JOHN C. MOORE

Compléments sur les algèbres de Hopf

Séminaire Henri Cartan, tome 12, nº 1 (1959-1960), exp. nº 4, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1959-1960__12_1_A4_0>

COMPLÉMENTS SUR LES ALGÈBRES DE HOPF

par John C. MOORE

NOTATIONS et CONVENTIONS. - K désigne un anneau commutatif. Si B est une algèbre de Hopf sur K, on note $I(B)$ le noyau de $\varepsilon : B \to K$, et $J(B)$ le conoyau de $\eta : K \to B$; rappelons que l'application canonique $J(B) \to I(B)$ est un isomorphisme. On écrira souvent I au lieu de $I(B)$, et J au lieu de $J(B)$. On note I^2 l'image de $I \otimes I \to I$ par la multiplication, et J^2 la co-image de $J \to J \otimes J$ par l'application diagonale. On a donc les suites exactes

$$I \otimes I \to I^2 \to 0 , \quad 0 \to I^2 \to I \to Q(B) \to 0 \quad ,$$

$$0 \to J^2 \to J \otimes J , \quad 0 \to P(B) \to J \to J^2 \to 0 \quad .$$

Extension de l'anneau de base : soit L une algèbre commutative (de degré 0) sur K. Soit B une K-algèbre de Hopf, de multiplication Φ et d'application diagonale Δ. Définissons sur $B \otimes L$ une structure d'algèbre par l'application

$$\Phi_L : (B \otimes L) \otimes_L (B \otimes L) \to B \otimes L \qquad \text{induite par } \Phi \quad ,$$

et définissons sur $B \otimes L$ une structure de coalgèbre par l'application :

$$\Delta_L : B \otimes L \to (B \otimes L) \otimes_L (B \otimes L) \qquad \text{induite par } \Delta \quad .$$

PROPOSITION 1. - <u>Sous les hypothèses précédentes</u> :

1° $B \otimes L$, <u>munie de</u> Φ_L <u>et de</u> Δ_L, <u>est une algèbre de Hopf</u> ;

2° $I(B \otimes L) = I(B) \otimes L$;

3° $\mathrm{Tor}_1(I(B), L) \to \mathrm{Tor}_1(Q(B), L) \to I^2(B) \otimes L \to I^2(B \otimes L) \to 0$ <u>est une suite exacte</u> ;

4° $J(B \otimes L) = J(B) \otimes L$;

5° $\mathrm{Tor}_1(J(B) \otimes J(B), L) \to \mathrm{Tor}_1((J(B) \otimes J(B))/J^2(B), L) \to J^2(B) \otimes L \to J^2(B \otimes L) \to 0$ <u>est une suite exacte</u>.

Les démonstrations sont immédiates.

COROLLAIRE 1. - $Q(B \otimes L) = Q(B) \otimes L$.

COROLLAIRE 2. - Si $\mathrm{Tor}_1(J(B), L)$ et $\mathrm{Tor}_1(J(B) \otimes J(B), L)$ sont nuls, on a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Tor}_1(J^2(B), L) \to P(B) \otimes L \to P(B \otimes L) \to \mathrm{Tor}_1((J(B) \otimes J(B))/J^2(B), L) \to 0$$

DÉFINITION. - Si B est une K-algèbre de Hopf, on note $P_2(B)$ le noyau de l'application naturelle $P(B) \to Q(B)$, et $Q_2(B)$ son conoyau.

PROPOSITION 2. - Soit K un anneau intègre de caractéristique nulle, et soit B une K-algèbre de Hopf sans torsion (comme K-module). Alors $P_2(B) = 0$ si et seulement si la multiplication de B est associative et anticommutative.

DÉMONSTRATION. - Soit F le corps des fractions de K. Dans l'algèbre de Hopf $B \otimes F$, on a $P_2(B \otimes F) = 0$ si et seulement si la multiplication est associative et anticommutative (cf. l'exposé 2, proposition 3.5 et remarque 3.6). Considérons les suites exactes

$$0 \to P_2(B) \to P(B) \to Q(B) \to Q_2(B) \to 0$$

et

$$0 \to P_2(B) \otimes F \to P(B) \otimes F \to Q(B) \otimes F \to Q_2(B) \otimes F \to 0 \quad ;$$

comme $P(B \otimes F) = P(B) \otimes F$ et $Q(B \otimes F) = Q(B) \otimes F$ (corollaires 1 et 2 de la proposition 1), on en déduit

$$P_2(B \otimes F) = P_2(B) \otimes F \quad , \qquad Q_2(B \otimes F) = Q_2(B) \otimes F \quad .$$

Or $P_2(B)$, sous-module d'un module sans torsion, est sans torsion ; donc la relation $P_2(B \otimes F) = 0$ équivaut à $P_2(B) = 0$, ce qui prouve la proposition.

DÉFINITION. - Si K est un anneau d'intégrité, les corps standard associés à K sont, par définition :

1° le corps des fractions F de K ;

2° les corps K/M, où M parcourt l'ensemble des idéaux maximaux de K.

CONVENTIONS. - Toutes les algèbres de Hopf B sur K sont désormais supposées à multiplication associative.

Par algèbre graduée Λ sur K, on entendra une algèbre graduée associative telle que $\Lambda_0 = K$; alors l'augmentation naturelle $\Lambda \to K$ définit K comme Λ-module (à droite ou à gauche). Si L est une K-algèbre commutative de degré 0, alors

$\Lambda \otimes_K L$ est une algèbre graduée sur L. De plus, si M est un Λ-module gradué, $M \otimes_K L$ est un $(\Lambda \otimes_K L)$-module gradué. Si M est un Λ-module gradué, une <u>résolution projective</u> de M sur Λ est une suite de Λ-modules gradués P_q, de Λ-homomorphismes $\alpha_q : P_q \to P_{q-1}$ de degré zéro (pour $q \geq 1$), et d'un Λ-homomorphisme $\alpha_0 : P_0 \to M$ de degré zéro, tels que la suite

$$\cdots \to P_q \to P_{q-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$$

soit une suite exacte. Ici Λ-module signifie Λ-module à gauche. Si A est un Λ-module à droite, alors $\mathrm{Tor}_q^\Lambda(A, M)$ est le K-module gradué, quotient du noyau de

$$i_A \otimes \alpha_q : A \otimes_\Lambda P_q \to A \otimes_\Lambda P_{q-1}$$

par l'image de $i_A \otimes \alpha_{q+1} : A \otimes_\Lambda P_{q+1} \to A \otimes_\Lambda P_q$. En particulier,

$$\mathrm{Tor}_0^\Lambda(A, M) = A \otimes_\Lambda M .$$

PROPOSITION 3. - <u>Soit Λ une algèbre graduée sur K, et soit M un module gradué sur Λ; alors $M = 0$ équivaut à $K \otimes_\Lambda M = 0$.</u>

DÉMONSTRATION. - Soit $I(\Lambda)$ l'idéal des éléments de degré > 0 de Λ. La condition $K \otimes_\Lambda M = 0$ équivaut à $M = IM$. Si $M = IM$, supposons que $M_q = 0$ pour $q < r$; alors $M_r = I_1 M_{r-1} = 0$, donc $M_q = 0$ pour $q \leq r$, et par suite $M = 0$.

PROPOSITION 4. - <u>Soit Λ une algèbre graduée sur K, et soit M un Λ-module gradué. Pour que M soit Λ-projectif, il faut et il suffit que $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(K, M) = 0$ et que $K \otimes_\Lambda M$ soit K-projectif.</u>

DÉMONSTRATION. - Les conditions sont évidemment nécessaires. Supposons maintenant que $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(K, M) = 0$, et que $N = K \otimes_\Lambda M$ soit K-projectif. Soit $\pi : M \to N$ l'application naturelle. Choisissons $f : N \to M$, homomorphisme de K-modules gradués tel que πf soit l'identité. Soit $P = \Lambda \otimes_K N$, qui est Λ-projectif. Soit $\tilde{f}$ l'application Λ-linéaire $P \to M$ induite par f. Si C désigne le conoyau de $\tilde{f}$, $K \otimes_\Lambda C$ est 0 puisque, par construction, $i_K \otimes \tilde{f} : K \otimes_\Lambda P \to K \otimes_\Lambda M$ est un épimorphisme. Donc $C = 0$ (proposition 3), et $\tilde{f}$ est un épimorphisme. Soit A le noyau de $\tilde{f} : P \to M$; on a des suites axactes

$$0 \to A \to P \to M \to 0$$

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^\Lambda(K, M) \to K \otimes_\Lambda A \to K \otimes_\Lambda P \to K \otimes_\Lambda M \to 0 .$$

Puisque $\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(K, M) = 0$, et que $K \otimes_{\Lambda} P \xrightarrow{\approx} K \otimes_{\Lambda} M$, on a $K \otimes_{\Lambda} A = 0$, d'où $A = 0$, et par suite M est projectif.

CONVENTIONS. - On supposera désormais que l'anneau de base K est un <u>anneau de Dedekind</u>. Il y a deux raisons à cela : d'abord, si A est un K-module, on a $A = 0$ si et seulement si $\mathrm{Tor}_1^K(L, A)$ et $L \otimes_K A$ sont nuls pour tout corps standard L associé à K. D'autre part, si A est un K-module, une condition nécessaire et suffisante pour que A soit plat (ou, ce qui est équivalent, soit sans torsion) est que $\mathrm{Tor}_1^K(L, A) = 0$ pour tout corps standard L associé à K.

PROPOSITION 5. - <u>Soit</u> Λ <u>une</u> K-<u>algèbre graduée, qui est plate comme</u> K-<u>module</u> ; <u>soit</u> M <u>un module gradué sur</u> Λ, <u>plat comme</u> K-<u>module. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

1° M <u>est un</u> Λ-<u>module plat</u> ;

2° $\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(K, M) = 0$, <u>et</u> $K \otimes_{\Lambda} M$ <u>est</u> K-<u>plat</u> ;

3° $M \otimes_K L$ <u>est un</u> $(\Lambda \otimes_K L)$-<u>module libre, quel que soit le corps standard</u> L <u>associé à</u> K.

DÉMONSTRATION. - 1° entraîne 2°, car, pour tout K-module A, on a un isomorphisme $\mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(A, M) \approx \mathrm{Tor}_n^K(A, K \otimes_{\Lambda} M)$ si M est Λ-plat (cf. [1], chapitre VI, proposition 4.1.2). Soit maintenant P une résolution projective de M sur Λ ; puisque Λ et M sont K-plats, $P \otimes L$ est une résolution projective de $M \otimes L$ sur $\Lambda \otimes L$, quel que soit le corps standard L associé à K. En outre, puisque L est un corps, $L \otimes_{\Lambda \otimes L} (M \otimes L)$ est L-projectif (en fait, L-libre). Or

$$H(K \otimes_{\Lambda} P) = \mathrm{Tor}^{\Lambda}(K, M), \quad \text{et} \quad H(L \otimes_{\Lambda \otimes L}(P \otimes L)) = \mathrm{Tor}^{\Lambda \otimes L}(L, M \otimes L) .$$

D'autre part, $L \otimes_{\Lambda \otimes L}(P \otimes L) = (K \otimes_{\Lambda} P) \otimes L$. On a donc une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Tor}_q^{\Lambda}(K, M) \otimes L \to \mathrm{Tor}_q^{\Lambda \otimes L}(L, M \otimes L) \to \mathrm{Tor}_1^K(\mathrm{Tor}_{q-1}^{\Lambda}(K, M), L) \to 0$$

pour tout entier $q \geq 0$. Faisons maintenant l'hypothèse 2° : puisque $\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(K, M) = 0$ et que $K \otimes_{\Lambda} M$ est K-plat, on a $\mathrm{Tor}_1^{\Lambda \otimes L}(L, M \otimes L) = 0$, et la proposition 4 dit que $M \otimes L$ est projectif sur $\Lambda \otimes L$. En fait, puisque L est un corps, $M \otimes L$ est libre sur $\Lambda \otimes L$ (en vertu de [1], chap. VIII, theorem 6.1). Ainsi 2° entraîne 3°.

Enfin, supposons 3°. Soit A un Λ-module à droite gradué, qui est plat sur K. On a :

$$(A \otimes L) \otimes_{\Lambda \otimes L}(P \otimes L) = (A \otimes_{\Lambda} P) \otimes L ,$$

d'où une suite exacte pour tout entier $q \geq 0$:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_q^{\Lambda}(A , M) \otimes L \longrightarrow \mathrm{Tor}_q^{\Lambda \otimes L}(A \otimes L , M \otimes L) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^K(\mathrm{Tor}_{q-1}^{\Lambda}(A , M) , L) \longrightarrow 0 .$$

Ainsi $\mathrm{Tor}_1^K(\mathrm{Tor}_{q-1}^{\Lambda}(A , M) , L) = 0$ pour $q > 0$, et $\mathrm{Tor}_q^{\Lambda}(A , M)$ est un K-module plat pour tout $q \geq 0$. D'autre part $\mathrm{Tor}_q^{\Lambda}(A , M) \otimes L = 0$ pour $q > 0$. Par suite $\mathrm{Tor}_q^{\Lambda}(A , M) = 0$ pour $q > 0$. Alors, étant donné n'importe quel Λ-module à droite A'', on a une suite exacte de Λ-modules à droite

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

telle que A' et A soient K-plats. On a donc une suite exacte

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}_q^{\Lambda}(A' , M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_q^{\Lambda}(A , M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_q^{\Lambda}(A'' , M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{q-1}^{\Lambda}(A' , M) \longrightarrow \cdots$$

Comme $\mathrm{Tor}_q^{\Lambda}(A' , M)$ et $\mathrm{Tor}_q^{\Lambda}(A , M)$ sont nuls pour $q > 0$, on a $\mathrm{Tor}_q^{\Lambda}(A'' , M) = 0$ pour $q > 1$, et on a une suite exacte

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(A'' , M) \longrightarrow A' \otimes_{\Lambda} M \longrightarrow A \otimes_{\Lambda} M \longrightarrow A'' \otimes_{\Lambda} M \longrightarrow 0 .$$

Considérons le cas particulier où A', A et A'' sont des K-modules ; alors la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^K(A'' , K \otimes_{\Lambda} M) \longrightarrow A' \otimes (K \otimes_{\Lambda} M) \longrightarrow A \otimes (K \otimes_{\Lambda} M) \longrightarrow A'' \otimes (K \otimes_{\Lambda} M) \longrightarrow 0$$

peut être identifiée avec la suite exacte (1) ; puisqu'on a déjà prouvé que $K \otimes_{\Lambda} M = \mathrm{Tor}_0^{\Lambda}(K , M)$ est K-plat, $\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(A'' , M) = \mathrm{Tor}_1^K(A'' , K \otimes_{\Lambda} M)$ est nul.

Soit alors B n'importe quel Λ-module à droite ; $I^p B/I^{p+1} B$ est un K-module, de sorte que $\mathrm{Tor}_1^K(I^p B/I^{p+1} B , M) = 0$. Ainsi

$$\mathrm{Tor}_1(I^{p+1} B , M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1(I^p B , M)$$

est un isomorphisme. Si nous rappelons que $B_q = 0$ pour $q < 0$, on a $(I^p B)_q = 0$ pour $q < p$, et puisque $\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(I^p B , M) \approx \mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(B , M)$, on a $\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(B , M)_q = 0$ pour $q < p$, quel que soit l'entier p. Ainsi $\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(B , M) = 0$, ce qui achève de prouver que 3° entraîne 1°.

Ainsi la proposition 5 est démontrée.

Nouvelles CONVENTIONS et REMARQUE. - On supposera désormais que toutes les algèbres de Hopf, les algèbres graduées, les coalgèbres, etc. sont des K-modules plats. Comme un sous-module d'un module plat est plat (K étant un anneau de Dedekind), les conditions du corollaire 2 sont toujours remplies ; et par suite, si B est une K-algèbre de Hopf, et L une K-algèbre, nous avons une suite exacte

$$0 \longrightarrow P(B) \otimes L \longrightarrow P(B \otimes L) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^K((J(B) \otimes J(B))/J^2(B)\ ,\ L) \longrightarrow 0 \quad .$$

PROPOSITION 6. - *Soient* B *une* K-*algèbre de Hopf, et* A *une sous-algèbre de Hopf de* B. *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

1° B *est plat comme* A-*module* ;

2° *pour tout corps standard* L *associé à* K, $P(A \otimes L) \longrightarrow P(B \otimes L)$ *est un monomorphisme*.

DÉMONSTRATION. - Si B est A-plat, alors $B \otimes L$ est un module libre sur $A \otimes L$, d'après la proposition 5. On peut choisir une $(A \otimes L)$-base de $B \otimes L$ contenant $1 \in B_0 \otimes L$. Par suite l'application naturelle $A \otimes L \longrightarrow B \otimes L$ est un monomorphisme, et ceci équivaut à dire que $P(A \otimes L) \longrightarrow P(B \otimes L)$ est un monomorphisme (exposé 2, lemme 3.2).

Réciproquement, supposons 2°. Alors $A \otimes L$ est une sous-algèbre de Hopf de $B \otimes L$, et par suite $B \otimes L$ est libre comme $(A \otimes L)$-module (cf. [2], theorem 2.5). D'après la proposition 5, B est A-plat, ce qui achève la démonstration.

DÉFINITION. - On dit qu'une algèbre graduée B possède une multiplication *strictement anticommutative* si :

1° la multiplication est anticommutative ;

2° le carré de tout élément de degré impair est nul.

On notera que si la caractéristique de K est $\neq 2$, et si la multiplication est anticommutative, elle est strictement anticommutative.

PROPOSITION 7. - *Soit* B *une algèbre de Hopf sur* K, *avec une multiplication strictement anticommutative* (rappelons que la multiplication a été supposée *associative*, une fois pour toutes). *Alors les composantes de degré impair de* $Q(B)$ *sont des* K-*modules plats*.

DÉMONSTRATION. - Soit n le plus petit entier impair tel que $Q(B)_n \neq 0$; alors on a évidemment $P(B)_n = B_n = Q(B)_n$. Soit A la sous-algèbre de Hopf de B engendrée par B_n ; A est l'algèbre extérieure engendrée par B_n. D'après la proposition 6, B est un A-module plat. Or

$$C = K \otimes_A B = B /\!/ A$$

est une K-algèbre de Hopf à multiplication strictement anticommutative. La suite exacte

$$Q(A) \longrightarrow Q(B) \longrightarrow Q(C) \longrightarrow 0$$

montre que $C_n = 0$ et $Q(B)_r \approx Q(C)_r$ pour $r \neq n$. La proposition suit alors d'une application répétée du procédé précédent.

THÉORÈME 1 (SAMELSON-LERAY). - Soit B une algèbre de Hopf à multiplication strictement anticommutative (et associative), dont l'application diagonale soit associative. Si $Q(B)_r = 0$ pour r pair, alors :

1° $P(B) \longrightarrow Q(B)$ est un isomorphisme ;

2° l'application diagonale est anticommutative ;

3° si A est l'algèbre extérieure de $P(B)$, et $f : A \longrightarrow B$ l'application canonique, alors f est un isomorphisme d'algèbres de Hopf.

DEMONSTRATION. - Pour tout corps standard L associé à K , $P(B \otimes L) \longrightarrow Q(B \otimes L)$ est un isomorphisme (cf. l'exposé 2, démonstration du théorème 5.1). Considérons les suites exactes

$$0 \longrightarrow P_2(B) \longrightarrow P(B) \longrightarrow Q(B) \longrightarrow Q_2(B) \longrightarrow 0 \quad ,$$

$$0 \longrightarrow P_2(B) \otimes F \longrightarrow P(B) \otimes F \longrightarrow Q(B) \otimes F \longrightarrow Q_2(B) \otimes F \longrightarrow 0 \quad ,$$

où F désigne le corps des fractions de K . On voit que $P_2(B) \otimes F$ et $Q_2(B) \otimes F$ sont nuls, donc $Q_2(B)$ et $P_2(B)$ sont des modules de torsion, et comme $P_2(B)$ est sans torsion, $P_2(B) = 0$. Appliquons le corollaire 2 : la suite

$$0 \longrightarrow P(B) \otimes L \longrightarrow P(B \otimes L) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1((J(B) \otimes J(B))/J^2(B) \ , L) \longrightarrow 0$$

est exacte. De plus on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1(Q_2(B) \ , L) \longrightarrow P(B) \otimes L \longrightarrow Q(B) \otimes L \longrightarrow Q_2(B) \otimes L \longrightarrow 0 \quad ,$$

car, en vertu de la proposition 7, $Q(B)$ est plat. En comparant les deux suites exactes, et compte tenu du fait que $Q(B) \otimes L$ s'identifie à $Q(B \otimes L)$, on voit que $\mathrm{Tor}_1(Q_2(B) \ , L) = 0$ pour tout corps standard associé L . Ainsi $Q_2(B)$ est plat, c'est-à-dire sans torsion, et comme on a vu que $Q_2(B)$ est un module de torsion, on a finalement $Q_2(B) = 0$.

Ceci établit l'assertion 1° de l'énoncé. L'assertion 2° suit aussitôt de 1° ; et puisque $Q(a) \approx Q(B)$ et $P(A) \approx P(B)$, f est aussi bien un isomorphisme.

REMARQUE. - Au cours de la démonstration, nous avons prouvé que

$$\mathrm{Tor}_1((J(B) \otimes J(B))/J^2(B) , L) = 0 \quad ,$$

ce qui signifie que $(J \otimes J)/J^2$ est plat.

DÉFINITION et CONSTRUCTION. - Soit B une K-algèbre de Hopf à multiplication strictement anticommutative. Soit A^1 la sous-algèbre de Hopf engendrée par $B_1 = P(B)_1$. Soit B^1 l'algèbre quotient $B /\!\!/ A^1$, et soit A^2 la sous-algèbre de Hopf de B^1 engendrée par $(B^1)_3 = P(B^1)_3$. Soit $B^2 = B^1 /\!\!/ A^2$. En continuant par récurrence, supposons A^r et B^r définies pour $r \leq n$, A^r étant la sous-algèbre de Hopf de B^r engendrée par $(B^r)_{2r+1}$, et supposons que $B^{r+1} = B^r /\!\!/ A^{r+1}$ pour $r < n$. Soit alors A^{n+1} la sous-algèbre de B^n engendrée par $(B^n)_{2n+1}$, et soit $B^{n+1} = B^n /\!\!/ A^{n+1}$. Nous avons la situation suivante :

1° A^n est une algèbre extérieure pour tout entier $n > 0$;

2° $P(A^{n+1}) = Q(A^{n+1}) = (B^n)_{2n+1} = Q(B)_{2n+1}$;

3° B^n est un module plat sur A^{n+1} ;

4° si $f^n : B^n \longrightarrow B^{n+1}$ est l'application naturelle, alors

$$Q(f^n) : Q(B^n)_r \longrightarrow Q(B^{n+1})_r$$

est un isomorphisme pour $r \neq 2n + 1$, et $Q(B^n)_r = 0$ pour r impair $< 2n + 1$.

Soit $B^o = B$, et soit $f^o : B \longrightarrow B^1$ l'application naturelle. Soit $g^n : B \to B^{n+1}$ l'application composée $f^n f^{n-1} \dots f^o$. Alors g^n est une application d'algèbres de Hopf à multiplication strictement anticommutative. De plus

$$Q(g^n) : Q(B)_r \longrightarrow Q(B^{n+1})_r$$

est un isomorphisme pour r pair, ou $r > 2n + 1$.

Soit $C = \lim B^n$, et soit $g : B \longrightarrow C$ l'application naturelle d'algèbres de Hopf à multiplication strictement anticommutative. On a $Q(C)_r = 0$ pour r impair, et $Q(g) : Q(B)_r \longrightarrow Q(C)_r$ est un isomorphisme pour r pair. L'algèbre de Hopf C est appelée l'algèbre de Hopf paire associée à l'algèbre de Hopf B. Noter que $C_r = 0$ pour r impair.

Soit E^n la sous-algèbre $B \backslash\!\!\backslash B^n$, c'est-à-dire formée des $x \in B$ tels que l'application composée

$$B \xrightarrow{\Delta} B \otimes B \xrightarrow{i_B \otimes g^{n-1}} B \otimes B^n$$

envoie x dans $x \otimes 1$. Alors E^n est une sous-algèbre strictement anticommutative de B , et on a :

1° B est un E^n-module plat ;

2° $E^1 = A^1$;

3° $B /\!/ E^n = B^n$;

4° $Q(E^n)_r = 0$ pour r pair ;

5° $Q(E^n)_r \xrightarrow{\approx} Q(B)_r$ pour r impair $\leq 2n - 1$.

Soit $E = \lim E^n$. L'algèbre E est appelée <u>l'algèbre impaire associée à</u> B ; elle s'identifie à une sous-algèbre de B . On a :

1° B est un E-module plat ;

2° $B /\!/ E = C$;

3° $Q(E)_r = 0$ pour r pair ;

4° $Q(E)_r \xrightarrow{\approx} Q(B)_r$ pour r impair.

THÉORÈME 2. - *Soit* B *une* K-*algèbre de Hopf à multiplication strictement anticommutative, telle que* B *soit un* K-*module de type fini dans chaque degré. Soit* E *l'algèbre impaire associée à* B , *et soit* C *l'algèbre de Hopf paire associée à* B . *Alors* :

1° *comme algèbre graduée,* E *est isomorphe à l'algèbre extérieure du* K-*module* $Q(E)$;

2° B *est isomorphe, comme algèbre graduée, au produit tensoriel* $E \otimes C$.

DÉMONSTRATION. - Tout d'abord, puisque B est un K-module plat et de type fini dans chaque degré, B est un K-module projectif. Il en est de même de C . Donc B est projective comme E-module (cf. [2], theorem 2.5). Il s'ensuit que B est isomorphe à $E \otimes C$ comme E-module.

Observons maintenant que $Q(E)_r = Q(B)_r$, pour r impair, est un K-module plat de type fini ; donc si $\pi : I(E) \longrightarrow Q(E)$ est l'application naturelle, il existe une application K-linéaire $f : Q(E) \longrightarrow I(E)$ telle que πf soit l'identité. Or E^2 est un E^1-module plat, $E^1 = A^1$ est une algèbre extérieure, et puisque $E^2 /\!/ E^1$ est un K-module projectif, E^2 est un E^1-module projectif. De plus $E^2 /\!/ E^1 = A^2$ est une algèbre extérieure, donc E^2 est isomorphe à l'algèbre extérieure engendrée par $Q(E^2)$, et cet isomorphisme est induit par $f : Q(E^2) \longrightarrow E^2$. Observons que f applique $Q(E^n)$ dans E^n .

Supposons démontré que $f : Q(E^n) \longrightarrow E^n$ induit un isomorphisme de l'algèbre extérieure de $Q(E^n)$ sur l'algèbre E^n. Alors E^{n+1} est un E^n-module projectif, $E^{n+1} /\!\!/ E^n = A^{n+1}$, et $f : Q(E^{n+1}) \longrightarrow E^{n+1}$ induit un isomorphisme de l'algèbre extérieure de $Q(E^{n+1})$ sur l'algèbre E^{n+1}. En passant à la limite, on obtient l'assertion 1° de l'énoncé.

Ecrivons maintenant $Q(E^n)$ comme somme directe de modules de rang un :

$$Q(E^n) = \sum_{j=1}^{r} X^j \qquad ,$$

où X^j est de rang 1. Soit Λ^j l'algèbre extérieure engendrée par X^j, et soit $h_j : B \longrightarrow \Lambda^j$ l'application telle que $f_j(1) = 1$, f_j étant définie, dans les degrés > 0, comme la composée de $\pi : I(B) \longrightarrow Q(B)$ et de la projection $Q(B) \longrightarrow X^j$. Il est clair que f_j est un homomorphisme de K-algèbres. Soit $\Delta_r : B \longrightarrow B \otimes \ldots \otimes B$ (r facteurs) l'une des applications diagonales (qui est unique si Δ est associative). Soit

$$h^n : B \longrightarrow \bigotimes_{j=1}^{r} \Lambda^j = E^n$$

l'application composée

$$B \xrightarrow{\Delta_r} B \otimes \ldots \otimes B \xrightarrow{h_1 \otimes \ldots \otimes h_r} \Lambda^1 \otimes \ldots \otimes \Lambda^r = E^n \qquad .$$

Alors h^n est une rétraction de l'algèbre B sur l'algèbre E^n. Il est clair que h^n est composée de h^{n+1} et de la rétraction évidente $E^{n+1} \longrightarrow E^n$. A la limite, on obtient $h : B \longrightarrow E$, rétraction de l'algèbre B sur l'algèbre E. Soit $\lambda : B \longrightarrow E \otimes C$ l'application composée

$$B \xrightarrow{\Delta} B \otimes B \xrightarrow{h \otimes g} E \otimes C \qquad .$$

On voit facilement que λ est un isomorphisme d'algèbres, et le théorème est démontré.

DÉFINITION. - On dit qu'une K-algèbre de Hopf B possède une <u>application diagonale strictement anticommutative</u> si l'algèbre $\mathrm{Hom}_K(B , F)$ a une multiplication strictement anticommutative, F désignant le corps des fractions de K.

On dit que la K-algèbre de Hopf B est <u>strictement anticommutative</u> si sa multiplication et son application diagonale sont strictement anticommutatives.

THÉORÈME 3. - <u>Soit</u> B <u>une</u> <u>K-algèbre de Hopf strictement anticommutative, dont l'application diagonale soit associative</u> (ainsi que la multiplication). <u>Soit</u> E

l'algèbre de Hopf impaire associée à B, et C l'algèbre de Hopf paire associée à B. Alors :

1° E est une sous-algèbre de Hopf de B ;

2° il existe un unique homomorphisme $f : B \to E$ de K-algèbres de Hopf, tel que $Q(f) : Q(B) \to Q(E)$ soit l'identité dans les degrés impairs ;

3° si on considère E comme algèbre de Hopf quotient de B au moyen de f, et si $B' = B \otimes E$, l'application naturelle $B' \to C$ est un isomorphisme d'algèbres de Hopf ;

4° l'application naturelle $E \otimes B' \to B$ est un isomorphisme d'algèbres de Hopf.

DÉMONSTRATION. - Pour tout corps standard L associé à K, on a

$$P(B \otimes L)_r \xrightarrow{\approx} Q(B \otimes L)_r \qquad \text{pour } r \text{ impair} \quad .$$

Donc la suite $0 \to P(B)_r \to Q(B)_r \to Q(B)_r \to Q_2(B)_r \to 0$ est exacte pour r impair ; comme dans le théorème de SAMELSON-LERAY, on montre que $Q_2(B)_r = 0$ pour r impair, d'où l'assertion 1° de l'énoncé.

Si nous avons une rétraction $f : B \to E$ d'algèbres de Hopf, alors

$$B \xrightarrow{\Delta} B \otimes B \xrightarrow{f \otimes g} E \otimes C$$

est un homomorphisme d'algèbres de Hopf, g désignant l'application naturelle ; de plus $(f \otimes g) \circ \Delta : B \xrightarrow{\approx} E \otimes C$, et par suite le théorème sera démontré si nous prouvons l'existence d'une telle rétraction f.

Pour cela, il suffit de le faire lorsque B est de type fini, puisque f est naturelle. Pour tout K-module M, posons $M^* = \mathrm{Hom}_K(M, K)$; soit A^* la sous-algèbre de Hopf impaire de l'algèbre de Hopf B^*. L'application d'inclusion $j^* : A^* \to B^*$ induit un homomorphisme $j : B \to A$ d'algèbres de Hopf. Si $i : E \to B$ est l'injection naturelle, l'application $ji : E \to A$ est un isomorphisme d'algèbres de Hopf, et l'existence de f est démontrée.

DÉFINITION. - Pour un K-module gradué X tel que $X_0 = 0$, notons $A(X)$ l'algèbre strictement anticommutative universelle du module X.

THÉORÈME 4. - Si K est de caractéristique nulle, alors une K-algèbre de Hopf anticommutative B est isomorphe, comme algèbre, à $A(Q(B))$ si et seulement s'il existe une application K-linéaire $f : Q(B) \to I(B)$ telle que $\pi f : Q(B) \to Q(B)$ soit l'identité.

DÉMONSTRATION. - Si f existe, alors $Q(B)$ est plat, et $A(Q(B))$ est plat ; il existe un unique homomorphisme d'algèbres $\bar{f} : A(Q(B)) \to B$ qui prolonge f. La propriété universelle de $A(Q(B))$ permet de choisir une application diagonale pour $A(Q(B))$, telle que $\bar{f}$ devienne un homomorphisme d'algèbres de Hopf. Il est évident que $\bar{f}$ est un épimorphisme ; d'après la proposition 2, $\bar{f}$ est un monomorphisme, donc un isomorphisme. Inversement, si B est isomorphe, comme algèbre, à une algèbre anticommutative universelle, l'existence de f est évidente.

COROLLAIRE. - *Si* B *est de type fini, alors* B *est isomorphe à une algèbre universelle anticommutative si et seulement si* $Q(B)$ *est* K-*projectif*.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (Henri) and EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).

[2] MILNOR (J. W.) and MOORE (J. C.). - On the structure of Hopf algebras. - Princeton, 1959 (multigraphié).