Michel Zisman

Espaces de Hopf, algèbres de Hopf

Séminaire Henri Cartan, tome 12, n° 1 (1959-1960), exp. n° 2, p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1959-1960__12_1_A2_0>

ESPACES DE HOPF, ALGÈBRES DE HOPF

par Michel ZISMAN

1. Espaces de Hopf.

(1,1) DÉFINITION. - On appelle espace de Hopf un espace topologique V connexe (par arcs) muni de la donnée d'une application continue $f : V \times V \longrightarrow V$ telle qu'il existe un point $x_0 \in V$ satisfaisant à

$$f(x_0 , x) = f(x , x_0) = x \quad \text{pour tout} \quad x \in V .$$

Ainsi x_0 est élément neutre pour la loi de composition f. On pourrait, plus généralement, se borner à supposer que les deux applications $x \longrightarrow f(x_0 , x)$ et $x \longrightarrow f(x , x_0)$ sont homotopes à l'identité (condition qui ne dépend plus du choix du point x_0).

Dans ce qui suit, on supposera toujours que V est une variété compacte (connexe), ce qui entraîne que, pour tout anneau commutatif de coefficients K, l'algèbre de cohomologie $H^*(V ; K)$ est, comme K-module, engendrée par un nombre fini d'éléments. Si K est un corps, $H^*(V ; K)$ (noté aussi $H^*(V)$ s'il n'y a pas de confusion possible) est un espace vectoriel de dimension finie, et l'application canonique :

$$H^*(V) \otimes_K H^*(V) \longrightarrow H^*(V \times V)$$

est un isomorphisme d'algèbres (le produit tensoriel étant muni de la structure d'algèbre, produit tensoriel anticommutatif de deux algèbres graduées). Pour une démonstration, voir par exemple [6], corollaire 2 de la proposition 9.

(1,2) On notera $\bar{H}^*(V)$ le quotient de l'algèbre $H^*(V ; Z)$ par son idéal de torsion ; comme groupe abélien, $\bar{H}^*(V)$ est un groupe libre ayant une base formée d'un nombre fini d'éléments homogènes. Les algèbres $\bar{H}^*(V \times V)$ et $\bar{H}^*(V) \otimes_Z \bar{H}^*(V)$ sont encore canoniquement isomorphes.

On sait que $H^*(V ; K)$, resp. $\bar{H}^*(V)$, est une algèbre graduée anticommutative, la multiplication étant induite par l'application diagonale $V \longrightarrow V \times V$. D'autre part, la loi de composition $f : V \times V \longrightarrow V$ définit un homomorphisme d'algèbres graduées

(1,3) $\quad \Delta : H^*(V) \longrightarrow H^*(V) \otimes_K H^*(V)$ si K est un corps, resp. $\bar{H}^*(V) \longrightarrow \bar{H}^*(V) \otimes_Z \bar{H}^*(V)$, appelé application "diagonale" de $H^*(V)$ (resp. $\bar{H}^*(V)$). Cette application possède la propriété suivante (que nous formulons seulement pour $H^*(V)$ à coefficients dans un corps K, mais qui vaut aussi bien pour $\bar{H}^*(V)$) :

Soit $\varepsilon : H^*(V) \to K$ l'augmentation définie par l'injection $x_0 \to V$; l'homomorphisme composé

$$H^*(V) \xrightarrow{\Delta} H^*(V) \otimes H^*(V) \xrightarrow{\varepsilon \otimes 1} H^*(V)$$

est induit par l'application $x \to f(x_0, x)$, donc c'est l'identité ; de même, $(1 \otimes \varepsilon) \circ \Delta$ est l'identité. Ceci exprime que $H^*(V)$, comme K-algèbre graduée munie de l'application diagonale, est une <u>algèbre de Hopf</u> (cf. ci-dessous). Si la loi de composition f est <u>associative</u>, alors la diagonale de $H^*(V)$ est "associative" (cf. ci-dessous).

On observera que $H^*(V ; K)$ s'identifie au dual-gradué de $H_*(V ; K)$ (homologie à coefficients dans K) lorsque K est un corps ; Δ s'identifie à la transposée de l'application

$$H_*(V) \otimes H_*(V) \to H_*(V)$$

définie par laloi de composition de V ("produit de Pontrjagin" en homologie). De même, $\bar{H}^*(V)$ s'identifie au dual-gradué de $\bar{H}_*(V)$ (quotient de $H_*(V ; Z)$ par la torsion), Δ étant transposée de la multiplication de Pontrjagin

$$\bar{H}_*(V) \otimes \bar{H}_*(V) \to \bar{H}^*(V) \quad .$$

2. Rappelons ici des notions plus ou moins classiques. On désigne par K un anneau commutatif à élément unité ; on ne considérera que des K-modules gradués $A = \sum_{i \geq 0} A^i$ de <u>type fini</u> (i. e. : A^i est un K-module engendré par un nombre fini d'éléments) et <u>connexes</u> (i. e. : $A^0 \approx K$, l'isomorphisme $A^0 \to K$ étant donné). Les produite tensoriels et les Hom seront toujours pris sur K ; A^* désignera le dual gradué de A, et $T : A \otimes A \to A \otimes A$ sera l'application K-linéaire $x \otimes y \to (-1)^{m.n}\, y \otimes x$, avec $x \in A^m$, $y \in A^n$. On notera $\varepsilon : A \to K$ le composé de la projection naturelle $A \to A_0$ et de l'isomorphisme $A_0 \approx K$; et $\eta : K \to A$ le composé de l'isomorphisme $K \approx A_0$ et de l'injection naturelle $A_0 \to A$.

(2,1) DÉFINITION. - Une <u>algèbre</u> est la donnée d'un K-module gradué A et d'une application K-linéaire de degré 0, appelée <u>multiplication</u>,

$$\Phi : A \otimes A \to A$$

telle que les deux applications composées

$$A \xrightarrow{\approx} K \otimes A \xrightarrow{\eta \otimes 1_A} A \otimes A \xrightarrow{\Phi} A$$

$$A \xrightarrow{\approx} A \otimes K \xrightarrow{1_A \otimes \eta} A \otimes A \xrightarrow{\Phi} A$$

soient l'identité (i. e. : η est élément unité de l'algèbre A) .

On dit que Φ est associative si le diagramme

$$\begin{tikzcd}
& A \otimes A \arrow[dr, "\Phi"] & \\
A \otimes A \otimes A \arrow[ur, "1_A \otimes \Phi"] \arrow[dr, "\Phi \otimes 1_A"'] & & A \\
& A \otimes A \arrow[ur, "\Phi"'] &
\end{tikzcd}$$

est commutatif, et qu'elle est anticommutative si le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[d, "T"] \arrow[dr, "\Phi"] & \\
A \otimes A \arrow[r, "\Phi"'] & A
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

(2,2) DÉFINITION. - Une coalgèbre est la donnée d'un K-module gradué A et d'une application K-linéaire de degré 0 , appelée diagonale

$$\Delta : A \to A \otimes A$$

telle que les deux applications composées

$$A \xrightarrow{\Delta} A \otimes A \xrightarrow{\varepsilon \otimes 1_A} K \otimes A \xrightarrow{\approx} A$$

$$A \xrightarrow{\Delta} A \otimes A \xrightarrow{1_A \otimes \varepsilon} A \otimes K \xrightarrow{\approx} A$$

soient l'identité.

Il revient au même de dire que l'on a :

$$\Delta(1) = 1 \otimes 1 \text{ , et pour } a \in A^n \qquad (n > 0)$$

$$\Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a + \sum_i u_i \otimes v_i$$

u_i et v_i étant des éléments homogènes de degrés > 0 et $< n$.

On dit que Δ est *associative* si le diagramme

$$\begin{tikzcd} & A \otimes A \arrow[dr, "\Delta \otimes 1_A"] & \\ A \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & A \otimes A \otimes A \\ & A \otimes A \arrow[ur, "1_A \otimes \Delta"'] & \end{tikzcd}$$

est commutatif, et que Δ est *anticommutative* si le diagramme

$$\begin{tikzcd} & A \otimes A \arrow[d, "T"] \\ A \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[r, "\Delta"'] & A \otimes A \end{tikzcd}$$

est commutatif.

(2,3) PROPOSITION. - *Soit* A *une algèbre telle que* A *soit un* K-*module projectif. Alors* A^* *est une coalgèbre dont la diagonale est* Φ^**, transposée de* Φ. *Si* Φ *est associative (resp. anticommutative),* Φ^* *est associative (resp. anticommutative),*

Soit A *une coalgèbre telle que* A *soit un* K-*module projectif. Alors* A^* *est une algèbre dont la multiplication est* Δ^* *transposée de* Δ. *Si* Δ *est associative* (resp. *anticommutative*), Δ^* *est associative* (resp. *anticommutative*).

DÉMONSTRATION. - Elle repose sur le fait que le dual gradué de $A \otimes_K A$ s'identifie à $A^* \otimes_K A^*$, la dualité étant définie par

$$\langle x \otimes y \text{ , } x' \otimes y' \rangle = (-1)^{mm'} \langle x \text{ , } x' \rangle \cdot \langle y \text{ , } y' \rangle \quad \text{pour } y \in A^m \text{ , } x' \in A^{*m'} .$$

(2.4) DÉFINIRION. - Une algèbre de Hopf est définie par la donnée d'un K-module gradué A et de deux applications K-linéaires de degré 0, $\Phi : A \otimes A \longrightarrow A$ (qui munit A d'une structure d'algèbre), et $\Delta : A \otimes A$ (qui munit A d'une structure de coalgèbre), Φ et Δ étant assujetties à la condition suivante : le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "\Delta \otimes \Delta"] \arrow[dd, "\Phi"'] & A \otimes A \otimes A \otimes A \arrow[dr, "1_A \otimes T \otimes 1_A"] & \\
 & & A \otimes A \otimes A \otimes A \arrow[dl, "\Phi \otimes \Phi"] \\
A \arrow[r, "\Delta"] & A \otimes A &
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Cette condition signifie que si l'on munit $A \otimes A$ de sa structure d'algèbre (resp. de coalgèbre), Δ (resp. Φ) est un homomorphisme d'algèbre (resp. de coalgèbre).

(2,5) DÉFINITION. - On appelle <u>homomorphisme</u> d'une algèbre de Hopf A dans une algèbre de Hopf B une application K-linéaire $f : A \to B$ de degré 0, telle que

$$f \circ \Phi = \Phi \circ (f \otimes f) \quad ,$$

$$\Delta \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta \quad .$$

(2,6) PROPOSITION. - <u>Si</u> A <u>est une algèbre de Hopf de multiplication</u> Φ <u>et de diagonale</u> Δ , <u>et si</u> A <u>est un K-module projectif,</u> A^* <u>est une algèbre de Hopf de multiplication</u> Δ^* <u>et de diagonale</u> Φ^* . On notera que A s'identifie à l'algèbre duale de A^* .

3. <u>Éléments primitifs, éléments indécomposables</u>.

Soit A une algèbre, et $I(A)$ le noyau de $\varepsilon : A \to K$; $I(A)$ est donc l'idéal formé par les éléments de degré > 0 . Φ induit une application

$$\varphi : I(A) \otimes I(A) \to I(A) \quad .$$

Les éléments de $\operatorname{Im} \varphi$ sont appelés <u>éléments décomposables</u> de A . On pose $Q(A) = \operatorname{Coker} \varphi = I(A)/\operatorname{Im} \varphi$. Soit maintenant A une coalgèbre, et $I(A) = \operatorname{Ker} \varepsilon$. Δ induit une application

$$\delta : I(A) \to I(A) \otimes I(A) \quad .$$

On pose $P(A) = \operatorname{Ker} \delta$; les éléments de $P(A)$ sont appelés <u>éléments primitifs</u> de A . Il revient au même de dire que

$$x \in P(A) \Longleftrightarrow x \in I(A) \text{ et } \Delta x = x \otimes 1 + 1 \otimes x \quad .$$

(3,1) CONVENTIONS. - On écrira désormais $a.b$ (ou ab) au lieu de $\Phi(a \otimes b)$

(multiplication dans A). On notera $\deg a$ le degré d'un élément homogène $a \in A$.

(3,2) LEMME. - Soient A et B deux algèbres de Hopf telles que A et B soient des K-modules plats. Soit $f : A \to B$ un homomorphisme d'algèbres de Hopf, et soient

$$P(f) : P(A) \to P(B) , \quad Q(f) : Q(A) \to Q(B)$$

les homomorphismes qu'il induit. Alors :

a. f est injectif si et seulement si $P(f)$ est injectif ;

b. f est surjectif si et seulement si $Q(f)$ est surjectif.

DÉMONSTRATION de a. - Il est clair que si f est injectif, $P(f)$ est injectif. Réciproquement, supposons $P(f)$ injectif, et que la restriction $f|A^i$ soit une application injective pour $i < n$ $(n > 0)$. Alors la restriction de $f \otimes f$ à $A^r \otimes A^s$ est une application injective $A^r \otimes A^s \to B^r \otimes B^s$ quand r et s sont $< n$. En effet, elle se factorise en

$$A^r \otimes A^s \xrightarrow{f \otimes 1} B^r \otimes A^s \xrightarrow{1 \otimes f} B^r \otimes B^s \quad ,$$

et chaque application partielle est injective parce que A^s (resp. B^r) est un module K-plat. Soit alors $a \in A^n$ tel que $f(a) = 0$; on va montrer que $a = 0$. On a

$$\Delta a = a \otimes 1 + 1 \otimes a + \delta a \quad ,$$

où $\delta a \in \sum A^r \otimes A^s$, la somme étant étendue aux couples (r , s) tels que $r + s = n$, $r > 0$, $s > 0$. Donc

$$0 = \Delta f(a) = (f \otimes f) \Delta a = f(a) \otimes 1 + 1 \otimes f(a) + (f \otimes f)(\delta a) = (f \otimes f)(\delta a) \quad ,$$

et puisque $f \otimes f$ est injective, on en conclut $\delta a = 0$, c'est-à-dire $a \in P(A)$. Puisque $P(f)$ est injective, on a donc $a = 0$.

C. Q. F. D.

La démonstration de b. est duale de la précédente ; elle ne nécessite même pas de supposer que A et B soient des K-modules plats (parce que, en tout état de cause, le produit tensoriel est un foncteur "exact à droite").

(3,3) PROPOSITION. - Si A est une algèbre de Hopf sur un corps K , on a des isomorphismes naturels

$$(P(A))^* \approx Q(A^*) \quad , \qquad (Q(A))^* \approx P(A^*) \quad .$$

On le voit en transposant les suites exactes

$$0 \longrightarrow P(A) \longrightarrow I(A) \longrightarrow I(A) \hat{\otimes} I(A) \quad , \quad I(A) \otimes I(A) \longrightarrow I(A) \longrightarrow Q(A) \longrightarrow 0 \quad .$$

(3,4) Interprétation de $Q(A)$. - Supposons que $Q(A)$ ait une K-base homogène (ce qui est notamment le cas lorsque K est un corps). Relevons de façon homogène, dans A, les éléments d'une telle base de $Q(A)$. On obtient un système minimal de générateurs de l'algèbre graduée A (il est inutile de supposer A munie d'une application diagonale) : c'est une famille d'éléments homogènes (x_i) de degrés > 0, qui engendrent A comme algèbre à élément unité, et est telle qu'aucun x_i n'appartienne à la sous-algèbre engendrée par les x_j pour $j \neq i$.

Lorsque l'algèbre A est associative et anticommutative, et qu'on numérote par les entiers > 0 les éléments x_i d'un système minimal de générateurs, A est engendré, comme K-module, par les monômes

$$(x_1)^{r_1} \ldots (x_i)^{r_i} \ldots \quad ,$$

les exposants entiers $r_i \geqslant 0$ étant tous nuls sauf un nombre fini, avec, pour chaque i, $r_i < s_i$; on note s_i la hauteur de l'élément x_i, c'est-à-dire le plus petit entier s (éventuellement infini) tel que $(x_i)^s = 0$. Bien entendu, ces monômes peuvent être linéairement dépendants sur K ; toutefois, x_i n'est pas combinaison linéaire de monômes ne contenant pas x_i. Pour tout polynôme P à coefficients dans K, $P(x_1, \ldots, x_n)$ est un élément de A, homogène et de degré d si P est isobare de poids d (chaque lettre x_i est affectée d'un poids égal à $\deg x_i$ dans A).

(3,5) PROPOSITION. - Soit A une algèbre de Hopf sur un corps K, dont la multiplication est associative et anticommutative. Alors l'application $P(A) \longrightarrow Q(A)$ (composée de $P(A) \longrightarrow I(A) \longrightarrow Q(A)$) est injective si la caractéristique p est nulle; si $p \neq 0$, elle est injective si et seulement si on a $x^p = 0$ pour tout $x \in I(A)$.

DÉMONSTRATION. - Soit (x_i) un système minimal de générateurs, tel que

$$\deg(x_i) \leq \deg(x_j)$$

pour $i < j$. La sous-algèbre B_n de A engendrée par $x_1, \ldots, x_n$ est une algèbre de Hopf, car $\delta(x_i) \in B_{i-1}$ pour des raisons de degré. Soit C_n le quotient de B_n par l'idéal (bilatère) engendré par les x_i $(i < n)$; l'application diagonale de B_n induit une application diagonale $C_n \longrightarrow C_n \otimes C_n$ qui fait de C_n une algèbre de Hopf à un générateur x_n évidemment primitif. Supposons que $p = 0$, ou que $x^p = 0$ pour tout $x \in I(A)$, et montrons que $P(C_n) \longrightarrow Q(C_n)$ est une application bijective ; c'est trivial si $(x_n)^2 = 0$; et sinon, c'est que $p \neq 2$ et $\deg x_n$ pair (en vertu de l'anticommutativité) : si $p = 0$, on vérifie par récurrence que $(x_n)^k = 0$ pour tout k , et que $(x_n)^k$ n'est pas primitif pour $k \geqslant 2$; si $p \neq 0$, on a $(x_n)^k \neq 0$ pour $1 \leqslant k < p$, et $(x_n)^k$ n'est pas primitif pour $2 \leqslant k < p$.

Soit alors $u \in P(A)$, $u \neq 0$; on a $u \in P(B_n)$ pour un n convenable ; il suffira de montrer que l'image de u dans $Q(B_n)$ n'est pas nulle (car $Q(B_n)$ s'identifie à un sous-espace de $Q(A)$, à savoir le sous-espace engendré par les classes des x_i pour $i \leqslant n$). Procédons par récurrence sur n (c'est trivial pour $n = 0$): si $u \in P(B_n)$ a une image nulle dans $Q(B_n)$, la classe de u dans $P(C_n)$ est nulle puisque $P(C_n) \longrightarrow Q(C_n)$ est une bijection ; donc u est dans $P(B_{n-1})$, et l'image de u dans $Q(B_{n-1})$ est nulle. D'après l'hypothèse de récurrence, cela entraîne $u = 0$.

C. Q. F. D.

Il reste à montrer que si $p \neq 0$, et si l'application $P(A) \rightarrow Q(A)$ est injective, alors on a nécessairement $x^p = 0$ pour tout $x \in I(A)$. On procède par récurrence sur le degré n de x (c'est trivial pour $n = 0$) : si $x \in A^n$, alors $\delta x \in \sum A^r \otimes A^s$ $(r + s = n\ ,\ r > 0\ ,\ s > 0)$, donc, par l'hypothèse de récurrence, $(\delta x)^p = 0$. Il s'ensuit que $\Delta(x^p) = x^p \otimes 1 + 1 \otimes x^p$; ainsi x^p est primitif. Comme l'image de x^p dans $Q(A)$ est nulle, et que $P(A) \longrightarrow Q(A)$ est injective, on conclut $x^p = 0$.

La démonstration de la proposition (3,5) est ainsi achevée.

REMARQUE. - On peut montrer que, réciproquement, si l'application $P(A) \rightarrow Q(A)$ est injective, la multiplication de A doit être associative et anticommutative (voir [5]).

(3,7) PROPOSITION. - Soit A une algèbre de Hopf sur l'anneau Z des entiers. Supposons A sans torsion, la multiplication de A étant associative et anticommutative. Alors l'application $P(A) \rightarrow Q(A)$ est injective.

DÉMONSTRATION. - Puisque la tensorisation par le corps Z_0 des rationnels est un foncteur exact, $P(A \otimes Z_0)$ et $Q(A \otimes Z_0)$ s'identifient à $P(A) \otimes Z_0$ et $Q(A) \otimes Z_0$. Soit N le noyau de $P(A) \longrightarrow Q(A)$; alors $N \otimes Z_0$ est le noyau de

$$P(A) \otimes Z_0 \longrightarrow Q(A) \otimes Z_0 \quad ,$$

c'est-à-dire de $P(A \otimes Z_0) \longrightarrow Q(A \otimes Z_0)$. D'après la proposition (3,5), ce noyau est nul ; donc $N \otimes Z_0 = 0$, ce qui exprime que N est un groupe de torsion ; or N est un sous-groupe de $I(A)$, qui est sans torsion. Donc $N = 0$.

4. Structure des algèbres de Hopf.

A chaque K-espace vectoriel gradué B (resp. à chaque groupe abélien gradué B sans torsion) on associe une algèbre graduée $L(B)$ contenant B , appelée l'algèbre associative-anticommutative libre de B , et définie de la façon suivante : lorsque K est un corps, $L(B)$ est le quotient de l'algèbre tensorielle $T(B)$ par l'idéal bilatère engendrée par les éléments de la forme

$$xy - (-1)^{mn} yx \ , \quad x \in T(B) \ , \quad y \in T(B) \ , \quad \deg x = m \ , \quad \deg y = n \ .$$

(si la caractéristique p de K est $\neq 2$, le carré de tout élément de degré impair de B est donc nul ; et $L(B)$ s'identifie alors au produit tensoriel de l'algèbre extérieure construite sur la somme B^- des composantes de degré impair de B , et de l'algèbre symétrique construite sur la somme B^+ des composantes de degré pair de B). Lorsque B est un groupe abélien sans torsion, on définit $L(B)$ en faisant le quotient de $T(B)$ comme ci-dessus, puis en divisant par l'idéal de torsion de l'algèbre obtenue ; alors $L(B)$ est encore le produit tensoriel de l'algèbre extérieure de B^- et de l'algèbre symétrique de B^+ .

(4,1) Dans tous les cas, $L(B)$ possède la propriété universelle que voici : toute application linéaire $f : B \to A$ de degré 0 dans une K-algèbre graduée A , associative et anticommutative (supposée de plus sans torsion si $K = Z$) se prolonge d'une seule manière en un homomorphisme $L(B) \to A$ de K-algèbres graduées.

Soit alors A une K-algèbre de Hopf, dont la multiplication sera désormais supposée associative et anticommutative. Supposons de plus que l'on se trouve dans l'un des cas suivants :

(i) K est un corps ;

(ii) $K = Z$, A est sans torsion, et $Q(A)$ est sans torsion.

On peut donc relever dans A les éléments d'une K-base homogène de $Q(A)$, ce qui définit $f : Q(A) \to A$. Soit $g : L(Q(A)) \to A$ l'unique hommorphisme d'algèbres graduées qui prolonge f ; il est clair que g est surjectif, et induit un isomorphisme

$$Q(g) : Q(L(Q(A))) \approx Q(A) \ .$$

(4,2) THÉORÈME. - Sous les hypothèses précédentes, l'application $g : L(Q(A)) \to A$ est un isomorphisme d'algèbres graduées dans chacun des deux cas suivants :

- le cas (i) lorsque K est un corps de caractéristique 0 ;
- le cas (ii) .

Ce théorème exprime que, sous les hypothèses faites, si on note x_i les éléments de A qui relèvent les éléments d'une base homogène de $Q(A)$, les monômes

$$(x_1)^{r_1} \dots (x_i)^{r_i} \dots ,$$

où les exposants r_i sont assujettis à la condition $r_i < 2$ pour $\deg(x_i)$ impair, forment une K-base de l'algèbre A .

DÉMONSTRATION. - On va montrer d'abord que, sans hypothèse sur la caractéristique de K (et aussi dans le cas (ii)), il existe un homomorphisme d'algèbres

$$\Delta_1 : L(Q(A)) \longrightarrow L(Q(A)) \otimes L(Q(A))$$

qui relève l'application diagonale de A et fait de $L(Q(A))$ une algèbre de Hopf. Notons $L^+(Q(A))$ et A^+ les idéaux formés des éléments de degrés > 0 (A^+ n'est donc autre que $I(A)$), et considérons l'application

$$g^+ \otimes g^+ : L^+(Q(A)) \otimes L^+(Q(A)) \longrightarrow A^+ \otimes A^+ \quad ;$$

elle est surjective , puisque $g : L(Q(A)) \longrightarrow A$ est surjective. Considérons d'autre part l'application composée

$$Q(A) \xrightarrow{f} A^+ \xrightarrow{\delta} A^+ \otimes A^+ \quad ;$$

puisque $Q(A)$ est libre et que $g^+ \otimes g^+$ est surjective, cette application composée admet une factorisation

$$Q(A) \xrightarrow{h} L^+(Q(A)) \otimes L^+(Q(A)) \xrightarrow{g^+ \otimes g^+} A^+ \otimes A^+ \quad .$$

Posons alors, pour $x \in Q(A)$,

$$\Delta_1 x = x \otimes 1 + 1 \otimes x + h(x) \in L(Q(A)) \otimes L(Q(A)) \quad ;$$

Δ_1 applique $Q(A)$ dans une algèbre associative et anticommutative, danc se prolonge d'une seule manière en un homomorphisme d'algèbres

$$L(Q(A)) \longrightarrow L(Q(A)) \otimes L(Q(A)) \quad ,$$

encore noté Δ_1 . Il est clair que Δ_1 relève l'application diagonale de A et fait de $L(Q(A))$ une algèbre de Hopf ; g est un homomorphisme d'algèbres de Hopf.

Considérons alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} P(L(Q(A))) & \longrightarrow & Q(L(Q(A))) \\ \downarrow{\scriptstyle P(g)} & & \downarrow{\scriptstyle Q(g)} \\ P(A) & \longrightarrow & Q(A) \end{array}$$

On sait que $Q(g)$ est bijectif ; si l'on est dans le cas (ii), ou dans le cas (i) avec une caractéristique nulle, le premier homomorphisme horizontal est injectif, d'après (3,5) et (3,7). Dans chacun de ces cas, il s'ensuit que $P(g)$ est injectif ; donc g est injectif (lemme 3,2). Puisque g est surjectif, g est bien un isomorphisme, et le théorème est démontré.

(4,3) REMARQUE. - Sous les hypothèses du théorème 4,2, supposons que le K-module A ait une <u>base finie</u> ; alors A est, comme algèbre, isomorphe à une <u>algèbre extérieure engendrée par des éléments de degrés impairs</u>. (En effet, si $Q(A)$ contenait des éléments $\neq 0$ de degré pair, $L(Q(A))$ aurait une K-base infinie).

Dans le cas d'un corps de caractéristique $p \neq 0$, on a le théorème de structure de Borel :

(4,4) THÉORÈME. - <u>Sous les hypothèses précédentes, supposons que</u> K <u>soit un corps parfait de caractéristique</u> $p \neq 0$. <u>Supposons de plus que le relèvement</u> $f : Q(A) \to A$ <u>jouisse de la propriété suivante : si</u> x_i $(i = 1, 2, \ldots)$ <u>désigne le relèvement du</u> i<u>-ième élément de base de</u> $Q(A)$, <u>avec</u> $\deg(x_i) \leq \deg(x_j)$ <u>pour</u> $i < j$, <u>la hauteur</u> s_n <u>de chaque</u> x_n <u>est au plus égale à celle de</u> $x_n + u$, <u>quel que soit l'élément</u> u <u>de la sous-algèbre engendrée par les</u> x_i <u>pour</u> $i < n$, <u>tel que</u> $\deg(u) = \deg(x_n)$. (Un tel relèvement existe). <u>Alors le noyau de l'épimorphisme</u> $g : L(Q(A)) \to A$ <u>défini par</u> f <u>est l'idéal engendré par les</u> $(x_i)^{s_i}$ <u>relatifs aux éléments de hauteur finie</u> s_i ; <u>les</u> s_i <u>finis sont des puissances de</u> p, <u>sauf si</u> $p \neq 2$ <u>et</u> $\deg(x_i)$ <u>impair, auquel cas</u> $s_i = 2$.

Ce théorème exprime que les monômes

$$(x_1)^{r_1} \ldots (x_i)^{r_i} \ldots \quad , \quad r_i < s_i$$

forment une K-base de A.

Pour la démonstration, nous nous contenterons de renvoyer à [1] et [5].

(4,5) REMARQUE. - Plaçons-nous toujours dans les hypothèses des théorèmes 4,2 ou

4,4. On va donner une condition nécessaire et suffisante pour que A comme algèbre, soit une algèbre extérieure engendrée par des éléments de degrés impairs. Rappelons la définition du polynôme de Poincaré $P(t)$ d'un espace vectoriel gradué A (resp. un Z-module gradué libre A) :

$$P(t) = \sum_{n \geq 0} \dim(A^n)\, t^n \quad ,$$

qui en réalité peut être une série infinie (mais chaque $\dim(A^n)$ est finie par hypothèse). Si A est une algèbre extérieure engendrée par des éléments de degrés impairs n_i, $P(t)$ se met sous la forme d'un produit (éventuellement infini)

$$\prod_i (1 + t^{n_i}) \quad , \quad \text{les } n_i \text{ étant impairs.}$$

Cette condition nécessaire est aussi suffisante pour que A, sous les hypothèses des théorèmes 4,2 ou 4,3, soit une algèbre extérieure engendrée par des éléments de degrés impairs n_i. En effet, si A est engendrée, comme algèbre, par des x_i de degré n_i et de hauteur s_i, $P(t)$ est produit de facteurs

$$\frac{1}{1 - t^{n_i}} \quad \text{ou} \quad \frac{1 - t^{n_i s_i}}{1 - t^{n_i}}$$

(suivant que s_i est infini ou fini) ; supposons (ce qui est loisible) la suite des n_i croissante (au sens large), et soit i le plus petit indice tel que n_i soit pair ou $s_i \geq 2$; si n_i est pair, on trouve une contradiction en regardant le terme en t^{n_i} de $P(t)$; si n_i est impair et $s_i \geq 2$, on trouve une contradiction en regardant le terme en t^{2n_i} de $P(t)$.

(4,6) THÉORÈME. - Soit A une Z-algèbre de Hopf sans torsion, dont la multiplication est associative et anticommutative. Si $Q(A)$ est un groupe de torsion dans les degrés pairs, alors :

1° $Q(A)$ est sans torsion ;

2° A est isomorphe (comme algèbre) à une algèbre extérieure engendrée par des éléments de degrés impairs ;

3° $Q(A)/P(A)$ est sans torsion (on identifie $P(A)$ à un sous-groupe de $Q(A)$ grâce à (3,7)).

DÉMONSTRATION. - En vertu de l'hypothèse, $Q(A \otimes Z_0) = Q(A) \otimes Z_0$ est nul dans les degrés pairs ; donc, d'après le théorème 4,2, $A \otimes Z_0$ est une algèbre extérieure engendrée par des éléments de degrés impairs, et son polynôme de Poincaré $P_0(t)$ a donc la forme

$$\prod_i (1 + t^{n_i}) \quad ,$$

les n_i étant impairs. Or $P_0(t)$ est évidemment égal au polynôme de Poincaré $P(t)$ de A, et celui-ci est aussi égal au polynôme de Poincaré $P_p(t)$ de $A \otimes Z_p$ (p premier). D'après (4,5), l'algèbre $A \otimes Z_p$ est isomorphe à une algèbre extérieure engendrée par des éléments de degrés impairs n_i ; $Q(A \otimes Z_p) = Q(A) \otimes Z_p$ a pour dimension, en chaque degré impair, le nombre des n_i égal à ce degré; et la dimension de $Q(A) \otimes Z_p$ est nulle dans les degrés pairs. Donc, dans chaque degré, la dimension de $Q(A) \otimes Z_p$ sur Z_p est égale à la dimension de $Q(A) \otimes Z_0$ sur Z_0. Ceci entraîne que la composante p-primaire de $Q(A)$ est nulle, et par suite que $Q(A)$ est sans torsion (puisque cela vaut pour tout p).

Nous avons ainsi établi l'assertion 1°. Donc $Q(A)$ possède une Z-base formée d'éléments homogènes de degrés impairs, et le théorème 4,2 est applicable, ce qui entraîne l'assertion 2°. Enfin, pour p premier, la puissance p-ième de tout élément de degré >0 de $A \otimes Z_p$ est nulle, puisque $A \otimes Z_p$ est une algèbre engendrée par des éléments de degré impair et de carré nul. D'après (3,5), $P(A \otimes Z_p) \to Q(A \otimes Z_p)$ a un noyau nul. Or on voit facilement que $P(A) \otimes Z_p$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de $P(A \otimes Z_p)$; donc $P(A) \otimes Z_p \to Q(A) \otimes Z_p$ est une injection. Puisque $Q(A)$ est sans torsion, on a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Tor}_1(Q(A)/P(A)\ ,\ Z_p) \to P(A) \otimes Z_p \to Q(A) \otimes Z_p$$

donc $\mathrm{Tor}_1(Q(A)/P(A)\ ,\ Z_p) = 0$, c'est-à-dire $Q(A)/P(A)$ n'a pas d'élément d'ordre p autre que 0 . Ceci vaut pour tout p , et par suite $Q(A)/P(A)$ est sans torsion.

(4,7) COROLLAIRE. - _Soit_ A _une_ Z-_algèbre de Hopf sans torsion, ayant une base finie. Si la multiplication de_ A _est associative et anticommutative, alors_ A _est (comme algèbre) une algèbre extérieure engendrée par des éléments de degrés impairs._

En effet, l'algèbre $A \otimes Z_0$ est alors une algèbre extérieure engendrée par des éléments de degrés impairs, d'après la remarque (4,3). Donc $Q(A \otimes Z_0) = Q(A) \otimes Z_0$ est nul en degrés pairs ; ceci signifie que $Q(A)$ est un groupe de torsion dans les degrés pairs. On peut donc appliquer le théorème 4,6.

5. Le théorème de Samelson-Leray.

On a donné des conditions pour qu'une algèbre de Hopf A soit, _comme algèbre_, isomorphe à une algèbre extérieure engendrée par des éléments de degrés impairs. Mais en général, un tel isomorphisme n'est pas compatible avec les applications diagonales (on définit l'application diagonale d'une algèbre extérieure engendrée par des x_i de degrés impairs, en posant

$$\Delta x_i = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i \quad ,$$

ce qui détermine Δ puisque Δ est multiplicative). Pour qu'un tel isomorphisme soit un isomorphisme d'algèbres de Hopf, il faut et il suffit que les générateurs x_i de l'algèbre extérieure A soient primitifs. Cela revient à dire que l'application $P(A) \longrightarrow Q(A)$ est surjective.

Une condition évidemment nécessaire est que l'application diagonale de l'algèbre de Hopf A soit associative. On va voir que cette condition est suffisante. D'une façon précise :

(5,1) THÉORÈME. - Soit A une K-algèbre de Hopf (K un corps, ou $K = Z$, A étant alors sans torsion). Supposons que la multiplication de A soit associative et anticommutative, et que l'application diagonale soit associative. Si A , comme algèbre, est engendrée par des éléments de degré impair et de degré nul, A est une algèbre extérieure engendrée par des éléments primitifs de degrés impairs.

Il suffit de montrer que $P(A) \longrightarrow Q(A)$ est une application bijective, puisque les composantes homogènes de $Q(A)$ sont de degré impair. Supposons d'abord que K soit un corps, et considérons l'algèbre de Hopf duale A^* . L'application $P(A^*) \longrightarrow Q(A^*)$ est transposée de $P(A) \longrightarrow Q(A)$, qui est une injection (proposition 3,5) parce que, dans le cas de la caractéristique $p \neq 0$, la puissance p-ième d'un élément de degré > 0 est nulle (cf. le début de la démonstration du lemme 4,7). Donc $P(A^*) \longrightarrow Q(A^*)$ est surjective. Il s'ensuit que l'algèbre A^* est engendrée par des éléments de $P(A^*)$; or $P(A^*)$, dual de $Q(A)$, n'a que des éléments homogènes de degrés impairs.

Montrons que l'algèbre A^* , qui est associative (puisque l'application diagonale de A a été supposée associative) est anticommutative. Il suffit de montrer que si u et v sont des éléments primitifs de A^* , de degrés impairs, on a $uv + vu = 0$, Or $\delta(uv) = u \otimes v - v \otimes u$; donc $\delta(uv + vu) = 0$; ainsi $uv + vu$ est un élément primitif de degré pair, donc $uv + vu = 0$. Il résulte alors de l'anticommutativité de A^* que le carré de tout élément primitif u est nul, sauf si $p = 2$; mais dans ce dernier cas, on voit que u^2 est primitif, et étant de degré pair, il est nul.

Ainsi l'algèbre A^* est engendrée par des éléments de degré impair et de carré nul ; par suite (si $p \neq 0$) la puissance p-ième d'un élément de degré > 0 de

A^* est nulle. D'après la proposition 3,5, l'application $P(A^*) \to Q(A^*)$ est injective ; or elle est surjective, donc elle est bijective, et par suite $P(A) \to Q(A)$ est bijective. Ceci achève la démonstration dans le cas où K est un corps.

Supposons maintenant $K = Z$, A étant sans torsion. D'après ce qu'on vient de démontrer, $P(A \otimes Z_0) \to Q(A \otimes Z_0)$ est une bijection ; cette application s'identifie à $P(A) \otimes Z_0 \to Q(A) \otimes Z_0$, et on conclut que $(Q(A)/P(A)) \otimes Z_0 = 0$, ce qui exprime que $Q(A)/P(A)$ est un groupe de torsion. Or on a vu (théorème 4,6, 3°) que $Q(A)/P(A)$ est sans torsion. On conclut que $P(A) \to Q(A)$ est une bijection, ce qui achève la démonstration lorsque $K = Z$.

(5,2) COROLLAIRE. - Soit A une Z-algèbre de Hopf sans torsion, ayant une base finie. Si la multiplication de A est associative et anticommutative, et si l'application diagonale est associative, alors A est une algèbre extérieure engendrée par des éléments primitifs de degré impair.

Cela résulte aussitôt de (4,5) et (5,1).

(5,3) REMARQUE. - Sous les hypothèses du théorème 5,1, l'algèbre duale A^* est aussi une algèbre extérieure engendrée par des éléments primitifs de degrés impairs.

En effet, A s'identifie, comme algèbre de Hopf, à un produit tensoriel d'algèbres extérieures à un générateur de degré impair ; l'algèbre duale s'identifie au produit tensoriel des algèbres duales, dont chacune est une algèbre extérieure.

6. Application à la cohomologie des groupes de Lie compacts.

Considérons, d'une manière générale, une variété compacte connexe V munie d'une loi de composition comme dans le paragraphe 1 ("variété de Hopf"). On considérera l'homologie et la cohomologie à coefficients dans Z, ainsi qu'à coefficients dans le corps Z_p (p premier ou $p = 0$), et aussi l'homologie $\bar{H}_*(V)$ et la cohomologie $\bar{H}^*(V)$, quotients par la torsion. $H^*(V ; Z_p)$ et $H_*(V ; Z_p)$ sont des algèbres de Hopf, duales l'une de l'autre ; de même $\bar{H}^*(V)$ et $\bar{H}_*(V)$. La multiplication de $H^*(V ; Z_p)$, resp. de $\bar{H}^*(V)$, est associative et anticommutative ; de plus, si la multiplication de V est associative (ce qui est le cas si V est un groupe de Lie), alors l'application diagonale de $H^*(V ; Z_p)$, resp. de $\bar{H}^*(V)$, est associative.

Il résulte des théorèmes 4,2, 4,6 et 5,1 :

(6,1) THÉORÈME. - Si V est une variété de Hopf compacte et connexe, $\bar{H}^*(V)$ est une Z-algèbre extérieure engendrée par des éléments de degrés impairs ; $H^*(V ; Z_0)$

est une Z_0-algèbre extérieure engendrée par des éléments de degrés impairs. De plus, si la multiplication de V est associative, ces algèbres extérieures sont engendrées par des éléments primitifs de degrés impairs, et les algèbres d'homologie $H_*(V ; Z_0)$ et $\bar{H}_*(V)$ sont aussi des algèbres extérieures engendrées par des éléments de degrés impairs.

On notera que $H^*(V ; Z_0)$ s'identifie canoniquement à $\bar{H}^*(V) \otimes Z_0$, et que $H_*(V ; Z_0)$ s'identifie canoniquement à $\bar{H}_*(V) \otimes Z_0$.

Pour p premier, $H^*(V ; Z_p)$ est justiciable du théorème de Borel (4,4). On n'a pas, en général $H^*(V ; Z_p) \approx \bar{H}^*(V) \otimes Z_p$ ni $H_*(V ; Z_p) \approx \bar{H}_*(V) \otimes Z_p$. Toutefois il en est ainsi lorsque V est sans p-torsion, c'est-à-dire lorsque $H_*(V ; Z)$ (ou, ce qui revient au même, $H^*(V ; Z)$) est sans p-torsion. D'où :

(6,2) COROLLAIRE. - Soit V une variété de Hopf compacte et connexe, sans p-torsion. Alors $H^*(V ; Z_p)$ est une algèbre extérieure engendrée par des éléments de degrés impairs. Si de plus la multiplication de V est associative, $H^*(V ; Z_p)$ est une algèbre extérieure engendrée par des éléments primitifs de degrés impairs, et $H_*(V ; Z_p)$ est une algèbre extérieure engendrée par des éléments de degrés impairs.

(6,3) REMARQUE. - Puisque $H^*(V ; Z)$ est un groupe abélien de typr fini, il est sans p-torsion pour tous les p premiers sauf un nombre fini.

(6,4) REMARQUE. - Lorsque V est sans 2-torsion, on peut relever les générateurs de l'algèbre extérieure $\bar{H}^*(V)$ en des éléments de degré impair de $H^*(V ; Z)$, dont le carré est nul puisque son double est nul ; on obtient ainsi un relèvement multiplicatif de l'algèbre $\bar{H}^*(V)$ dans l'algèbre $H^*(V ; Z)$; $\bar{H}^*(V)$ s'identifie donc (non canoniquement) à une sous-algèbre de $H^*(V ; Z)$ qui est supplémentaire de l'idéal de torsion.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREL (Armand). - Cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts, Annals of Math., t. 57, 1953, p. 115-207.

[2] BOREL (Armand). - La cohomologie mod 2 de certains espaces homogènes, Comment. math. Helvet., t. 27, 1953, p. 165-197.

[3] BOREL (Armand). - Sur l'homologie et la cohomologie des groupes de Lie compacts connexes, Amer. J. of Math., t. 76, 1954, p. 273-342.

[4] BOREL (Armand) et SERRE (Jean-Pierre). - Groupes de Lie et puissances réduites de Steenrod, Amer. J. of Math., t. 73, 1953, p. 409-448.

[5] MILNOR (J. W.) and MOORE (J. C.). - On the structure of Hopf algebras. - Princeton, 1959 (notes multigraphiées).

[6] SERRE (Jean-Pierre). - Homologie singulière des espaces fibrés, Annals of Math., t. 54, 1951, p. 425-505.