre M , A un module pair. Supposons B simplement connexe, $H_*(B)$ isomorphe à $E(sA)$ comme coalgèbre, et $H_*(M)$ commutative. Alors

1. $H_*(M)$ est isomorphe à $L(A)$ comme algèbre ;
2. $\sigma : Q(M) \overset{\approx}{\rightarrow} P(B)$.

DÉMONSTRATION. - Dans la suite spectrale où $E^2 = \mathrm{Cotor}^{H_*(B)}(K , K)$ et $E^r \Rightarrow H_*(M)$, on a $E^2 = L(A)$, qui est pair. Donc $E^2 = E^\infty$, et $E^0(H_*(M)) = L(A)$. Comme on a supposé $H_*(M)$ commutative, on a $H_*(M) \approx L(A)$ comme algèbre.

THÉORÈME IV. - Soient $\Pi : X \to B$ une fibration acyclique de fibre M , où B est un H-espace simplement connexe, A' un module impair, A'' un module pair ; supposons K de caractéristique zéro, et $H_*(B)$ isomorphe à $\Gamma(sA') \otimes E(sA'')$ comme coalgèbre. Alors :

1. $H_*(M)$ est isomorphe à $E(A') \otimes L(A'')$ comme algèbre ;
2. $\sigma : Q(M) \overset{\approx}{\rightarrow} P(B)$.

DÉMONSTRATION. - $H_*(M)$ est commutative puisque B est un H-espace. Dans la suite spectrale où $E^2 = \mathrm{Cotor}^{H_*(B)}(K , K)$ et $E^r \Rightarrow H_*(M)$, on voit que $E^2 = E(A') \otimes L(A'')$, et le raisonnement est le même que dans le théorème II.

COMMENTAIRES. - Soient G un groupe classique (exposé 5), et K un anneau tel que $H_*(G) = E(A)$ où A est un module impair. Alors si $B(G)$ est l'espace classifiant de G , $H^*(B(G))$ est isomorphe comme algèbre à $L(sA^*)$. On peut choisir $A = P(G)$: ceci découle du théorème I comme chez BOREL. Si G est simplement connexe, $H_*(\Omega(G))$ est isomorphe à $L(s^{-1} P(G))$ comme algèbre, d'après le théorème III.

THÉORÈME V. - Soient $\Pi : X \to B$ une fibration acyclique de fibre M , B un H-espace, A un module pair. Supposons K de caractéristique 2 , et $H^*(B)$ isomorphe à $L(sA)$ comme algèbre ; alors :

1. $H_*(M)$ est isomorphe à $E(A)$ comme algèbre ;
2. $\sigma : Q(M) \overset{\approx}{\rightarrow} P(B)$.

DÉMONSTRATION. - Puisque $H^*(B) = L(sA^*)$ comme algèbre, $H_*(B) = \Gamma(sA)$ comme coalgèbre. Dans la suite spectrale où $E^2 = \mathrm{Cotor}^{H_*(B)}(K , K)$, $E^2 = E(A)$ donc est pair, et $E^2 = E^\infty$, d'où $E^0(H_*(M)) = E(A)$. Posons $\Lambda = H_*(M)$ et $I = I(\Lambda)$. On a $E^0(\Lambda) = E(A)$, $F_{-1}\Lambda = I$, $F_{-2}\Lambda \supset I^2$, et $F_{-p}\Lambda \supset I_p$. Posons maintenant $'F_{-p}\Lambda = I^p$, et considérons l'algèbre de Hopf $'E^0(\Lambda)$ qui en résulte. On a une application naturelle $'E^0(\Lambda) \to E^0(\Lambda) = E(A)$, qui est un épimorphisme, donc, pour des raisons de rang, un isomorphisme. D'autre part $'E^0(\Lambda)$ est isomorphe à Λ comme algèbre [5], ce qui démontre le théorème.

COROLLAIRE. - Soient V un espace préhilbertien de dimension infinie sur $\underset{\sim}{R}$, K un anneau de caractéristique 2, alors $H_*(\Omega(\mathrm{Spin}(V)))$ est isomorphe à $E(A)$ comme algèbre, où A est un module pair, libre à un générateur en toute dimension $2q$, $q > 0$.

DÉMONSTRATION. - Dans l'exposé 5, on a démontré que $H^*(\mathrm{Spin}(V))$ est isomorphe à $L(sA)$ comme algèbre. Le résultat découle alors du théorème précédent.

THÉORÈME VI. - Soit $\Pi : X \to B$ une fibration acyclique de fibre M, où B est un H-espace simplement connexe, et K un corps ; alors :

1. Si K est de caractéristique 0, $H_*(B)$ est isomorphe à $\mathrm{Tor}^{H_*(M)}(K, K)$ comme coalgèbre, et $H_*(M)$ est isomorphe à $\mathrm{Cotor}^{H_*(B)}(K, K)$ comme algèbre de Hopf. En outre $\sigma : Q(M) \overset{\approx}{\to} P(B)$.

2. Si K est de caractéristique $p \neq 0$, et si $\sigma : Q(M) \overset{\approx}{\to} P(B)$ est injective, alors $H_*(B)$ est isomorphe à $\mathrm{Tor}^{H_*(M)}(K, K)$ comme coalgèbre.

3. Si K est de caractéristique $p \neq 0$ et si $\sigma : Q(M) \overset{\approx}{\to} P(B)$ est surjective, alors $H_*(M)$ est isomorphe à $\mathrm{Cotor}^{H_*(B)}(K, K)$ comme algèbre.

4. Si K est de caractéristique $p \neq 0$, 2, alors

$$\sigma : Q(M)_{2q-1} \to P(B)_{2q} \quad \text{est injective,}$$

$$\sigma : Q(M)_{2q} \to P(B)_{2q+1} \quad \text{est surjective.}$$

Dans les cas 2 et 3, σ peut ne pas être un isomorphisme.

La démonstration du théorème précédent n'est qu'un petit exercice d'application du théorème de décomposition de BOREL, et de calculs sur des suites spectrales d'algèbres de Hopf. On le laisse au lecteur. Plusieurs auteurs ont démontré des théorèmes analogues à des cas particuliers du précédent, ([2], [9]). On peut vérifier les conditions de la partie 2 pour $B = K(\Pi, n+1)$, $M = K(\Pi, n)$, $n > 0$, voir [8]. Le fait important dans ce cas est l'existence des puissances divisées de Cartan dans l'homologie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ADAMS (J. F.). - On the cobar-construction, Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 42, 1956, p. 409-412.

[2] BROWDER (W.). - The homology of loop spaces (Thèse Sc. math. Princeton. 1958).

[3] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).

[4] EILENBERG (S.) and MACLANE (S.). - On the groups $H(\Pi, n)$, I., Annals of Math., Series 2, t. 58, 1953, p. 55-106.

[5] MILNOR (J. W.) and MOORE (J. C.). - On the structure of Hopf algebras. - Princeton, 1959 (multigraphié).

[6] MOORE (John C.). - Seminar on algebraic homotopy theory. - Princeton, 1955/56 (multigraphié).

[7] MOORE (John C.). - Seminar on algebraic topology. - Princeton, 1957/58 (multigraphié).

[8] Séminaire H. Cartan, t. 7, 1954/55 : Algèbre d'Eilenberg-MacLane.

[9] SERRE (Jean-Pierre). - Homologie singulière des espaces fibrés et applications, Annals of Math., Series 2, t. 54, 1951, p. 435-505.