

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

ADRIEN DOUADY

La suite spectrale d'Adams : structure multiplicative

Séminaire Henri Cartan, tome 11, n° 2 (1958-1959), exp. n° 19, p. 1-13

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1958-1959__11_2_A10_0

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1958-1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LA SUITE SPECTRALE D'ADAMS : STRUCTURE MULTIPLICATIVE

par Adrien DOUADY

CONVENTIONS. - Afin d'alléger la rédaction, on se placera dans la catégorie des espaces topologiques qui sont homéomorphes à des réalisations géométriques d'ensembles simpliciaux.

Les notations sont celles de l'exposé précédent. Si (A, A') et (B, B') sont des paires d'espaces, on note $(A, A') \times (B, B')$ la paire $(A \times B', (A \times B') \cup (A' \times B))$. Tous les espaces considérés seront munis de point-base. On notera a_0 le point-base de A , etc. On prendra (a_0, b_0) comme point-base de $A \times B$. Les applications considérées envoient le point-base au point-base.

On pose :

$$A \tilde{\times} B = (A, a_0) \times (B, b_0) = (A \times B, A \vee B)$$

et

$$A \times B = A \times B / A \vee B$$

1. Produit de classes d'homotopie.

A. Produit d'applications.

Soient $f : (A, A') \rightarrow (X, X')$ et $g : (B, B') \rightarrow (Y, Y')$; on définit $f \times g : (A, A') \times (B, B') \rightarrow (X, X') \times (Y, Y')$ par $(f \times g)(a, b) = (f(a), g(b))$. La compatibilité avec la relation d'équivalence d'homotopie est immédiate.

On a $(I^n, \dot{I}^n) = (I, S^0) \times (I, S^0) \dots \times (I, S^0)$ (n facteurs) si I désigne le segment $[0, 1]$, \dot{I}^n le bord du cube, et $S^0 = \dot{I} = \{0, 1\}$ la sphère de dimension 0.

Le groupe d'homotopie $\pi_n(X, X')$ s'identifie à l'ensemble des classes d'applications $(I^n, \dot{I}^n) \rightarrow (X, X')$. Si $f : (I^n, \dot{I}^n) \rightarrow (X, X')$ est de classe $u \in \pi_n(X, X')$ et $g : (I^q, \dot{I}^q) \rightarrow (Y, Y')$ est de classe $v \in \pi_q(Y, Y')$, alors $f \times g : (I^{n+q}, \dot{I}^{n+q}) = (I^n, \dot{I}^n) \times (I^q, \dot{I}^q) \rightarrow (X, X') \times (Y, Y')$ définit la classe $u \times v$ de $\pi_{n+q}((X, X') \times (Y, Y'))$. Si $u \in \pi_n(A)$, $v \in \pi_q(B)$, on a $u \times v \in \pi_{n+q}(A \tilde{\times} B)$, et on notera $u \times v$

l'image de $u \times v$ dans $\pi_{n+q}(A \times B)$.

B. Propriétés.

Le produit défini plus haut vérifie les propriétés suivantes :

IB 1. Il est bilinéaire, donc définit une application linéaire

$$\begin{aligned} \pi_*(A, A') \otimes \pi_*(B, B') &\longrightarrow \pi_*((A, A') \times (B, B')) \\ \pi_*(A) \otimes \pi_*(B) &\longrightarrow \pi_*(A \times B) \end{aligned}$$

IB 2. Il est fonctoriel et associatif

IB 3. Il est anticommutatif au sens suivant :

Si $\sigma : (A, A') \times (B, B') \rightarrow (B, B') \times (A, A')$ est l'homéomorphisme défini par $\sigma(a, b) = (b, a)$, et si $u \in \pi_i(A, A')$ et $v \in \pi_j(B, B')$, on a $v \times u = (-1)^{ij} \sigma_*(u \times v)$.

En effet on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} I^i \times I^j & \xrightarrow{f \times g} & A \times B \\ \downarrow \sigma_0 & & \downarrow \sigma \\ I^j \times I^i & \xrightarrow{g \times f} & B \times A \end{array}$$

où $\sigma_0 : I^{i+j} \rightarrow I^{i+j}$ est une application de degré $(-1)^{ij}$

IB 4. Soit $A \supset A' \supset A'' \ni a_0$ et $B \supset B' \supset B'' \ni b_0$.

Soient :

$$u \in \pi_n(A, A'), \quad du \in \pi_{n-1}(A', A'') \quad ,$$

$$v \in \pi_q(B, B'), \quad dv \in \pi_{q-1}(B', B'') \quad ,$$

$$u \times v \in \pi_{n+q}((A, A') \times (B, B')) \quad ,$$

$$d(u \times v) \in \pi_{n+q-1}((A \times B') \cup (A' \times B), (A \times B'') \cup (A' \times B') \cup (A'' \times B)) \quad .$$

Alors on a : $d(u \times v) = i_*(du \times v) + (-1)^n i'_*(u \times dv)$, où i et i' désignent les injections canoniques qui donnent un sens à la formule.

En effet on peut supposer que f envoie toutes les faces du cube I^n dans A'' , sauf une face I^{n-1} , et de même que g envoie toutes les faces de I^q dans B'' ,

sauf I^{q-1} . Alors $f \times g$ envoie toutes les faces de $I^n \times I^q$ dans $(A \times B^n) \cup (A^n \times B)$, sauf $I^n \times I^{q-1}$ et $I^{n-1} \times I^q$, dont la face commune $I^{n-1} \times I^{q-1}$ est envoyée dans $(A' \times B')$, ce qui donne les deux termes de la formule.

C. Propriétés des foncteurs \otimes et \vee .

Associativité :

$$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$$

$$A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C \quad .$$

Espaces neutres : si P est un espace réduit à un point,

$$A \vee P = A \quad , \quad A \otimes P = P$$

$$A \otimes S^0 = A \quad .$$

Distributivité :

$$A \otimes (B \vee C) = (A \otimes B) \vee (A \otimes C) \quad .$$

Les vérifications sont immédiates.

D. Suspension.

On appelle suspension de A l'espace $SA = S^1 \otimes A$, où S^1 est la sphère à une dimension $S^1 = I/S^0$, et on pose $S^n A = S^n \otimes A$, où $S^n = S^1 \otimes \dots \otimes S^1$ (n facteurs) est la sphère de dimension n . On notera ε le générateur canonique de $\pi_1(S^1)$ et $\varepsilon^n = \varepsilon \otimes \dots \otimes \varepsilon$ le générateur canonique de $\pi_n(S^n)$. On pose, pour $u \in \pi_i A$, $Eu = \varepsilon \otimes u \in \pi_{i+1}(SA)$, et $E^n u = \varepsilon^n \otimes u \in \pi_{i+1}(S^n A)$.

On sait (cf. exposé 5, où la méthode utilisée pour la suspension de S^m s'appliquerait à tout espace $(m-1)$ -connexe) que si A est $(m-1)$ -connexe, E est un isomorphisme : $\pi_i(A) \xrightarrow{\cong} \pi_{i+1}(SA)$ pour $i < 2m-1$.

L'identification $S(A \otimes B) = SA \otimes B \cong A \otimes SB$ donne

$$E(u \otimes v) = Eu \otimes v = (-1)^i \sigma_* (u \otimes Ev) \quad \text{si } u \in \pi_i A .$$

DÉFINITION. - Un élément u de $\pi_i(S^n)$ est dit additif si, pour tout A , et pour tous $w_1, w_2 \in \pi_n(A)$, on a

$$(w_1 + w_2) \circ u = w_1 \circ u + w_2 \circ u \quad .$$

THÉORÈME 1D. - Tout élément u de $\pi_i(S^n)$ de la forme $u = Eu'$ est additif.

DÉMONSTRATION. - Soient $f : S^{i-1} \rightarrow S^{n-1}$ de classe u' , et $g_1, g_2 : S^n \rightarrow A$ de classes w_1 et w_2 ; soit $D : S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1$ telle que $p_1 \circ D$ et $p_2 \circ D$ soient homotopes à l'identité de S^1 , où p_1 et p_2 sont les deux projections $S^1 \vee S^1 \rightarrow S^1$. (D définit sur S^1 la structure de co-H-espace).

On a :

$$g_1 + g_2 = (g_1 \vee g_2) \circ (D \times \varepsilon^{n-1})$$

d'où

$$\begin{aligned} (g_1 + g_2) \circ (\varepsilon \times f) &= (g_1 \vee g_2) \circ (D \times \varepsilon^{n-1}) \circ (\varepsilon \times f) \\ &= (g_1 \vee g_2) \circ (D \times f) \\ &= (g_1 \vee g_2) \circ ((\varepsilon \vee \varepsilon) \times f) \circ (D \times \varepsilon^{i-1}) \\ &= (g_1 \circ \varepsilon \times f) \vee (g_2 \circ \varepsilon \times f) \circ (D \times \varepsilon^{i-1}) \\ &= g_1 \circ (\varepsilon \times f) + g_2 \circ (\varepsilon \times f) \end{aligned}$$

REMARQUE. - Ce théorème est à rapprocher du théorème I C de l'exposé 9 : "Toute opération cohomologique Ω de la forme $\varepsilon \Omega'$ est additive".

En effet les éléments de $\pi_i(S^n)$ définissent par composition à droite des opérations homotopiques (cf. SERRE [3]).

E. Cas des sphères.

La composition des applications $S^i \xrightarrow{v} S^n \xrightarrow{u} S^q$, compatible avec la relation d'équivalence d'homotopie, définit une application

$$(u, v) \rightarrow u \circ v$$

de $\pi_n(S^q) \times \pi_i(S^n)$ dans $\pi_i(S^q)$, linéaire en v . Elle est de plus linéaire en u si v est additif, en particulier si $v = Ev'$ (théorème I D).

La proposition ci-dessous précise ses relations avec le produit \times :

PROPOSITION I E. - Soient $u \in \pi_{n+k} S^n$, $v \in \pi_{n'+k'} S^{n'}$,
 $u \times v \in \pi_{n+n'+k+k'} S^{n+n'}$. Alors

$$u \times v = (-1)^{n'k} E^{n'} u \circ E^{n+k} v$$

DÉMONSTRATION. - Il suffit de contempler le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{u \times v} & \\
 S^{n+k} \times S^{n'+k'} \xrightarrow{\varepsilon^{n+k} \times v} S^{n+k} \times S^{n'} & \xrightarrow{u \times \varepsilon^{n'}} & S^n \times S^{n'} \\
 \uparrow \scriptstyle{(-1)^{n'(n+k)}} & & \uparrow \scriptstyle{(-1)^{n'n}} \\
 S^{n'} \times S^{n+k} \xrightarrow{\varepsilon^{n'} \times u} & & S^{n'} \times S^n
 \end{array}$$

On a : $E(u \circ v) = E(u) \circ E(v)$, ce qui nous permet de munir le groupe $S\pi_* = \bigoplus S\pi_k$, où $S\pi_k = \varinjlim_E \pi_{n+k} S^n$, d'un produit $(\alpha, \beta) \rightarrow \alpha \circ \beta$ bilinéaire : si $u \in \pi_{n+k}(S^n)$ et $v \in \pi_{n'+k'}(S^{n'})$ ont pour images $\alpha \in S\pi_k$ et $\beta \in S\pi_{k'}$, $\alpha \circ \beta$ sera l'image de $E^{\ell'} u \circ E^{\ell} v$, ℓ et ℓ' étant choisis de façon que cette expression ait un sens, soit : $n' + \ell' = n + k + \ell$.

La proposition I E a alors le corollaire suivant :

COROLLAIRE. - $S\pi'_*$ est un anneau gradué anticommutatif au sens suivant : si $\alpha \in S\pi_k$ et $\beta \in S\pi_{k'}$, on a

$$\beta \circ \alpha = (-1)^{kk'} \alpha \circ \beta .$$

En particulier, si $\alpha \in S\pi_k$, où k est impair, on a $2\alpha^2 = 0$.

DÉMONSTRATION. - $v \times u = (-1)^{nk'} E^* v \circ E^* u$
 $v \times u = (-1)^{(n+k)(n'+k')+nn'} u \times v$
 $u \times v = (-1)^{n'k} E^* u \circ E^* v .$

II. Produits dans les suites spectrales.

Dans l'exposé précédent, on a vu une suite spectrale \mathcal{E} dont on peut calculer le terme ${}^2\mathcal{E} = \text{Ext}_A^*(Z_p, Z_p)$, puisqu'on connaît en détail la structure de l'algèbre de Steenrod A^* , et dont le terme ${}^0\mathcal{E}$ est un gradué associé au groupe $S\pi'_*$. On pourrait donc, si on savait calculer les différentielles de la suite spectrale, (ce qui n'est malheureusement possible que dans des cas particuliers) dire l'ordre de $S\pi'_k$ pour les différentes valeurs de k , en faisant le calcul séparément pour les composantes p -primaires. On va dans ce chapitre établir une méthode qui donne des indications sur la structure multiplicative de l'anneau $S\pi'_*$ en même temps que sur le détail de sa structure additive.

A. Produits spectraux.

DÉFINITION. - Soient π' , π'' et π trois systèmes spectraux (voir exposé précédent, II C). Un produit spectral défini sur π' et π'' à valeurs dans π est la donnée, pour tous $n, q, r \geq 0$, d'une application bilinéaire

$$\varphi_r : \pi'(n, n+r) \otimes \pi''(q, q+r) \longrightarrow \pi(n+q, n+q+r)$$

satisfaisant aux axiomes :

SPP I. Si $n \geq n'$, $q \geq q'$, $n+r \geq n'+r'$, $q+r \geq q'+r'$,

le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \pi'(n, n+r) \otimes \pi''(q, q+r) & \xrightarrow{\varphi_r} & \pi(n+q, n+q+r) \\ \downarrow \eta' \otimes \eta'' & & \downarrow \eta \\ \pi'(n', n'+r') \otimes \pi''(q', q'+r') & \xrightarrow{\varphi_{r'}} & \pi(n'+q', n'+q'+r') \end{array}$$

est commutatif.

SPP 2. Pour tous $n, q \geq 0$, $r \geq 1$, dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi'(n, n+r) \otimes \pi''(q, q+r) & \xrightarrow{\varphi_r} & \pi(n+q, n+q+r) \\ \swarrow \partial' \otimes \eta'' & \searrow \eta' \otimes \partial'' & \downarrow \partial \\ \pi'(n, n+1) \otimes \pi''(q+r, q+r+1) & \xrightarrow{\varphi_1} & \pi(n+q+r, n+q+r+1) \\ \swarrow \partial' \otimes \eta'' & \searrow \eta' \otimes \partial'' & \downarrow \partial \\ \pi'(n+r, n+r+1) \otimes \pi''(q, q+1) & \xrightarrow{\varphi_1} & \pi(n+q+r, n+q+r+1) \end{array}$$

On a : $\partial \circ \varphi_r = \varphi_1 \circ (\eta' \otimes \partial'') + \varphi_1 \circ (\partial' \otimes \eta'')$ avec, bien entendu, si π' est gradué, la règle de Koszul $(\eta' \otimes \partial')(a \otimes b) = (-1)^\alpha \eta' a \otimes \partial' b$ où α est le degré de a .

THÉORÈME II A. - Un produit spectral définit des applications

$${}^r\varphi : {}^rE' \otimes {}^rE'' \longrightarrow {}^rE$$

telles que

a. ${}^1\varphi = \varphi_1 : \pi'(n, n+1) \otimes \pi''(q, q+1) \longrightarrow \pi(n+q, n+q+1)$

b. ${}^r d(\varphi(a \otimes b)) = \varphi({}^r d_a \otimes b) + (-1)^\alpha \varphi(a \otimes {}^r d_b)$

si a est de degré total α .

c. $r+1\psi$ est induit par $r\psi$, et $\mathfrak{O}\psi$ par les $r\psi$.

d. $\mathfrak{O}\psi$ est aussi induit par passage aux gradués associés par

$$\psi_{\mathfrak{O}} : \pi'(0) \otimes \pi''(0) \rightarrow \pi(0).$$

La démonstration consiste en une longue suite de vérifications que le lecteur (s'il existe) fera lui-même s'il en a envie.

B. Produits dans les suites spectrales d'Adams.

Soient Y' et Y'' deux ensembles simpliciaux, (Y'^n) et (Y''^n) deux complexes géométriques au-dessus de Y' et Y'' respectivement. On suppose que Y'^{n+1} est un sous-ensemble simplicial de Y'^n pour tout n , et de même pour (Y''^n) . On peut toujours se ramener à ce cas en remplaçant les complexes par des complexes homotopiquement équivalents grâce à des "mapping cylinders" à une infinité d'étages.

On pose $Y = Y' \times Y''$, et $Y^n = \bigcup_{n'+n''=n} Y'^{n'} \times Y''^{n''}$, $Y^{n+1} \rightarrow Y^n$ étant

l'injection.

PROPOSITION II B. Si (Y'^n) est $(m' - 1)$ -connexe et (p, t') -acyclique, et si (Y''^n) est $(m'' - 1)$ -connexe et (p, t'') -acyclique, alors (Y^n) est $(m - 1)$ -connexe et (p, t) -acyclique, avec

$$m = m' + m'' \quad \text{et} \quad t = m'' + t'.$$

DÉMONSTRATION. - Nous utiliserons plusieurs lemmes. Posons :

$$Y(n, k) = \bigcup_{0 \leq i \leq k} Y'^i \times Y''^{n-i} = Y'^0 \times Y''^n \cup Y'^1 \times Y''^{n-1} \cup \dots \cup Y'^k \times Y''^{n-k}$$

On va montrer par récurrence sur k

a. que $Y(n, k)$ est $(m - 1)$ -connexe

b. que $H_i(Y(n+1, k+1)) \rightarrow H_i(Y(n, k))$ est nulle pour $i \leq t$.

a. LEMME 1. - Si A et B sont des espaces topologiques connexes et localement contractiles, $A \times B$ est simplement connexe.

DÉMONSTRATION. - Considérons l'application $(A \times B, A \vee B) \rightarrow A \times B$. Tout lacet dans $A \times B$ est homotope à un lacet qui se décompose en un nombre fini de chemins qui se relèvent dans $A \times B$, leurs extrémités se relevant dans $A \vee B$. Comme $A \vee B$ est connexe par arcs, on peut ramener ces chemins à avoir leurs extrémités

en (a_0, b_0) . On en déduit que $\pi_1(A \times B, A \vee B) \rightarrow \pi_1(A \times B)$ est surjective. Mais la suite exacte

$$\pi_1(A \vee B) \rightarrow \pi_1(A \times B) \rightarrow \pi_1(A \times B, A \vee B) \rightarrow \pi_0(A \vee B)$$

montre que $\pi_1(A \times B, A \vee B) = 0$. Ce qui démontre le lemme 1.

On en déduit, si m' et $m'' > 0$, ce que nous supposons tout au long de la démonstration, que $Y^{m'} \times Y^{m''}$ est simplement connexe pour tous m', m'' .

LEMME 2. - Soit un espace topologique localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Supposons que X soit réunion de deux fermés A et B d'intersection non vide satisfaisant aux mêmes hypothèses. Alors si A et B sont simplement connexes et si $A \cap B$ est connexe, $X = A \cup B$ est simplement connexe.

DÉMONSTRATION. - Soit R un revêtement quelconque de X, x_0 un point de $A \cap B$, $r_0 \in R$ au-dessus de x_0 . Il existe une section s_1 de R au-dessus de A et une section s_2 au-dessus de B qui passent par r_0 . Ces sections coïncident sur $A \cap B$, et définissent une section s de R sur X. Tout revêtement de X admettant une section, X est simplement connexe. On en déduit par récurrence sur k que $Y(n, k)$ est simplement connexe en appliquant le lemme 2 à

$$\left[\begin{array}{l} X = Y(n, k+1) \\ A = Y(n, k) \\ B = Y^{k+1} \times Y^{n-k-1} \\ A \cap B = Y^{k+1} \times Y^{n-k} \end{array} \right.$$

On peut donc appliquer aux $Y(n, k)$ le théorème de Hurewicz pour l'homologie à coefficients dans Z. On a :

$$\tilde{H}_*^i(Y^{m'} \times Y^{m''}; Z) \approx \tilde{H}_*^i(Y^{m'}; Z) \otimes \tilde{H}_*^i(Y^{m''}; Z) \oplus \text{Tor}(\tilde{H}_*^i(Y^{m'}), \tilde{H}_*^i(Y^{m''}))$$

D'où $H_i(Y^{m'} \times Y^{m''}; Z) = 0$ pour $i < m = m' + m''$.

La suite exacte de Mayer-Vietoris (voir EILENBERG-STEEFROD, [2])

$$H_i(A) \oplus H_i(B) \rightarrow H_i(X) \rightarrow H_{i-1}(A \cap B)$$

appliquée aux mêmes espaces X, A, B démontre de la même façon par récurrence sur k que $H_i(Y(n, k)) = 0$ pour $i < n$.

On en déduit que $\pi_i(Y(n, k)) = 0$ pour $i < n$ et en particulier, pour $k = n$,

que $\pi_i(Y^n) = 0$ pour $i < m$.

b. LEMME 3. - Soient A et B deux sous-espaces d'un espace X . Si les applications $H_i(A, A \cap B) \rightarrow H_i(X, B)$ et $H_i(B) \rightarrow H_i(X)$ sont nulles, alors $H_i(A \cup B) \rightarrow H_i(X)$ est nulle.

DÉMONSTRATION. - Soit $\gamma \in Z_i(A \cup B)$. On peut écrire $\gamma = \alpha + \beta$, avec $\alpha \in C_i(A)$ et $\beta \in C_i(B)$.

On a $d\alpha + d\beta = 0$, d'où $d\alpha \in C_{i-1}(A \cap B)$ et $\alpha \in Z_i(A, A \cap B)$.

En utilisant la première hypothèse, $\alpha = d\eta + \beta'$, avec $\eta \in C_{i+1}(X)$ et $\beta' \in C_i(B)$; $\beta + \beta' = \gamma - d\eta$ donc $d(\beta + \beta') = 0$, d'où $\beta + \beta' \in Z_i(B)$.

En utilisant la deuxième hypothèse, $\beta + \beta' = d\eta'$ avec $\eta' \in C_{i+1}(X)$ d'où $\gamma = d(\eta + \eta')$ ce qui démontre le lemme 3.

On va maintenant appliquer ce lemme à

$$\left[\begin{array}{l} X = Y(n, k) \\ A = Y^{,k+1} \times Y^{n-k} \\ B = Y(n+1, k) \\ A \cup B = Y(n+1, k+1) \\ A \cap B = Y^{,k+1} \times Y^{n-k+1} \\ \text{Homologie à coefficients dans } Z_p. \end{array} \right.$$

En effet, par l'hypothèse de récurrence, l'application composée $H_i(Y(n+1, k)) \rightarrow H_i(Y(n, k-1)) \rightarrow H_i(Y(n, k))$ est nulle pour $i \leq t$, la première application étant nulle.

D'autre part,

$$\widetilde{H}_*(Y^{,k+1} \times Y^{n-k}, Y^{,k+1} \times Y^{n-k+1}) = \widetilde{H}_*(Y^{,k+1}) \otimes H_*(Y^{n-k}, Y^{n-k+1})$$

Donc l'application composée :

$$\begin{aligned} H_i(Y^{,k+1} \times Y^{n-k}, Y^{,k+1} \times Y^{n-k+1}) &\rightarrow H_i(Y^{,k} \times Y^{n-k}, Y^{,k} \times Y^{n-k+1}) \\ &\rightarrow H_i(Y(n, k), Y(n+1, k)) \end{aligned}$$

est nulle pour $i \leq t$, la première application étant nulle. On peut donc appliquer le lemme 3. Ce qui démontre b et achève la démonstration de la proposition II B.

THÉOREME II B. - Soient Y' et Y'' des espaces $(m-1)$ connexes ; posons $X = Y' \times Y''$. Soient (Y'^n) et (Y''^n) des $(p, 2m-2)$ -résolutions de Y' et Y'' , (X^n) une $(p, 3m-2)$ -résolution de X . Soient ${}^r E'$, ${}^r E''$ et ${}^r E$ les suites spectrales de ces résolutions. Alors on a, pour tous r, i', i'', n', n'' une application $\varphi_r : {}^r E'_{i'}^{n'} \otimes {}^r E''_{i''}^{n''} \rightarrow {}^r E_{i'+i''}^{n'+n''}$ telle que

- $d \varphi(a \otimes b) = \varphi({}^r d a \otimes b + (-1)^\alpha a \otimes {}^r d b)$ si a est de degré α ;
- φ_{r+1} est induit par φ_r , et φ_∞ par les φ_r ;
- φ_∞ est aussi induit par passage aux gradués associés par

$$\varphi : \pi_{i'}(Y') \otimes \pi_{i''}(Y'') \rightarrow \pi_{i'+i''}(Y' \times Y'')$$

- φ_2 s'identifie au produit :

$$\text{Ext}_{A^*}^i(Z_p, \widetilde{H}_*(Y')) \otimes \text{Ext}_{A^*}^i(Z_p, \widetilde{H}_*(Y'')) \rightarrow \text{Ext}_{A^*}^i(Z_p, \widetilde{H}_*(Y') \otimes \widetilde{H}_*(Y''))$$

défini par la structure de coalgèbre de A^* .

DÉMONSTRATION. - Remplaçons (Y'^n) et (Y''^n) par des complexes équivalents tels que $Y'^{n+1} \subset Y'^n$ et $Y''^{n+1} \subset Y''^n$ pour tout n . Le complexe (Y^n) au-dessus de X défini par $Y^n = \bigcup_{n'+n''=n} Y'^{n'} \times Y''^{n''}$ est $(3m-2)$ -acyclique d'après la

proposition II B. Soit $f = (f^n) : (Y^n) \rightarrow (X^n)$ (exposé 18, proposition I B).

L'application :

$$(Y'^n, Y'^{n+r}) \times (Y''^q, Y''^{q+r}) \rightarrow (Y^{n+q}, Y^{n+q+r}) \xrightarrow{f} (X^{n+q}, X^{n+q+r})$$

définit un produit

$$\varphi : \pi_*'(Y'^n, Y'^{n+r}) \otimes \pi_*'(Y''^q, Y''^{q+r}) \rightarrow \pi_*'(X^{n+q}, X^{n+q+r})$$

dont on vérifie immédiatement (en appliquant les propriétés I B) que c'est un produit spectral.

a, b, c sont des applications directes du théorème II A.

Pour démontrer d, il suffit de rappeler la définition du produit

$$\text{Ext}_{A^*}^i(Z_p, M') \otimes \text{Ext}_{A^*}^i(Z_p, M'') \rightarrow \text{Ext}_{A^*}^i(Z_p, M' \otimes M'')$$

Soient (L'^n) , (L''^n) des résolutions A^* -injectives de M' et M'' . Alors $L' \otimes L''$ est un complexe acyclique sur $M' \otimes M''$. Si L est une résolution

A^* -injective de $M = M' \otimes M''$, considéré comme A^* -module grâce à l'application diagonale $\Delta : A^* \rightarrow A^* \otimes A^*$ (avec bien entendu la règle des signes de Koszul), on peut trouver une application $f : L' \otimes L'' \rightarrow L$ ([2], chapitre 5, proposition 11a, p. 78). Alors la composée :

$$VL' \otimes VL'' \rightarrow V(L' \otimes L'') \xrightarrow{Vf} VL$$

definit par passage à la cohomologie

$$H^* VL \otimes H^* VL'' \rightarrow H^*(VL' \otimes VL'') \rightarrow H^*(VL)$$

soit

$$\text{Ext}_{A^*}(Z_p, M') \otimes \text{Ext}_{A^*}(Z_p, M'') \rightarrow \text{Ext}_{A^*}(Z_p, M)$$

Il est clair, grâce à la proposition II D 3 de l'exposé précédent, que l'on peut définir le produit

$$\text{Ext}_{i'}^{n'} \otimes \text{Ext}_{i''}^{n''} \rightarrow \text{Ext}_{i'+i''}^{n'+n''}$$

en utilisant des résolutions t' , t'' et t -partielles (avec $t = t' + t''$) pour $i' - n' \leq t'$ et $i'' - n'' \leq t''$.

Or les complexes L' et L'' définis à partir de Y' et Y'' (exposé précédent, démonstration du théorème II D) sont des résolutions partielles de $\tilde{H}_*(Y')$ et $\tilde{H}_*(Y'')$, et la construction qui définit le produit des termes 2E coïncide avec la construction ci-dessus.

C. Groupes d'homotopie stables de sphères.

THÉORÈME II C.- La suite spectrale \mathcal{E} de l'exposé précédent, II E, est munie d'un produit

$$\varphi_r : {}^r\mathcal{E}_{k'}^{s'} \otimes {}^r\mathcal{E}_{k''}^{s''} \rightarrow {}^r\mathcal{E}_{k'+k''}^{s'+s''}$$

tel que

- ${}^r d(a \cdot b) = ({}^r d a) \cdot b + (-1)^\alpha a \cdot {}^r d b$ si a est de degré total α ;
- φ_{r+1} est induit par φ_r et φ_∞ par les φ_r ;
- φ_∞ est aussi induit par le produit \circ (I E) :

$$S\pi_* \otimes S\pi_* \rightarrow S\pi_*$$

d. φ_2 s'identifie au produit dans

$$H^*(A^*, Z_p) = \text{Ext}_{A^*}(Z_p, Z_p) \quad .$$

DÉMONSTRATION. - Ce théorème n'est que l'application du théorème II B au cas où Y' et Y'' , et par conséquent $X = Y' \otimes Y''$ sont des sphères, en tenant compte de la proposition I E, et en effectuant le décalage de l'exposé précédent, II E. Ce décalage introduit un signe qui détruit celui de la proposition I E. Soit en effet $\varepsilon^m : \text{Ext}_{A^*}(Z_p, Z_p) \rightarrow \text{Ext}_{A^*}(Z_p, Z_p(m))$ l'isomorphisme canonique de degré m . Le produit

$$\text{Ext}(Z_p, Z_p(m')) \otimes \text{Ext}(Z_p, Z_p(m'')) \rightarrow \text{Ext}(Z_p, Z_p(m' + m''))$$

est relié au produit dans $\text{Ext}(Z_p, Z_p)$ par la formule

$$\varepsilon^{m'}(a) \cdot \varepsilon^{m''}(b) = (-1)^{m''k} \varepsilon^{m'+m''}(a \cdot b)$$

si a est de degré k . En prenant pour φ le produit du théorème IIB appliqué à $Y' = S^{m'}$, $Y'' = S^{m''}$, $X = S^{m'+m''}$, modifié par le signe $(-1)^{m''k}$, on supprime donc simultanément le signe dans les parties c et d.

D. Structure additive de $S\pi_*$.

$S\pi_0 = \mathbb{Z}$ a pour générateur l'unité ε de l'anneau $S\pi_*$. ε est de filtration canonique 0 et définit un élément de ${}^{\infty}\mathcal{G}_0^0$ qui est l'unité de l'algèbre ${}^{\infty}\mathcal{G}$; $p\varepsilon$ est de filtration canonique 1 et définit un élément $b \in {}^{\infty}\mathcal{G}_1^1$. Soit $\omega \in S\pi_k$ de filtration n ; ω définit un élément $u \in {}^{\infty}\mathcal{G}_{n+k}^n$; $p\omega = p\varepsilon \circ \omega$ est de filtration $\geq n+1$, et a pour image dans ${}^{\infty}\mathcal{G}_{n+k+1}^{n+1}$ l'élément bu . En particulier $bu \neq 0$ entraîne $p\omega \neq 0$.

EXEMPLE. - En caractéristique 2, une résolution 3-partielle de Z_2 donne pour le terme ${}^2\mathcal{G}$ les éléments de base suivants (la place dans le tableau indique le bidegré) :

	7				
	6	•	•	•	$b^2 h_2 = h_1^3$
	5	•	•	$b h_2$	•
degré supérieur	4	•	h_2	h_1^2	b^4
	3	•	•	•	b^3
	2	•	h_1	b^2	•
	1	•	b	•	•
	0	1	•	•	•
		0	1	2	3
					4
					degré inférieur

Ce tableau donne tous les éléments de degré total k tel que $0 < k \leq 3$. Les différentielles de la suite spectrale sont nulles pour des raisons de degré, d'où $\infty \mathcal{E} = {}^2 \mathcal{E}$ dans la région considérée. On en déduit pour la composante 2-primaire des groupes d'homotopie stable :

composante	2-primaire de	$S\pi_1 = \mathbb{Z}_2$
"	"	$S\pi_2 = \mathbb{Z}_2$
"	"	$S\pi_3 = \mathbb{Z}_8$

Le générateur de $S\pi_2$ est le carré du générateur de $S\pi_1$, et le cube du générateur de $S\pi_1$ est le quadruple du générateur de $S\pi_3$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).
- [2] EILENBERG (S.) and STEENROD (N.). - Foundations of algebraic topology. - Princeton, Princeton University Press, 1952 (Princeton mathematical Series, 15).
- [3] SERRE (Jean-Pierre). - Groupes d'homotopie des bouquets de sphères, Séminaire Cartan, t. 7 : Algèbres d'Eilenberg-MacLane et homotopie, 1954/55, n° 20.

ADDITIF

- [4] ADAMS (J. F.). - On the structure and applications of the Steenrod algebra, Comment. Math. Helvet., t.32, 1958, p. 180-214. (Voir paragraphe 4).
-