

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

ANTOINE DELZANT

Groupes de Lie compacts et tores maximaux

Séminaire Henri Cartan, tome 12, n° 1 (1959-1960), exp. n° 1, p. 1-14

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1959-1960__12_1_A1_0

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1959-1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GROUPES DE LIE COMPACTS ET TORES MAXIMAUX

par Antoine DELZANT

1. Les groupes de Lie compacts classiques.

Le corps de base étant \mathbb{C} (resp. \mathbb{R} , resp. \mathbb{K} [corps des quaternions]), on considère un espace vectoriel V de dimension n sur \mathbb{C} (resp. \mathbb{R} , resp. \mathbb{K}) muni d'un produit hermitien (resp. scalaire, resp. quaternionien) noté $\langle a, b \rangle$, où a, b sont des éléments de V . Le groupe unitaire, noté $U(n)$ (resp. orthogonal, noté $O(n)$; resp. symplectique, noté $Sp(n)$) est le groupe des matrices g de $GL(n, \mathbb{C})$ (resp. de $GL(n, \mathbb{R})$, resp. de $GL(n, \mathbb{K})$) qui conservent le produit hermitien, i. e. telles que

$$\langle ga, gb \rangle = \langle a, b \rangle$$

Dans ce paragraphe, on se borne à préciser les définitions de ces groupes, et à en rappeler les principales propriétés. Celles-ci sont d'ailleurs bien connues (cf. [8] et [4]).

Le groupe unitaire $U(n)$.

$$U(n) = \left\{ g \in GL(n, \mathbb{C}) ; \bar{g} = {}^t g^{-1} \right\} .$$

C'est un groupe connexe, de dimension réelle n^2 . Il admet un sous-groupe :

Le groupe spécial unitaire $SU(n)$.

$$SU(n) = SL(n, \mathbb{C}) \cap U(n) .$$

C'est le groupe des matrices unitaires de déterminant $+1$. Ce groupe est connexe, simplement connexe, et de dimension réelle $n^2 - 1$.

Le groupe orthogonal $O(n)$.

$$O(n) = \left\{ g \in GL(n, \mathbb{R}) ; g = {}^t g^{-1} \right\}$$

$O(n)$ est l'ensemble des matrices réelles de $U(n)$. Le groupe orthogonal admet deux composantes connexes ($\det g = +1$, $\det g = -1$); sa dimension réelle est $\frac{n(n-1)}{2}$. La composante connexe de l'élément neutre est :

Le groupe spécial orthogonal $SO(n)$.

$$SO(n) = SL(n, \mathbb{R}) \cap O(n)$$

C'est un groupe connexe, de dimension réelle $\frac{n(n-1)}{2}$. Son groupe fondamental est cyclique d'ordre 2 .

Le groupe symplectique $Sp(n)$. - Identifions le corps \mathbb{K} avec l'algèbre $\mathbb{C} + j\mathbb{C}$ munie des relations : $j^2 = -1$; $jz = \bar{z}j$; $z \in \mathbb{C}$. Le groupe symplectique opérant sur l'espace vectoriel à droite $V = \mathbb{K}^n$, ($g(ak) = g(a)k$; $g \in Sp(n)$, $k \in \mathbb{K}$), on démontre ([8], chapitre 1 , paragraphe VIII) que $Sp(n)$ s'identifie au sous-groupe de $U(2n)$ qui laisse invariante la forme bilinéaire

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i y_{i+n} - x_{i+n} y_i .$$

On peut écrire une matrice g de $Sp(n)$ sous la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a, b, c, d , étant des matrices (n, n) à coefficients complexes. Alors

$$Sp(n) = \left\{ g \in U(2n) ; {}^t g J g = J \right\} \quad \text{où } J = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}$$

$Sp(n)$ est un groupe connexe, simplement connexe, et de dimension réelle $\frac{2n(2n+1)}{2}$.

2. Tores maximaux des groupes de Lie compacts.

Rappelons que tout groupe de Lie abélien, compact et connexe, est isomorphe à un tore, produit d'un nombre fini de groupes isomorphes à $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq U(1)$ (en effet, l'algèbre de Lie d'un tel groupe est celle d'un \mathbb{R}^r). Les tores contenus dans un groupe de Lie G sont donc les sous-groupes abéliens compacts et connexes de G . Un tore $T \subset G$ est dit maximal s'il est maximal dans l'ensemble des tores contenus dans G . Il existe de tels tores maximaux, car toute suite croissante de tores contenus dans G est stationnaire, puisque les dimensions de ces tores sont bornées.

PROPOSITION 1. - Soit G un groupe de Lie compact. Supposons qu'il existe un tore $T \subset G$, tel que

$$G = \bigcup_{g \in G} g T g^{-1} .$$

Alors :

(i) T est un tore maximal ;

- (ii) Tout tore de G est contenu dans un conjugué gTg^{-1} ;
 (iii) Les tores maximaux de G sont les gTg^{-1} .

DÉMONSTRATION. - Montrons d'abord (ii) . Soit A un tore contenu dans G ; on sait (théorème de Kronecker) qu'il existe un élément "générateur" a de A , c'est-à-dire tel que A soit l'adhérence du sous-groupe engendré par a . Par hypothèse, il existe $g \in G$ tel que $a \in gTg^{-1}$; puisque gTg^{-1} est fermé dans G , on a $A \subset gTg^{-1}$, ce qui établit (ii) . Soit alors T' un tore maximal de G (on sait qu'il en existe) ; on vient de voir qu'il existe $g \in G$ tel que $T' \subset gTg^{-1}$, ce qui exige $T' = gTg^{-1}$ et entraîne que gTg^{-1} est maximal ; T est donc aussi maximal. T étant maximal, tous les gTg^{-1} sont maximaux.

Lorsque G est compact et connexe, l'assertion (i) ci-dessus admet une réciproque :

THÉOREME 1. - Si G est un groupe de Lie compact connexe, et si T est un tore maximal de G , alors G est réunion des conjugués gTg^{-1} (où g parcourt G) .

Compte tenu de la proposition 1, ce théorème admet les corollaires suivants :

COROLLAIRE 1. - Tous les tores maximaux de G sont conjugués, et ont même dimension $r \geq 1$ (sauf si G est réduit à l'élément neutre) ; r s'appelle le rang de G .

COROLLAIRE 2. - Si G n'est pas réduit à l'élément neutre, tout $x \in G$ appartient à un sous-groupe à un paramètre.

Avant de démontrer le théorème 1 en toute généralité, nous allons étudier les tores maximaux des groupes classiques, et vérifier le théorème 1 dans chacun des cas particuliers envisagés.

A. Groupe $U(n)$. - Soit T le sous-groupe des matrices diagonales de $U(n)$; c'est évidemment un tore de dimension n . Rappelons le résultat classique (cf. [5], paragraphe 7, n° 3, proposition 4) : dans le groupe $U(n)$, toute matrice x est semblable à une matrice diagonale, i. e. il existe $g \in U(n)$ telle que $gxg^{-1} \in T$. En vertu de la proposition 1, T est un tore maximal , le théorème 1 se trouve bien vérifié lorsque $G = U(n)$. Le rang de $U(n)$ est n .

A'. Groupe $SU(n + 1)$. - Ici encore, toute matrice est semblable à une matrice diagonale. Les matrices diagonales forment un tore de dimension n (puisque les éléments λ_i de la diagonale sont astreints à la condition $\prod_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$) .

C'est un tore maximal, et $SU(n+1)$ est de rang n .

B. Groupe $Sp(n)$. - Soit D le sous-groupe des matrices diagonales de $Sp(n)$, qui est isomorphe à $(Sp(1))^n$. On sait ([5], loco citato) que toute matrice de $Sp(n)$ est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire à un élément de D . Chaque facteur $Sp(1)$ de D étant identifié à $SU(2)$, contient un tore maximal T de dimension 1; le produit T^n de ces tores est un sous-groupe de D , tel que tout élément de $Sp(n)$ soit conjugué d'un élément de T^n . D'après la proposition 1, T^n est un tore maximal, et on vérifie encore dans ce cas le théorème 1. Le rang de $Sp(n)$ est n .

C. Groupe $SO(n)$. - On sait ([5], loco citato) que si $x \in SO(n)$, l'espace R^n dans lequel opère $SO(n)$ est somme directe de sous-espaces de dimension 1 ou 2, stables par x . Donc tout élément de $SO(n)$ est conjugué d'un élément du sous-groupe T défini comme suit: si $n = 2m$, T est formé des matrices de la forme

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & & 0 & & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ 0 & & & \cos \theta_m & -\sin \theta_m & \\ & & & \sin \theta_m & \cos \theta_m & \end{pmatrix}$$

Si $n = 2m + 1$, T est formé des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où M a le type précédent. Dans un cas comme dans l'autre, la proposition 1 montre que T est un tore maximal; $SO(2m)$ et $SO(2m+1)$ sont de rang m .

3. Démonstration du théorème 1.

Pour démontrer ce théorème, on suit [10]. Soit T un tore maximal du groupe de Lie compact connexe G . Soit N le normalisateur de T dans G (ensemble des $x \in G$ tels que $xTx^{-1} = T$), et soit \bar{T} le groupe quotient N/T . On va montrer que \bar{T} est un groupe fini. Le groupe des automorphismes de T est isomorphe au groupe des matrices $SL(r, \mathbb{Z})$ ($r = \dim T$) qui est discret; N admet un homomorphisme dans ce groupe, et le noyau de cet homomorphisme contient la composante connexe N^0 de l'élément neutre. Mais N est fermé, donc N^0 est un groupe de Lie

qui contient T et qui commute aux éléments de T . Si N^0 était différent de T on pourrait trouver un sous-groupe à un paramètre de N^0 qui engendrerait avec T un tore strictement plus grand que T . Puisque T est maximal, on a $N^0 = T$, et $\mathbb{F} = N/T = N/N^0$ est discret et compact, donc fini. Ce groupe fini opère dans T , et on verra (corollaire 5 du théorème 4) qu'il opère fidèlement. Il résultera du théorème 1 que les groupes \mathbb{F} relatifs à deux tores maximaux sont canoniquement isomorphes ; \mathbb{F} s'appelle le groupe de Weyl de G .

Soit V l'espace G/T des classes à gauche gT ($g \in G$) ; c'est une variété compacte, orientable, dont on désignera la dimension par n . Pour tout $x \in G$, la translation à gauche $gT \rightarrow xgT$ est une transformation f_x de V . Puisque G est connexe, les transformations f_x sont homotopes entre elles. Un point fixe de f_x est la classe d'un $g \in G$ tel que $gT = xgT$, c'est-à-dire $x \in gTg^{-1}$. Le théorème 1 sera démontré si nous prouvons que, pour tout $x \in G$, la transformation f_x possède au moins un point fixe.

Pour cela, on va faire appel à la théorie du "nombre de Lefschetz" en topologie algébrique (cf. [1], chapitre 17). Soit V une variété compacte de dimension n , et f une application continue $V \rightarrow V$; le nombre de Lefschetz $L(f)$ est un entier jouissant des propriétés suivantes :

(i) Si f et g sont homotopes, $L(f) = L(g)$;

(ii) Si f est l'application identique, $L(f)$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(V)$;

(iii) Si f n'a pas de point fixe, $L(f) = 0$;

(iv) Si f n'a que des points fixes isolés a_i (en nombre fini), on a

$$L(f) = (-1)^n \sum_i k(a_i) \quad ,$$

$k(a_i)$ étant "l'indice" du point fixe isolé a_i ;

(v) Si f est différentiable au point fixe isolé a , et si l'application linéaire tangente df au point a n'admet pas la valeur propre 1, l'indice $k(a) = \text{sgn}(\det(df - I))$, I désignant la matrice unité.

THÉORÈME 2. - Si T est un tore maximal d'un groupe de Lie compact et connexe G , la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(G/T)$ est égale à l'ordre du groupe de Weyl $\mathbb{F} = N/T$.

Une fois ce théorème démontré, on saura que, pour tout $x \in G$, $L(f_x)$ est égal à l'ordre de \mathbb{F} , donc n'est pas nul ; par suite f_x possède au moins

un point fixe, ce qui établit le théorème 1.

Prouvons maintenant le théorème 2. Pour calculer $L(f_x)$, qui ne dépend pas de $x \in G$ d'après (i), on choisit pour x un "générateur" du tore T . Alors si $g \in G$ est tel que $xgT = gT$, on a $x \in gTg^{-1}$, donc $T \subset gTg^{-1}$, et par suite $T = gTg^{-1}$: donc $g \in N$. Réciproquement, si $g \in N$, gT est un point fixe de f_x . Ainsi les points fixes de f_x sont les points de l'ensemble fini N/T . De plus la transformation f_x est la transformation de $V = G/T$ induite par l'automorphisme intérieur $g \rightarrow xgx^{-1}$ de G .

Soit \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G , et \mathfrak{t} l'algèbre de Lie de T , qui est une sous-algèbre abélienne maximale de \mathfrak{g} . Si $\bar{n} \in N/T$, l'espace tangent à V au point \bar{n} s'identifie à $\mathfrak{g}/\mathfrak{t}$, et la transformation linéaire tangente à f_x est induite par la transformation $Ad(x)$ du groupe adjoint linéaire (opérant dans \mathfrak{g} et laissant fixes les points de \mathfrak{t}). Soit \mathfrak{f} une forme quadratique définie positive sur \mathfrak{g} , invariante par le groupe adjoint linéaire (ce groupe étant compact, une telle forme existe). Soit \mathfrak{t}^\perp l'orthogonal de \mathfrak{t} pour \mathfrak{f} ; $Ad(x)$ laisse \mathfrak{t}^\perp stable, et on peut identifier $\mathfrak{g}/\mathfrak{t}$ à \mathfrak{t}^\perp dans lequel opère $Ad(x)$. Pour calculer l'indice $k(\bar{n})$ du point fixe \bar{n} , on va utiliser (ν): la transformation linéaire $Ad(x)$ opérant dans \mathfrak{t}^\perp n'admet pas la valeur propre 1, car si $Ad(x).X = X$ avec $X \in \mathfrak{t}^\perp$, on a $Ad(t).X = X$ pour tout $t \in T$, donc X engendre avec \mathfrak{t} une sous-algèbre abélienne de \mathfrak{g} , et par suite $X = 0$ puisque \mathfrak{t} est maximale. Supposons de plus (ce qui est loisible) que x a été choisi suffisamment voisin de l'élément neutre; alors -1 n'est pas non plus valeur propre de $Ad(x)$. Ainsi les valeurs propres de $Ad(x)$ opérant dans \mathfrak{t}^\perp sont des nombres complexes deux à deux imaginaires conjugués (ce qui prouve en passant que la dimension n de G/T est paire), et $\det(df_x - I)$ est > 0 (produit de nombres deux à deux imaginaires conjugués), d'où $k(\bar{n}) = +1$. Puisque ceci est vrai pour chaque point fixe \bar{n} de f_x , la propriété (iv), et le fait que n est pair, entraînent le théorème 2.

4. Compléments au théorème de conjugaison.

On suit toujours [10].

THÉORÈME 3. - Soit G un groupe de Lie compact connexe, T un tore maximal, M un sous-ensemble quelconque de T . Si $g \in G$ est tel que $gMg^{-1} \subset T$, alors il existe $n \in N$ tel que $nmn^{-1} = gmg^{-1}$ pour tout $m \in M$.

COROLLAIRE. - Si deux éléments de T sont conjugués, alors ils sont transformés

l'un de l'autre par un élément σ de $\Phi = N/T$.

Soit G' le sous-groupe des éléments de G qui commutent à tous les éléments de M (i. e. $gm = mg$ pour tout m de M) ; soit G'^0 la composante connexe de G contenant l'élément neutre. G'^0 est un groupe de Lie compact connexe contenant T ; G'^0 contient $g^{-1}Tg$; en effet si $x \in g^{-1}Tg$, alors $xm = mx$ pour tout $m \in M$, car gmg^{-1} commute à T par hypothèse, donc $g^{-1}Tg \subset G'$ et, puisque $g^{-1}Tg$ est connexe, $g^{-1}Tg \subset G'^0$. Ainsi T et $g^{-1}Tg$ sont des tores maximaux de G'^0 ; ils sont donc conjugués dans G'^0 . Donc il existe $g' \in G'^0$ tel que $g'g^{-1}Tgg'^{-1} = T$; donc $gg'^{-1} = n \in N$ et $nmn^{-1} = gmg^{-1}$ car g' est dans G' et commute à T .

THÉOREME 4. - Soit G un groupe de Lie compact connexe ; soit A un tore de G et x un élément de G commutant à A ; alors il existe un tore maximal contenant A et x .

Soit A' l'adhérence du sous-groupe engendré par A et x ; A' est compact et abélien. Soit A'^0 la composante connexe de l'élément neutre dans A' ; A'^0 est un tore, et A' est somme directe de A'^0 et d'un groupe abélien fini. Donc x appartient à un sous-groupe A'' du type $A'^0 \oplus Z_n$ (Z_n groupe cyclique d'ordre n). Mais dans A'' il existe un élément dont les puissances sont partout denses : il suffit de prendre un "générateur" u de A'^0 , un générateur z de Z_n , et de choisir dans A'^0 un y tel que $y^n = u$; alors (y, z) est un "générateur" de A'' . Ce générateur appartient à un tore maximal T ; donc A'' est contenu dans T .

COROLLAIRE 1. - Si $x \in G$ commute aux éléments d'un tore maximal T , alors x est dans T .

COROLLAIRE 2. - Le centre de G est contenu dans tout tore maximal.

COROLLAIRE 3. - Tout tore maximal est un sous-groupe abélien maximal.

COROLLAIRE 4. - Le commutant d'un tore est connexe.

(C'est la réunion des tores maximaux contenant ce tore).

COROLLAIRE 5. - $\Phi = N/T$ opère fidèlement sur T (car si $n \in N$ opère trivialement dans T , alors $n \in T$ d'après le corollaire 1).

5. Groupe fondamental d'un groupe de Lie compact semi-simple.

Rappelons qu'un groupe de Lie est dit simple (resp. semi-simple) si son algèbre de Lie est simple (resp. semi-simple). Une algèbre de Lie est simple

si elle n'admet pas d'idéal non trivial et n'est pas de dimension 1 ; une algèbre de Lie est semi-simple si elle n'admet aucun idéal abélien $\neq 0$.

THÉORÈME 5. - Soit G un groupe de Lie compact et connexe, semi-simple ; alors le groupe fondamental $\pi_1(G)$ est un groupe abélien fini.

COROLLAIRE. - Le revêtement universel d'un groupe de Lie semi-simple, compact et connexe, est un groupe de Lie compact (semi-simple et connexe).

Pour démontrer le théorème 5, on utilisera un lemme :

LEMME. - Soit X un espace compact, localement connexe par arcs et localement simplement connexe. Alors le groupe $\pi_1(X)$ est engendré par un nombre fini d'éléments.

Soit $\{U_i\}$ un recouvrement de X par un nombre fini d'ouverts connexes et simplement connexes. Soit \bar{V}_i un autre recouvrement de X , ouvert, et tel que $\bar{V}_i \subset U_i$. Quels que soient i et j , choisissons un point dans chaque composante connexe de $U_i \cap U_j$ contenant un point de $\bar{V}_i \cap \bar{V}_j$. On a ainsi un nombre fini de points $x_{i,j,a}$. Traçons un chemin $[x_{i,j,a} ; x_{i,j',a}]$ contenu dans U_i . Si on trace de tels chemins pour tous les i , on en a un nombre fini. Alors tout lacet (le point base étant un $x_{i,j,a}$ fixé) est homotope à un produit de chemins du type précédent. (En effet, soit L un tel lacet, et L^0 une composante connexe de $L^0 \cap U_i$; on peut déformer L^0 sur l'un des chemins). Donc $\pi_1(X)$ a un nombre fini de générateurs.

Rappelons d'autre part, le résultat classique : le groupe fondamental $\pi_1(G)$ d'un groupe topologique G est abélien. Donc si G est un groupe de Lie compact connexe, $\pi_1(G)$ est un groupe abélien de type fini ; il reste à montrer que si de plus G est semi-simple, $\pi_1(G)$ est un groupe de torsion. D'après le théorème de Hurewicz (voir par exemple [9]), $\pi_1(G)$ est isomorphe au groupe d'homologie $H_1(G, \mathbb{Z})$; le théorème 5 sera donc démontré si on prouve que le groupe de cohomologie

$$H^1(G, \mathbb{R}) = \text{Hom}(H_1(G, \mathbb{Z}), \mathbb{R})$$

est nul. D'après le théorème de de Rham, il revient au même de montrer que toute forme différentielle ω sur G , de degré 1 et biinvariante, est nulle. Or si elle ne l'était pas, l'équation $\omega = 0$ définirait une sous-algèbre de Lie invariante de codimension 1 ; l'orthogonale (pour la forme de Killing) serait une sous-algèbre invariante de dimension 1, ce qui contredit la semi-simplicité de G .

6. Structure des groupes de Lie compacts.

Soit G un groupe de Lie compact et \mathfrak{g} son algèbre de Lie. Nous dirons qu'une algèbre de Lie est "compacte" si elle est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie compact.

PROPOSITION 2. - Une algèbre de Lie "compacte" est, de façon unique, produit direct (au sens de sa structure d'algèbre de Lie) d'algèbres simples et d'une algèbre abélienne.

DÉMONSTRATION. - Soit G le groupe de Lie dont \mathfrak{g} est l'algèbre de Lie. On a une représentation linéaire du groupe G dans \mathfrak{g} par le groupe adjoint. Le groupe G étant compact, cette représentation est complètement réductible (semi-simple). En regardant la représentation adjointe de \mathfrak{g} elle-même, on voit que les sous-espaces invariants par la représentation adjointe sont des idéaux, dont \mathfrak{g} est le produit direct.

En regroupant les sous-algèbres abéliennes entre elles, on peut écrire $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{g}'$, où \mathfrak{z} est le centre de \mathfrak{g} , et \mathfrak{g}' est une algèbre semi-simple, produit direct d'algèbres simples (\mathfrak{g} est réductive, [7]). Cette décomposition est évidemment unique.

COROLLAIRE. - Un groupe de Lie compact connexe est semi-simple si et seulement si son centre est discret.

En effet, la proposition 2 montre qu'une algèbre de Lie compacte est semi-simple si et seulement si son centre est réduit à 0.

THÉOREME 6. - Tout groupe de Lie compact connexe G est localement isomorphe au produit d'un tore et de groupes de Lie compacts simples. D'une façon plus précise, G possède un revêtement fini qui est le produit d'un tore et des groupes compacts simples connexes.

DÉMONSTRATION. - Puisque G est connexe, le noyau de la représentation adjointe de G dans son algèbre de Lie \mathfrak{g} est le centre Z de G . Ainsi le groupe de Lie compact G/Z opère fidèlement dans \mathfrak{g} ; soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} + \sum_i \mathfrak{g}_i$ la décomposition de la proposition 2; G/Z opère fidèlement dans $\sum_i \mathfrak{g}_i$. Soit G_i le sous-groupe de G/Z formé des éléments qui opèrent trivialement dans $\sum_{j \neq i} \mathfrak{g}_j$; il est clair que G_i est compact et contient le sous-groupe de G/Z engendré par \mathfrak{g}_i (en identifiant l'algèbre de Lie de G/Z à $\sum_i \mathfrak{g}_i$). Montrons que

l'algèbre de Lie \mathfrak{g}_i de G_i est exactement \mathfrak{g}_i ; s'il n'en était pas ainsi, \mathfrak{g}_i contiendrait un élément non nul de $\sum_{j \neq i} \mathfrak{g}_j$, donc G_i contiendrait un élément du groupe produit $\prod_{j \neq i} G_j$, autre que l'élément neutre ; un tel élément opérerait trivialement sur \mathfrak{g}_i , et aussi sur les \mathfrak{g}_j pour $j \neq i$, ce qui est absurde.

Ainsi chaque \mathfrak{g}_i est l'algèbre de Lie d'un groupe compact G_i , qu'on peut supposer connexe. En remplaçant au besoin G_i par son revêtement universel (qui est compact d'après le corollaire au théorème 5), on peut considérer, pour chaque i , un groupe compact connexe et simplement connexe G_i dont \mathfrak{g}_i soit l'algèbre de Lie ; G_i est un groupe de Lie simple. L'injection de \mathfrak{g}_i dans \mathfrak{g} définit un homomorphisme local de G_i dans G ; par produit, on obtient un homomorphisme local de $\prod_i G_i$ dans G . Puisque $\prod_i G_i$ est simplement connexe, cet homomorphisme local se prolonge en un homomorphisme (continu) de tout le groupe $\prod_i G_i$ dans G . Soit Z^0 la composante connexe de l'élément neutre dans le centre Z de G . L'algèbre de Lie de Z^0 étant évidemment \mathfrak{z} , l'homomorphisme

$$Z^0 \times \prod_i G_i \longrightarrow G$$

défini par l'injection $Z^0 \longrightarrow G$ et par l'homomorphisme déjà défini $\prod_i G_i \longrightarrow G$ est un homomorphisme continu, qui est localement un isomorphisme ; son image est un sous-groupe ouvert, donc c'est G puisque G est connexe ; son noyau est discret, et ceci achève la démonstration.

COROLLAIRE. - Tout groupe de Lie compact et semi-simple, connexe et simplement connexe, est un produit de groupes de Lie compacts simples (connexes et simplement connexes).

La détermination de tous les groupes de Lie compacts revient donc essentiellement à celle des groupes simples compacts.

7. Les groupes de Lie compacts simples.

Les résultats sur les algèbres de Lie simples tels qu'on les trouvera dans [2], [3] et [6] permettent de classifier toutes les algèbres simples. On se borne ici à énoncer les résultats :

Soit V un espace vectoriel complexe de dimension m , et \mathfrak{a} l'algèbre de Lie de tous les endomorphismes de V .

Type A_n . Soit \mathfrak{g} l'algèbre des opérateurs de trace nulle ; c'est un idéal de \mathfrak{a} ; \mathfrak{g} est une algèbre simple de type A_n pour $m = n + 1$ ($n \geq 1$) . Le groupe compact classique correspondant est $SU(n + 1)$.

Type C_n . Soit définie sur V une forme bilinéaire alternée non dégénérée (x, y) . Soit \mathfrak{g} la sous-algèbre de \mathfrak{a} des opérateurs tels que $(Xx, y) + (x, Xy) = 0$. \mathfrak{g} est simple et de type C_n si $m = 2n$, $n \geq 1$. Le groupe compact classique correspondant est $Sp(n)$.

Types B_n et D_n . Soit définie sur V une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, (x, y) ; soit \mathfrak{g} la sous-algèbre de \mathfrak{a} des opérateurs tels que $(Xx, y) + (x, Xy) = 0$.
 \mathfrak{g} est de type B_n si $m = 2n + 1$, $n \geq 1$; le groupe compact classique correspondant étant le groupe $SO(2n + 1)$.
 \mathfrak{g} est de type D_n si $m = 2n$, $n \geq 3$, le groupe classique correspondant étant $SO(2n)$.

Enfin on démontre que, mis à part 5 algèbres exceptionnelles, on a obtenu ainsi toutes les algèbres simples. Les groupes exceptionnels compacts sont notés G_2 , F_4 , E_6 , E_7 , E_8 ; l'indice indique le rang du groupe ; leurs dimensions respectives sont 14, 52, 78, 133, 248 . G_2 est le groupe de Lie des automorphismes des octaves de Cayley.

Ainsi, en dehors des groupes exceptionnels, tout groupe simple compact est localement isomorphe à l'un des groupes simples "classiques" :

$$\left\{ \begin{array}{ll} SU(n + 1), & n \geq 1 \quad ; \\ Sp(n), & n \geq 1 \quad ; \\ SO(n), & n \geq 3, \quad n \neq 4 \quad . \end{array} \right.$$

En fait, ces groupes ne sont pas tous distincts (au point de vue de l'isomorphisme local). D'une façon précise :

$Sp(1)$ et $SU(2)$ sont isomorphes, et isomorphes au groupe multiplicatif S_3 des quaternions de norme 1 ;

$Sp(1)$ est un revêtement d'ordre 2 de $SO(3)$ (on définit $Sp(1) \rightarrow SO(3)$ en associant à tout quaternion x de norme 1 la transformation $k \rightarrow xkx^{-1}$ de l'espace des quaternions) ;

$Sp(2)$ est un revêtement d'ordre 2 de $SO(5)$;

$SU(4)$ est un revêtement d'ordre 2 de $SO(6)$.

(Pour ces deux derniers revêtements, voir [4]).

On démontre qu'en dehors des relations précédentes, les groupes $SU(n+1)$, $Sp(n)$ et $SO(n)$ ne sont jamais deux à deux localement isomorphes.

Rappelons d'autre part que $Sp(1) \times Sp(1)$ est un revêtement d'ordre 2 de $SO(4)$ (à chaque couple (x, y) de quaternions de norme 1 on associe la transformation $k \mapsto xky^{-1}$ de l'espace des quaternions) ; ceci met en évidence le fait que le groupe $SO(4)$ n'est pas simple.

En résumé, on obtient une fois et une seule chaque type de groupe compact simple classique, en considérant

$$(1) \quad \begin{cases} Sp(n) & \text{pour } n \geq 1 & ; \\ SU(n+1) & \text{pour } n \geq 2 & ; \\ SO(2n+1) & \text{pour } n \geq 3 & ; \\ SO(2n) & \text{pour } n \geq 4 & . \end{cases}$$

Les groupes $SU(n+1)$ et $Sp(n)$ sont simplement connexes. Les groupes $SO(m)$ admettent un groupe fondamental d'ordre deux ; on note $Spin(m)$ le revêtement simplement connexe (à deux feuilletés) de $SO(m)$.

8. Groupe de Weyl des groupes classiques.

On va expliciter le groupe de Weyl pour chacun des groupes $U(n)$, $SU(n+1)$, $Sp(n)$, $SO(2n+1)$ et $SO(2n)$. Cette explicitation permettra de vérifier que les groupes (1) sont simples, sans se référer à la classification générale des algèbres de Lie. En effet, il résulte facilement des théorèmes 1 et 3 le critère suivant :

PROPOSITION 3. - Pour qu'un groupe de Lie compact connexe G soit simple, il faut et il suffit que, si l'on considère le groupe de Weyl Φ comme opérant sur le revêtement universel V d'un tore maximal T de G , les seuls sous-espaces vectoriels de V stables par Φ soient 0 et V tout entier.

Ceci étant, fixons les notations :

$U(n)$: T se compose des matrices diagonales ; les éléments diagonaux sont de la forme $e^{i\theta_j}$ ($1 \leq j \leq n+1$) ; nous repérons un point du revêtement universel V par ses coordonnées θ_j .

$SU(n+1)$: T se compose des matrices diagonales dont les éléments diagonaux sont les $e^{i\theta_j}$ ($1 \leq j \leq n+1$) tels que $\sum_j \theta_j = 0$; nous repérons un point du revêtement universel V de T par les θ_j tels que $\sum_j \theta_j = 0$.

$Sp(n)$: Ayant identifié $Sp(n)$ à un sous-groupe de $U(2n)$ comme il a été dit au paragraphe 2, T se compose des matrices diagonales dont les éléments diagonaux sont les $e^{i\theta_j}$ et les $e^{-i\theta_j}$ ($1 \leq j \leq n$). Nous repérons un point de V par les n nombres θ_j .

$SO(2n + 1)$: Avec les notations du paragraphe 2, C , on repère les points de V par les n coordonnées θ_j ($1 \leq j \leq n$). De même pour le groupe $SO(2n)$.

Un élément σ du groupe de Weyl \mathfrak{F} définit une transformation linéaire sur les coordonnées θ_j . Il est facile de les expliciter (nous laissons au lecteur, à titre d'exercice, le soin de vérifier les résultats affirmés ci-après).

Dans tous les cas, $\sigma(\theta_j)$ est de la forme $\epsilon_j \theta_{w(j)}$, où w désigne une permutation des indices des θ_j , et $\epsilon_j = \pm 1$.

Lorsque $G = U(n)$ ou $SU(n + 1)$, w parcourt le groupe de toutes les permutations des indices j , on a toujours $\epsilon_j = +1$; \mathfrak{F} a donc $n!$ (resp. $(n + 1)!$) éléments.

Lorsque $G = Sp(n)$, ou $G = SO(2n + 1)$, w parcourt le groupe de toutes les permutations des indices j , et les signes ϵ_j sont arbitraires; \mathfrak{F} a donc $2^n n!$ éléments.

Lorsque $G = SO(2n)$, w parcourt le groupe de toutes les permutations des indices j , et les $\epsilon_j = \pm 1$ satisfont à l'unique condition que $\prod_j \epsilon_j = +1$. Le groupe \mathfrak{F} a donc $2^{n-1} n!$ éléments.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] ALEXANDROFF (Paul) und HOPF (Heinz). - Topologie. - Berlin, J. Springer, 1935 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 45).
- [2] BERGER (Marcel). - Classification des algèbres de Lie simples, Séminaire Sophus Lie, t. 1, 1954/55 : Théorie des algèbres de Lie, n° 13.
- [3] BERGER (Marcel). - Construction des algèbres de Lie simples, Séminaire Sophus Lie, t. 1, 1954/55 : Théorie des algèbres de Lie, n° 14.
- [4] BOREL (Armand). Groupes d'homotopies des groupes de Lie, I, Séminaire Cartan, t. 2, 1949/50 : Espaces fibrés et homotomie, n° 12.
- [5] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre, Chap. 9 : Formes sesquilinéaires et formes quadratiques. - Paris, Hermann, 1959 (Act. scient. et ind., 1273 ; Éléments de Mathématique, 24).
- [6] BRUHAT (François). - Formes réelles des algèbres simples, Séminaire Sophus Lie, t. 1, 1954/55 : Théorie des algèbres de Lie, n° 11 et 12.

- [7] CARTIER (Pierre). - Théorie des algèbres semi-simples, Séminaire Sophus Lie, t. 1, 1954/55 : Théorie des algèbres de Lie, n° 7.
- [8] CHEVALLEY (Claude). - Theory of Lie groups. - Princeton, Princeton University Press, 1946 (Princeton mathematical Series, 8).
- [9] DEMAZURE (Michel). - Théorèmes de Hurewicz et Whitehead, Séminaire Cartan, t. 11, 1958/59 : Invariant de Hopf et opérations cohomologiques secondaires, n° 4.
- [10] SERRE (Jean-Pierre). - Tores maximaux des groupes de Lie compacts, Séminaire Sophus Lie, t. 1, 1954/55 : Théorie des algèbres de Lie, n° 23.
-