Séminaire Henri Cartan

Antoine Delzant

Groupes de Lie compacts et tores maximaux

Séminaire Henri Cartan, tome 12, n° 1 (1959-1960), exp. n° 1, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1959-1960__12_1_A1_0>

Séminaire H. CARTAN - J. C. MOORE
12e année, 1959/60, n° 1

9 novembre 1959

GROUPES DE LIE COMPACTS ET TORES MAXIMAUX

par Antoine DELZANT

1. Les groupes de Lie compacts classiques.

Le corps de base étant $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{K}$ [corps des quaternions]), on considère un espace vectoriel V de dimension n sur $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{K}$) muni d'un produit hermitien (resp. scalaire, resp. quaternionien) noté $\langle a , b \rangle$, où a, b sont des éléments de V. Le groupe unitaire, noté $U(n)$ (resp. orthogonal, noté $O(n)$; resp. symplectique, noté $Sp(n)$) est le groupe des matrices g de $GL(n , \mathbb{C})$ (resp. de $GL(n , \mathbb{R})$, resp. de $GL(n , \mathbb{K})$) qui conservent le produit hermitien, i. e. telles que

$$\langle ga , gb \rangle = \langle a , b \rangle$$

Dans ce paragraphe, on se borne à préciser les définitions de ces groupes, et à en rappeler les principales propriétés. Celles-ci sont d'ailleurs bien connues (cf. [8] et [4]).

Le groupe unitaire $U(n)$.

$$U(n) = \left\{ g \in GL(n , \mathbb{C}) \; ; \; \bar{g} = {}^t g^{-1} \right\} .$$

C'est un groupe connexe, de dimension réelle n^2. Il admet un sous-groupe :

Le groupe spécial unitaire $SU(n)$.

$$SU(n) = SL(n , \mathbb{C}) \cap U(n) .$$

C'est le groupe des matrices unitaires de déterminant $+1$. Ce groupe est connexe, simplement connexe, et de dimension réelle $n^2 - 1$.

Le groupe orthogonal $O(n)$.

$$O(n) = \left\{ g \in GL(n , \mathbb{R}) \; ; \; g = {}^t g^{-1} \right\}$$

$O(n)$ est l'ensemble des matrices réelles de $U(n)$. Le groupe orthogonal admet deux composantes connexes ($\det g = +1$, $\det g = -1$) ; sa dimension réelle est $\frac{n(n-1)}{2}$. La composante connexe de l'élément neutre est :

Le groupe spécial orthogonal $SO(n)$.

$$SO(n) = SL(n, \mathbb{R}) \cap O(n)$$

C'est un groupe connexe, de dimension réelle $\frac{n(n-1)}{2}$. Son groupe fondamental est cyclique d'ordre 2 .

Le groupe symplectique $Sp(n)$. - Identifions le corps $\mathbb{K}$ avec l'algèbre $\mathbb{C} + j\mathbb{C}$ munie des relations : $j^2 = -1$; $jz = \bar{z}j$; $z \in \mathbb{C}$. Le groupe symplectique opérant sur l'espace vectoriel à droite $V = \mathbb{K}^n$, ($g(ak) = g(a)\, k$; $g \in Sp(n)$, $k \in \mathbb{K}$), on démontre ([8], chapitre 1 , paragraphe VIII) que $Sp(n)$ s'identifie au sous-groupe de $U(2n)$ qui laisse invariante la forme bilinéaire $\sum_{i=1}^{n+1} x_i\, y_{i+n} - x_{i+n}\, y_i$.

On peut écrire une matrice g de $Sp(n)$ sous la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a , b , c, d , étant des matrices (n, n) à coefficients complexes. Alors

$$Sp(n) = \{ g \in U(2n) \; ; \; {}^t gJg = J \} \qquad \text{où} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}$$

$Sp(n)$ est un groupe connexe, simplement connexe, et de dimension réelle $\frac{2n(2n+1)}{2}$.

2. Tores maximaux des groupes de Lie compacts.

Rappelons que tout groupe de Lie abélien, compact et connexe, est isomorphe à un tore, produit d'un nombre fini de groupes isomorphes à $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq U(1)$ (en effet, l'algèbre de Lie d'un tel groupe est celle d'un $\mathbb{R}^r$). Les tores contenus dans un groupe de Lie G sont donc les sous-groupes abéliens compacts et connexes de G . Un tore $T \subset G$ est dit maximal s'il est maximal dans l'ensemble des tores contenus dans G . Il existe de tels tores maximaux, car toute suite croissante de tores contenus dans G est stationnaire, puisque les dimensions de ces tores sont bornées.

PROPOSITION 1. - *Soit* G *un groupe de Lie compact. Supposons qu'il existe un tore* $T \subset G$ *, tel que*

$$G = \bigcup_{g \in G} gTg^{-1} \quad .$$

Alors :

(i) T *est un tore maximal* ;

(ii) Tout tore de G est contenu dans un conjugué gTg^{-1} ;

(iii) Les tores maximaux de G sont les gTg^{-1} .

DÉMONSTRATION. - Montrons d'abord (ii) . Soit A un tore contenu dans G ; on sait (théorème de Kronecker) qu'il existe un élément "générateur" a de A , c'est-à-dire tel que A soit l'adhérence du sous-groupe engendré par a . Par hypothèse, il existe $g \in G$ tel que $a \in gTg^{-1}$; puisque gTg^{-1} est fermé dans G , on a $A \subset gTg^{-1}$, ce qui établit (ii). Soit alors T' un tore maximal de G (on sait qu'il en existe) ; on vient de voir qu'il existe $g \in G$ tel que $T' \subset gTg^{-1}$, ce qui exige $T' = gTg^{-1}$ et entraîne que gTg^{-1} est maximal ; T est donc aussi maximal. T étant maximal, tous les gTg^{-1} sont maximaux.

Lorsque G est compact et connexe, l'assertion (i) ci-dessus admet une réciproque :

THÉORÈME 1. - Si G est un groupe de Lie compact connexe, et si T est un tore maximal de G , alors G est réunion des conjugués gTg^{-1} (où g parcourt G).

Compte tenu de la proposition 1, ce théorème admet les corollaires suivants :

COROLLAIRE 1. - Tous les tores maximaux de G sont conjugués, et ont même dimension $r \geqslant 1$ (sauf si G est réduit à l'élément neutre) ; r s'appelle le rang de G .

COROLLAIRE 2. - Si G n'est pas réduit à l'élément neutre, tout $x \in G$ appartient à un sous-groupe à un paramètre.

Avant de démontrer le théorème 1 en toute généralité, nous allons étudier les tores maximaux des groupes classiques, et vérifier le théorème 1 dans chacun des cas particuliers envisagés.

A. Groupe $U(n)$. - Soit T le sous-groupe des matrices diagonales de $U(n)$; c'est évidemment un tore de dimension n . Rappelons le résultat classique (cf. [5], paragraphe 7, n° 3, proposition 4) : dans le groupe $U(n)$, toute matrice x est semblable à une matrice diagonale, i. e. il existe $g \in U(n)$ telle que $gxg^{-1} \in T$. En vertu de la proposition 1, T est un tore maximal , le théorème 1 se trouve bien vérifié lorsque $G = U(n)$. Le rang de $U(n)$ est n .

A'. Groupe $SU(n + 1)$. - Ici encore, toute matrice est semblable à une matrice diagonale. Les matrices diagonales forment un tore de dimension n (puisque les éléments λ_i de la diagonale sont astreints à la condition $\prod_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$).

C'est un tore maximal, et $SU(n+1)$ est de rang n .

B. Groupe $Sp(n)$. - Soit D le sous-groupe des matrices diagonales de $Sp(n)$, qui est isomorphe à $(Sp(1))^n$. On sait ([5], loco citato) que toute matrice de $Sp(n)$ est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire à un élément de D . Chaque facteur $Sp(1)$ de D étant identifié à $SU(2)$, contient un tore maximal T de dimension 1 ; le produit T^n de ces tores est un sous-groupe de D , tel que tout élément de $Sp(n)$ soit conjugué d'un élément de T^n . D'après la proposition 1, T^n est un tore maximal, et on vérifie encore dans ce cas le théorème 1. Le rang de $Sp(n)$ est n .

C. Groupe $SO(n)$. - On sait ([5], loco citato) que si $x \in SO(n)$, l'espace R^n dans lequel opère $SO(n)$ est somme directe de sous-espaces de dimension 1 ou 2 , stables par x . Donc tout élément de $SO(n)$ est conjugué d'un élément du sous-groupe T défini comme suit : si $n = 2m$, T est formé des matrices de la forme

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & \\ 0 & 0 & \ddots \quad \cos\theta_m & -\sin\theta_m \\ & & \sin\theta_m & \cos\theta_m \end{pmatrix}$$

Si $n = 2m+1$, T est formé des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où M a le type précédent. Dans un cas comme dans l'autre, la proposition 1 montre que T est un tore maximal ; $SO(2m)$ et $SO(2m+1)$ sont de rang m .

3. Démonstration du théorème 1.

Pour démontrer ce théorème, on suit [10]. Soit T un tore maximal du groupe de Lie compact connexe G . Soit N le normalisateur de T dans G (ensemble des $x \in G$ tels que $xTx^{-1} = T$), et soit Φ le groupe quotient N/T . On va montrer que Φ est un groupe fini. Le groupe des automorphismes de T est isomorphe au groupe des matrices $SL(r, \mathbb{Z})$ ($r = \dim T$) qui est discret ; N admet un homomorphisme dans ce groupe, et le noyau de cet homomorphisme contient la composante connexe N^0 de l'élément neutre. Mais N est fermé, donc N^0 est un groupe de Lie qui contient T et qui commute aux éléments de T. Si N^o était différent de T on pourrait trouver un sous-groupe à un paramètre de N^o qui engendrerait avec T un tore strictement plus grand que T. Puisque T est maximal, on a $N^o = T$, et $\Phi = N/T = N/N^o$ est discret et compact, donc fini. Ce groupe fini opère dans T, et on verra (corollaire 5 du théorème 4) qu'il opère <u>fidèlement</u>. Il résultera du théorème 1 que les groupes Φ relatifs à deux tores maximaux sont canoniquement isomorphes ; Φ s'appelle le <u>groupe de Weyl</u> de G.

Soit V l'espace G/T des classes à gauche gT $(g \in G)$; c'est une variété compacte, orientable, dont on désignera la dimension par n. Pour tout $x \in G$, la translation à gauche $gT \longrightarrow xgT$ est une transformation f_x de V. Puisque G est connexe, les transformations f_x sont homotopes entre elles. Un point fixe de f_x est la classe d'un $g \in G$ tel que $gT = xgT$, c'est-à-dire $x \in gTg^{-1}$. Le théorème 1 sera démontré si nous prouvons que, <u>pour tout</u> $x \in G$, <u>la transformation</u> f_x <u>possède au moins un point fixe</u>.

Pour cela, on va faire appel à la théorie du "nombre de Lefschetz" en topologie algébrique (cf. [1], chapitre 17). Soit V une variété compacte de dimension n, et f une application continue $V \longrightarrow V$; le nombre de Lefschetz $L(f)$ est un entier jouissant des propriétés suivantes :

(i) Si f et g sont homotopes, $L(f) = L(g)$;

(ii) Si f est l'application identique, $L(f)$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(V)$;

(iii) Si f n'a pas de point fixe, $L(f) = 0$;

(iv) Si f n'a que des points fixes isolés a_i (en nombre fini), on a

$$L(f) = (-1)^n \sum_i k(a_i) \qquad ,$$

$k(a_i)$ étant "l'indice" du point fixe isolé a_i ;

(v) Si f est différentiable au point fixe isolé a, et si l'application linéaire tangente df au point a n'admet pas la valeur propre 1, l'indice $k(a) = \operatorname{sgn}(\det(df - I))$, I désignant la matrice unité.

THÉORÈME 2. - <u>Si</u> T <u>est un tore maximal d'un groupe de Lie compact et connexe</u> G, <u>la caractéristique d'Euler-Poincaré</u> $\chi(G/T)$ <u>est égale à l'ordre du groupe de Weyl</u> $\Phi = N/T$.

Une fois ce théorème démontré, on saura que, pour tout $x \in G$, $L(f_x)$ est égal à l'ordre de Φ, donc n'est pas nul ; par suite f_x possède au moins un point fixe, ce qui établit le théorème 1.

Prouvons maintenant le théorème 2. Pour calculer $L(f_x)$, qui ne dépend pas de $x \in G$ d'après (i), on choisit pour x un "générateur" du tore T. Alors si $g \in G$ est tel que $xgT = gT$, on a $x \in gTg^{-1}$, donc $T \subset gTg^{-1}$, et par suite $T = gTg^{-1}$: donc $g \in N$. Réciproquement, si $g \in N$, gT est un point fixe de f_x. Ainsi les points fixes de f_x sont les points de l'ensemble <u>fini</u> N/T. De plus la transformation f_x est la transformation de $V = G/T$ induite par l'automorphisme intérieur $g \longrightarrow xgx^{-1}$ de G.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, et $\mathfrak{t}$ l'algèbre de Lie de T, qui est une sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{g}$. Si $\bar{n} \in N/T$, l'espace tangent à V au point $\bar{n}$ s'identifie à $\mathfrak{g}/\mathfrak{t}$, et la transformation linéaire tangente à f_x est induite par la transformation $Ad(x)$ du groupe adjoint linéaire (opérant dans $\mathfrak{g}$ et laissant fixes les points de $\mathfrak{t}$). Soit φ une forme quadratique définie positive sur $\mathfrak{g}$, invariante par le groupe adjoint linéaire (ce groupe étant compact, une telle forme existe). Soit $\mathfrak{t}^{\perp}$ l'orthogonal de $\mathfrak{t}$ pour φ ; $Ad(x)$ laisse $\mathfrak{t}^{\perp}$ stable, et on peut identifier $\mathfrak{g}/\mathfrak{t}$ à $\mathfrak{t}^{\perp}$ dans lequel opère $Ad(x)$. Pour calculer l'indice $k(\bar{n})$ du point fixe $\bar{n}$, on va utiliser (v) : la transformation linéaire $Ad(x)$ opérant dans $\mathfrak{t}^{\perp}$ n'admet pas la valeur propre 1, car si $Ad(x).X = X$ avec $X \in \mathfrak{t}^{\perp}$, on a $Ad(t).X = X$ pour tout $t \in T$, donc X engendre avec $\mathfrak{t}$ une sous-algèbre abélienne de $\mathfrak{g}$, et par suite $X = 0$ puisque $\mathfrak{t}$ est maximale. Supposons de plus (ce qui est loisible) que x a été choisi suffisamment voisin de l'élément neutre ; alors -1 n'est pas non plus valeur propre de $Ad(x)$. Ainsi les valeurs propres de $Ad(x)$ opérant dans $\mathfrak{t}^{\perp}$ sont des nombres complexes deux à deux imaginaires conjugués (ce qui prouve en passant que <u>la dimension n de G/T est paire</u>), et $\det(df_x - I)$ est > 0 (produit de nombres deux à deux imaginaires conjugués), d'ou $k(\bar{n}) = +1$. Puisque ceci est vrai pour chaque point fixe $\bar{n}$ de f_x, la propriété (iv), et le fait que n est pair, entraînent le théorème 2.

4. <u>Compléments au théorème de conjugaison.</u>

On suit toujours [10].

THÉORÈME 3. - <u>Soit G un groupe de Lie compact connexe, T un tore maximal, M un sous-ensemble quelconque de T. Si $g \in G$ est tel que $gMg^{-1} \subset T$, alors il existe $n \in N$ tel que $nmn^{-1} = gmg^{-1}$ pour tout $m \in M$.</u>

COROLLAIRE. - <u>Si deux éléments de T sont conjugués, alors ils sont transformés</u>

l'un de l'autre par un élément σ de $\Phi = N/T$.

Soit G' le sous-groupe des éléments de G qui commutent à tous les éléments de M (i. e. $gm = mg$ pour tout m de M) ; soit G'^{o} la composante connexe de G contenant l'élément neutre. G'^{o} est un groupe de Lie compact connexe contenant T ; G'^{o} contient $g^{-1}Tg$; en effet si $x \in g^{-1}Tg$, alors $xm = mx$ pour tout $m \in M$, car gmg^{-1} commute à T par hypothèse, donc $g^{-1}Tg \subset G'$ et, puisque $g^{-1}Tg$ est connexe, $g^{-1}Tg \subset G'^{o}$. Ainsi T et $g^{-1}Tg$ sont des tores maximaux de G'^{o} ; ils sont donc conjugués dans G'^{o} . Donc il existe $g' \in G'^{o}$ tel que $g'g^{-1}Tgg'^{-1} = T$; donc $gg'^{-1} = n \in N$ et $nmn^{-1} = gmg^{-1}$ car g' est dans G' et commute à T .

THÉORÈME 4. - Soit G un groupe de Lie compact connexe ; soit A un tore de G et x un élément de G commutant à A ; alors il existe un tore maximal contenant A et x .

Soit A' l'adhérence du sous-groupe engendré par A et x ; A' est compact et abélien. Soit A'^{o} la composante connexe de l'élément neutre dans A' ; A'^{o} est un tore, et A' est somme directe de A'^{o} et d'un groupe abélien fini Donc x appartient à un sous-groupe A'' du type $A'^{o} \oplus Z_n$ (Z_n groupe cyclique d'ordre n). Mais dans A'' il existe un élément dont les puissances sont partout denses : il suffit de prendre un "générateur" u de A'^{o} , un générateur z de Z_n , et de choisir dans A'^{o} un y tel que $y^n = u$; alors (y , z) est un "générateur" de A'' . Ce générateur appartient à un tore maximal T ; donc A'' est contenu dans T .

COROLLAIRE 1. - Si $x \in G$ commute aux éléments d'un tore maximal T , alors x est dans T .

COROLLAIRE 2. - Le centre de G est contenu dans tout tore maximal.

COROLLAIRE 3. - Tout tore maximal est un sous-groupe abélien maximal.

COROLLAIRE 4. - Le commutant d'un tore est connexe.
(C'est la réunion des tores maximaux contenant ce tore).

COROLLAIRE 5. - $\Phi = N/T$ opère fidèlement sur T (car si $n \in N$ opère trivialement dans T , alors $n \in T$ d'après le corollaire 1).

5. Groupe fondamental d'un groupe de Lie compact semi-simple.

Rappelons qu'un groupe de Lie est dit simple (resp. semi-simple) si son algèbre de Lie est simple (resp. semi-simple). Une algèbre de Lie est simple si elle n'admet pas d'idéal non trivial et n'est pas de dimension 1 ; une algèbre de Lie est semi-simple si elle n'admet aucun idéal abélien $\neq 0$.

THÉORÈME 5. - Soit G un groupe de Lie compact et connexe, semi-simple ; alors le groupe fondamental $\pi_1(G)$ est un groupe abélien fini.

COROLLAIRE. - Le revêtement universel d'un groupe de Lie semi-simple, compact et connexe, est un groupe de Lie compact (semi-simple et connexe).

Pour démontrer le théorème 5, on utilisera un lemme :

LEMME. - Soit X un espace compact, localement connexe par arcs et localement simplement connexe. Alors le groupe $\pi_1(X)$ est engendré par un nombre fini d'éléments.

Soit $\{U_i\}$ un recouvrement de X par un nombre fini d'ouverts connexes et simplement connexes. Soit V_i un autre recouvrement de X , ouvert, et tel que $\bar{V}_i \subset U_i$. Quels que soient i et j , choisissons un point dans chaque composante connexe de $U_i \cap U_j$ contenant un point de $\bar{V}_i \cap \bar{V}_j$. On a ainsi un nombre fini de points $x_{i,j,a}$. Traçons un chemin $[x_{i,j,a} ; x_{i,j',a'}]$ contenu dans U_i . Si on trace de tels chemins pour tous les i , on en a un nombre fini. Alors tout lacet (le point base étant un $x_{i,j,a}$ fixé) est homotope à un produit de chemins du type précédent. (En effet, soit L un tel lacet, et L^o une composante connexe de $L^o \cap U_i$; on peut déformer L^o sur l'un des chemins). Donc $\pi_1(X)$ a un nombre fini de générateurs.

Rappelons d'autre part, le résultat classique : le groupe fondamental $\pi_1(G)$ d'un groupe topologique G est abélien. Donc si G est un groupe de Lie compact connexe, $\pi_1(G)$ est un groupe abélien de type fini ; il reste à montrer que si de plus G est semi-simple, $\pi_1(G)$ est un groupe de torsion. D'après le théorème de Hurewicz (voir par exemple [9]), $\pi_1(G)$ est isomorphe au groupe d'homologie $H_1(G , Z)$; le théorème 5 sera donc démontré si on prouve que le groupe de cohomologie

$$H^1(G , R) = \mathrm{Hom}(H_1(G , Z) , R)$$

est nul. D'après le théorème de de Rham, il revient au même de montrer que toute forme différentielle ω sur G , de degré 1 et biinvariante, est nulle. Or si elle ne l'était pas, l'équation $\omega = 0$ définirait une sous-algèbre de Lie invariante de codimension 1 ; l'orthogonale (pour la forme de Killing) serait une sous-algèbre invariante de dimension 1 , ce qui contredit la semi-simplicité de G .

6. Structure des groupes de Lie compacts.

Soit G un groupe de Lie compact et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Nous dirons qu'une algèbre de Lie est "compacte" si elle est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie compact.

PROPOSITION 2. - Une algèbre de Lie "compacte" est, de façon unique, produit direct (au sens de sa structure d'algèbre de Lie) d'algèbres simples et d'une algèbre abélienne.

DÉMONSTRATION. - Soit G le groupe de Lie dont $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie. On a une représentation linéaire du groupe G dans $\mathfrak{g}$ par le groupe adjoint. Le groupe G étant compact, cette représentation est complètement réductible (semi-simple). En regardant la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ elle-même, on voit que les sous-espaces invariants par la représentation adjointe sont des idéaux, dont $\mathfrak{g}$ est le produit direct.

En regroupant les sous-algèbres abéliennes entre elles, on peut écrire $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{g}'$, où $\mathfrak{z}$ est le centre de $\mathfrak{g}$, et $\mathfrak{g}'$ est une algèbre semi-simple, produit direct d'algèbres simples ($\mathfrak{g}$ est réductive, [7]). Cette décomposition est évidemment unique.

COROLLAIRE. - Un groupe de Lie compact connexe est semi-simple si et seulement si son centre est discret.

En effet, la proposition 2 montre qu'une algèbre de Lie compacte est semi-simple si et seulement si son centre est réduit à 0.

THÉORÈME 6. - Tout groupe de Lie compact connexe G est localement isomorphe au produit d'un tore et de groupes de Lie compacts simples. D'une façon plus précise, G possède un revêtement fini qui est le produit d'un tore et des groupes compacts simples connexes.

DÉMONSTRATION. - Puisque G est connexe, le noyau de la représentation adjointe de G dans son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est le centre Z de G. Ainsi le groupe de Lie compact G/Z opère fidèlement dans $\mathfrak{g}$; soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} + \sum_i \mathfrak{g}_i$ la décomposition de la proposition 2 ; G/Z opère fidèlement dans $\sum_i \mathfrak{g}_i$. Soit G_i le sous-groupe de G/Z formé des éléments qui opèrent trivialement dans $\sum_{j \neq i} \mathfrak{g}_j$; il est clair que G_i est compact et contient le sous-groupe de G/Z engendré par $\mathfrak{g}_i$ (en identifiant l'algèbre de Lie de G/Z à $\sum_i \mathfrak{g}_i$). Montrons que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_i'$ de G_i est exactement $\mathfrak{g}_i$; s'il n'en était pas ainsi, $\mathfrak{g}_i'$ contiendrait un élément non nul de $\sum_{j\neq i} \mathfrak{g}_j$, donc G_i contiendrait un élément du groupe produit $\prod_{j\neq i} G_j$, autre que l'élément neutre ; un tel élément opérerait trivialement sur $\mathfrak{g}_i$, et aussi sur les $\mathfrak{g}_j$ pour $j \neq i$, ce qui est absurde.

Ainsi chaque $\mathfrak{g}_i$ est l'algèbre de Lie d'un groupe compact G_i, qu'on peut supposer connexe. En remplaçant au besoin G_i par son revêtement universel (qui est compact d'après le corollaire au théorème 5), on peut considérer, pour chaque i, un groupe compact connexe et simplement connexe G_i dont $\mathfrak{g}_i$ soit l'algèbre de Lie ; G_i est un groupe de Lie simple. L'injection de $\mathfrak{g}_i$ dans $\mathfrak{g}$ définit un homomorphisme local de G_i dans G ; par produit, on obtient un homomorphisme local de $\prod_i G_i$ dans G. Puisque $\prod_i G_i$ est simplement connexe, cet homomorphisme local se prolonge en un homomorphisme (continu) de tout le groupe $\prod_i G_i$ dans G. Soit Z^o la composante connexe de l'élément neutre dans le centre Z de G. L'algèbre de Lie de Z^o étant évidemment $\mathfrak{z}$, l'homomorphisme

$$Z^o \times \prod_i G_i \longrightarrow G$$

défini par l'injection $Z^o \longrightarrow G$ et par l'homomorphisme déjà défini $\prod_i G_i \longrightarrow G$ est un homomorphisme continu, qui est localement un isomorphisme ; son image est un sous-groupe ouvert, donc c'est G puisque G est connexe ; son noyau est discret, et ceci achève la démonstration.

COROLLAIRE. - <u>Tout groupe de Lie compact et semi-simple, connexe et simplement connexe, est un produit de groupes de Lie compacts simples (connexes et simplement connexes).</u>

La détermination de tous les groupes de Lie compacts revient donc essentiellement à celle des groupes <u>simples</u> compacts.

7. Les groupes de Lie compacts simples.

Les résultats sur les algèbres de Lie simples tels qu'on les trouvera dans [2], [3] et [6] permettent de classifier toutes les algèbres simples. On se borne ici à énoncer les résultats :

Soit V un espace vectoriel complexe de dimension m, et $\mathfrak{a}$ l'algèbre de Lie de tous les endomorphismes de V.

Type A_n . Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre des opérateurs de trace nulle ; c'est un idéal de $\mathfrak{a}$; $\mathfrak{g}$ est une algèbre simple de type A_n pour $m = n + 1$ $(n \geqslant 1)$. Le groupe compact classique correspondant est $SU(n + 1)$.

Type C_n. Soit définie sur V une forme bilinéaire alternée non dégénérée (x , y) . Soit $\mathfrak{g}$ la sous-algèbre de $\mathfrak{a}$ des opérateurs tels que $(Xx , y) + (x , Xy) = 0$. $\mathfrak{g}$ est simple et de type C_n si $m = 2n$, $n \geqslant 1$. Le groupe compact classique correspondant est $Sp(n)$.

Types B_n et D_n . Soit définie sur V une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, (x , y) ; soit $\mathfrak{g}$ la sous-algèbre de $\mathfrak{a}$ des opérateurs tels que $(Xx , y) + (x , Xy) = 0$.

$\mathfrak{g}$ est de type B_n si $m = 2n + 1$, $n \geqslant 1$; le groupe compact classique correspondant étant le groupe $SO(2n + 1)$.

$\mathfrak{g}$ est de type D_n si $m = 2n$, $n \geqslant 3$, le groupe classique correspondant étant $SO(2n)$.

Enfin on démontre que, mis à part 5 algèbres exceptionnelles, on a obtenu ainsi toutes les algèbres simples. Les groupes exceptionnels compacts sont notés G_2 , F_4 , E_6 , E_7 , E_8 ; l'indice indique le rang du groupe ; leurs dimensions respectives sont 14 , 52 , 78 , 133 , 248 . G_2 est le groupe de Lie des automorphismes des octaves de Cayley.

Ainsi, en dehors des groupes exceptionnels, tout groupe simple compact est localement isomorphe à l'un des groupes simples "classiques" :

$$\begin{cases} SU(n+1) , & n \geqslant 1 \quad ; \\ Sp(n) , & n \geqslant 1 \quad ; \\ SO(n) , & n \geqslant 3 , \ n \neq 4 \quad . \end{cases}$$

En fait, ces groupes ne sont pas tous distincts (au point de vue de l'isomorphisme local). D'une façon précise :

$Sp(1)$ et $SU(2)$ sont isomorphes, et isomorphes au groupe multiplicatif S_3 des quaternions de norme 1 ;

$Sp(1)$ est un revêtement d'ordre 2 de $SO(3)$ (on définit $Sp(1) \longrightarrow SO(3)$ en associant à tout quaternion x de norme 1 la transformation $k \longrightarrow xkx^{-1}$ de l'espace des quaternions) ;

$Sp(2)$ est un revêtement d'ordre 2 de $SO(5)$;

$SU(4)$ est un revêtement d'ordre 2 de $SO(6)$.

(Pour ces deux derniers revêtements, voir [4]).

On démontre qu'en dehors des relations précédentes, les groupes $SU(n+1)$, $Sp(n)$ et $SO(n)$ ne sont jamais deux à deux localement isomorphes.

Rappelons d'autre part que $Sp(1) \times Sp(1)$ est un revêtement d'ordre 2 de $SO(4)$ (à chaque couple (x, y) de quaternions de norme 1 on associe la transformation $k \longrightarrow xky^{-1}$ de l'espace des quaternions) ; ceci met en évidence le fait que le groupe $SO(4)$ n'est pas simple.

En résumé, on obtient une fois et une seule chaque type de groupe compact simple classique, en considérant

$$(1) \qquad \begin{cases} Sp(n) & \text{pour } n \geq 1 \quad ; \\ SU(n+1) & \text{pour } n \geq 2 \quad ; \\ SO(2n+1) & \text{pour } n \geq 3 \quad ; \\ SO(2n) & \text{pour } n \geq 4 \quad . \end{cases}$$

Les groupes $SU(n+1)$ et $Sp(n)$ sont simplement connexes. Les groupes $SO(m)$ admettent un groupe fondamental d'ordre deux ; on note $Spin(m)$ le revêtement simplement connexe (à deux feuillets) de $SO(m)$.

8. Groupe de Weyl des groupes classiques.

On va expliciter le groupe de Weyl pour chacun des groupes $U(n)$, $SU(n+1)$, $Sp(n)$, $SO(2n+1)$ et $SO(2n)$. Cette explicitation permettra de vérifier que les groupes (1) sont simples, sans se référer à la classification générale des algèbres de Lie. En effet, il résulte facilement des théorèmes 1 et 3 le critère suivant :

PROPOSITION 3. - Pour qu'un groupe de Lie compact connexe G soit simple, il faut et il suffit que, si l'on considère le groupe de Weyl Φ comme opérant sur le revêtement universel V d'un tore maximal T de G, les seuls sous-espaces vectoriels de V stables par Φ soient 0 et V tout entier.

Ceci étant, fixons les notations :

$U(n)$: T se compose des matrices diagonales ; les éléments diagonaux sont de la forme $e^{i\theta_j}$ $(1 \leq j \leq n+1)$; nous repérons un point du revêtement universel V par ses coordonnées θ_j.

$SU(n+1)$: T se compose des matrices diagonales dont les éléments diagonaux sont les $e^{i\theta_j}$ $(1 \leq j \leq n+1)$ tels que $\sum_j \theta_j = 0$; nous repérons un point du revêtement universel V de T par les θ_j tels que $\sum_j \theta_j = 0$.

$Sp(n)$: Ayant identifié $Sp(n)$ à un sous-groupe de $U(2n)$ comme il a été dit au paragraphe 2, T se compose des matrices diagonales dont les éléments diagonaux sont les $e^{i\theta_j}$ et les $e^{-i\theta_j}$ $(1 \leq j \leq n)$. Nous repérons un point de V par les n nombres θ_j.

$SO(2n+1)$: Avec les notations du paragraphe 2, C, on repère les points de V par les n coordonnées θ_j $(1 \leq j \leq n)$. De même pour le groupe $SO(2n)$.

Un élément σ du groupe de Weyl Φ définit une transformation linéaire sur les coordonnées θ_j. Il est facile de les expliciter (nous laissons au lecteur, à titre d'exercice, le soin de vérifier les résultats affirmés ci-après).

Dans tous les cas, $\sigma(\theta_j)$ est de la forme $\varepsilon_j\,\theta_{w(j)}$, où w désigne une permutation des indices des θ_j, et $\varepsilon_j = \pm 1$.

Lorsque $G = U(n)$ ou $SU(n+1)$, w parcourt le groupe de toutes les permutations des indices j, on a toujours $\varepsilon_j = +1$; Φ a donc $n!$ (resp. $(n+1)!$) éléments.

Lorsque $G = Sp(n)$, ou $G = SO(2n+1)$, w parcourt le groupe de toutes les permutations des indices j, et les signes ε_j sont arbitraires ; Φ a donc $2^n\, n!$ éléments.

Lorsque $G = SO(2n)$, w parcourt le groupe de toutes les permutations des indices j, et les $\varepsilon_j = \pm 1$ satisfont à l'unique condition que $\prod_j \varepsilon_j = +1$. Le groupe Φ a donc $2^{n-1}\, n!$ éléments.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] ALEXANDROFF (Paul) und HOPF (Heinz). - Topologie. - Berlin, J. Springer, 1935 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 45).

[2] BERGER (Marcel). - Classification des algèbres de Lie simples, Séminaire Sophus Lie, t. 1, 1954/55 : Théorie des algèbres de Lie, n° 13.

[3] BERGER (Marcel). - Construction des algèbres de Lie simples, Séminaire Sophus Lie, t. 1, 1954/55 : Théorie des algèbres de Lie, n° 14.

[4] BOREL (Armand). Groupes d'homotopies des groupes de Lie, I, Séminaire Cartan, t. 2, 1949/50 : Espaces fibrés et homotopie, n° 12.

[5] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre, Chap. 9 : Formes sesquilinéaires et formes quadratiques. - Paris, Hermann, 1959 (Act. scient. et ind., 1273 ; Eléments de Mathématique, 24).

[6] BRUHAT (François). - Formes réelles des algèbres simples, Séminaire Sophus Lie, t. 1, 1954/55 : Théorie des algèbres de Lie, n° 11 et 12.

[7] CARTIER (Pierre). - Théorie des algèbres semi-simples, Séminaire Sophus Lie, t. 1, 1954/55 : Théorie des algèbres de Lie, n° 7.

[8] CHEVALLEY (Claude). - Theory of Lie groups. - Princeton, Princeton University Press, 1946 (Princeton mathematical Series, 8).

[9] DEMAZURE (Michel). - Théorèmes de Hurewicz et Whitehead, Séminaire Cartan, t. 11, 1958/59 : Invariant de Hopf et opérations cohomologiques secondaires, n° 4.

[10] SERRE (Jean-Pierre). - Tores maximaux des groupes de Lie compacts, Séminaire Sophus Lie, t. 1, 1954/55 : Théorie des algèbres de Lie, n° 23.