Séminaire Henri Cartan

Michel Demazure

Théorèmes de Hurewicz et Whitehead

Séminaire Henri Cartan, tome 11, n° 1 (1958-1959), exp. n° 4, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1958-1959__11_1_A4_0>

THÉORÈMES DE HUREWICZ ET WHITEHEAD

par Michel DEMAZURE

On utilisera les notations de l'exposé 1 : soit $x_0 \in A \subset X$; on note $E'(X , x_0)$ l'espace des chemins de X d'origine x_0 , et p l'application $E'(X , x_0) \to X$ qui associe à chaque chemin son extrémité ;

$\Omega(X , A , x_0)$ l'espace des chemins de X , d'origine x_0 , d'extrémité dans A ;

$\Omega(X , x_0)$ l'espace des lacets de X , d'origine (et d'extrémité) x_0 . On note $\tilde{x}_0$ le chemin constant $I \to x_0$.

On a donc un fibré de Serre

(1) $$\Omega(X , x_0) \longrightarrow E'(X , x_0) \xrightarrow{p} X$$

et le sous-fibré

(2) $$\Omega(X , x_0) \longrightarrow \Omega(X , A , x_0) \xrightarrow{p} A$$

Tous les groupes d'homologie sont les groupes d'homologie singulière à coefficients entiers (sauf mention du contraire) ; on note $H_q(X , A)$ le groupe $H_q(X \bmod A ; Z)$. Lorsque A est réduit au point x_0 , on sait que $H_q(X , A) = H_q(X)$ (groupe d'homologie absolu) pour $q \geqslant 1$, tandis que $H_0(X , A)$ s'identifie au groupe d'homologie "réduit" $\tilde{H}_0(X)$, sous-groupe de $H_0(X)$ formé des combinaisons linéaires formelles d'éléments de $\pi_0(X , x_0)$ à coefficients entiers dont la somme est nulle. Dans les paragraphes 1 et 2 de cet exposé, on convient, par abus de langage, d'écrire $H_0(X)$ au lieu de $\tilde{H}_0(X)$.

1. La suspension et l'homomorphisme de Hurewicz.

La suite exacte d'homologie de l'espace $E'(X , x_0)$ et de son sous-espace $\Omega(X , A , x_0)$ définit un isomorphisme

$$d : H_{q+1}(E'(X , x_0) , \Omega(X , A , x_0)) \longrightarrow H_q(\Omega(X , A , x_0)) ,$$

parce que $E'(X, x_0)$ est contractile ; ceci vaut même pour $q = 0$, grâce à la convention faite sur H_0.

D'autre part, la projection p du fibré (1) et de son sous-fibré (2) définit

$$p_* : H_{q+1}(E'(X, x_0), \Omega(X, A, x_0)) \to H_{q+1}(X, A).$$

Par définition, la suspension

$$\sigma_q : H_q(\Omega(X, A, x_0)) \to H_{q+1}(X, A)$$

est définie par $\sigma_q = p_* \circ d^{-1}$. C'est un homomorphisme de groupes abéliens qui jouit des propriétés fonctorielles évidentes.

On va définir des applications naturelles (dites "de Hurewicz")

$$h_0 : \pi_0(X, x_0) \to H_0(X), \quad h_i : \pi_i(X, A, x_0) \to H_i(X, A) \quad \text{pour } i \geqslant 1,$$

par récurrence sur i. Par définition, h_0 associe à un élément u de $\pi_0(X, x_0)$ (qui est une composante connexe de X) l'élément $u - e$ de $H_0(X)$, en notant e la composante connexe de x_0. Supposons déjà définie l'application h_{i-1} $(i \geqslant 1)$, et définissons h_i comme l'application composée

$$\pi_i(X, A, x_0) = \pi_{i-1}(\Omega(X, A, x_0)) \xrightarrow{h_{i-1}} H_{i-1}(\Omega(X, A, x_0)) \xrightarrow{\sigma_{i-1}} H_i(X, A).$$

On va interpréter $\sigma_0 : H_0(\Omega(X, A, x_0)) \longrightarrow H_1(X, A)$. Soit u un chemin de X, d'origine x_0, d'extrémité dans A ; la rétraction canonique de l'espace $E'(X, x_0)$ lui associe un chemin v dans $E'(X, x_0)$, d'origine $\tilde{x}_0$, d'extrémité u ; le "bord" de $v - \tilde{x}_0$ au sens de l'homologie relative, est la classe de $u - \tilde{x}_0$ dans $H_0(\Omega(X, A, x_0))$. La projection p envoie le chemin v précisément sur le chemin u ; ceci montre que u, <u>considéré comme</u> 1-<u>cycle relatif de</u> X <u>modulo</u> A, <u>a pour classe dans</u> $H_1(X, A)$ <u>l'image, par</u> σ_0, <u>de la classe de</u> $u - \tilde{x}_0$ <u>dans</u> $H_0(\Omega(X, A, x_0))$.

Cette interprétation de σ_0 fournit aussitôt une interprétation de l'application $h_1 : \pi_1(X, A, x_0) \to H_1(X, A)$: à la classe du chemin u (d'origine x_0 et d'extrémité dans A), elle associe la classe d'homologie de u (considéré comme 1-cycle relatif de X modulo A).

THEOREME 1. - Les applications

$$h_i : \pi_i(X , x_o) \to H_i(X) , \quad i \geq 1 ,$$

$$h_i : \pi_i(X , A , x_o) \to H_i(X , A) , \quad i \geq 2$$

sont des homomorphismes de groupes. De plus, si X est connexe,

$$h_1 : \pi_1(X , x_o) \to H_1(X)$$

est surjectif et a pour noyau le sous-groupe des commutateurs de $\pi_1(X , x_o)$ (autrement dit, $H_1(X)$ est canoniquement isomorphe au groupe $\pi_1(X , x_o)$ rendu abélien).

DEMONSTRATION. - Pour montrer que h_i est un homomorphisme de groupes lorsque $A = \{x_o\}$, et $i \geq 1$, il suffit, vu la définition récurrente de h_i , de le prouver pour $i = 1$. La même définition récurrente montre que h_i sera aussi un homomorphisme de groupes pour $i \geq 2$ et A quelconque. Le théorème va alors résulter entièrement de la proposition suivante :

PROPOSITION 1. - Supposons que l'espace X soit connexe. Alors on a une suite exacte d'homomorphismes de groupes abéliens

$$H_o(\Omega(X , x_o)) \otimes H_o(\Omega(X , x_o)) \xrightarrow{\varphi} H_o(\Omega(X , x_o)) \xrightarrow{\sigma_o} H_1(X) \to 0 , \tag{3}$$

où l'application φ est définie par la loi de composition de l'espace $\Omega(X , x_o)$.

Démontrons d'abord cette proposition. Nous admettrons que l'homologie singulière de X connexe peut se calculer à l'aide des simplexes singuliers dont les sommets sont en x_o (ce qui se prouve facilement au moyen d'une déformation). Toute classe d'homologie de X , de dimension 1, est une somme de classes dont chacune est définie par un 1-simplexe u , lequel est un lacet de X , d'origine et d'extrémité x_o . Or on a vu que la classe d'un tel u est dans l'image de l'application σ_o . Ceci montre que σ_o est surjective.

Cherchons son noyau ; il est engendré par les classes (dans $H_o(\Omega(X , x_o))$ d'éléments de la forme

$$(a - \tilde{x}_o) + (b - \tilde{x}_o) - (c - \tilde{x}_o)$$

tels que le cycle $a + b - c$ de X soit le bord d'un 2-simplexe singulier. Or ceci exprime exactement que le composé $a.b$ des lacets a et b est homotope au lacet c. Ainsi le noyau est engendré par les classes d'éléments de la forme

$$a + b - (a \circ b) - \tilde{x}_0 ,$$

lequel est homotope au produit $(a - \tilde{x}_0) \circ (\tilde{x}_0 - b)$. Ceci prouve la proposition.

Achevons maintenant la démonstration du théorème 1. Pour montrer que $h_1 : \pi_1(X , x_0) \to H_1(X)$ est un homomorphisme, il suffit évidemment de la faire lorsque X est connexe (car remplacer X par la composante connexe X' de x_0 ne change pas $\pi_1(X , x_0)$ et remplace $H_1(X)$ par un sous-groupe). Dans ce cas, la proposition 1 montre que l'élément $a \circ b \in \pi_1(X , x_0)$ a pour image dans $H_1(X)$ la somme des images de a et de b. Et la proposition 1 entraîne facilement que le noyau de h_1 est le sous-groupe engendré par les commutateurs de $\pi_1(X , x_0)$.

PROPOSITION 2. - La suite exacte d'homotopie relative (exposé 1, théorème 1) est envoyée, par l'application h de Hurewicz, dans la suite exacte d'homologie relative : de façon précise, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\cdots \pi_n(A) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "1"] & \pi_n(X) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "2"] & \pi_n(X , A) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "3"] & \pi_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots H_n(A) \arrow[r] & H_n(X) \arrow[r] & H_n(X , A) \arrow[r] & H_{n-1}(A) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

DÉMONSTRATION. - Revenons à la définition des applications de la suite exacte d'homotopie (exposé 1, paragraphe 6). L'application $\pi_n(A) \to \pi_n(X)$ est définie par l'injection $A \to X$; le caractère fonctoriel de h_n assure donc la commutativité du carré 1 du diagramme. L'application $\pi_{n+1}(X , A) \to \pi_n(A)$ est définie par l'application $\Omega(X , A , x_0) \to E(X , A)$, d'où le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\pi_{n+1}(X , A) = \pi_n(\Omega(X , A , x_0)) \arrow[r] \arrow[d, "h_{n+1}"'] & \pi_n(E(X , A)) \approx \pi_n(A) \arrow[d] \\
H_{n+1}(X , A) \xleftarrow{\sigma_n} H_n(\Omega(X , A , x_0)) \arrow[r] & H_n(E(X , A)) \approx H_n(A)
\end{tikzcd}$$

la commutativité du premier carré résultant de la définition de h_{n+1}. Ceci prouve que le carré 3 est commutatif. Enfin, l'application $\pi_{n+1}(X) \to \pi_{n+1}(X , A)$ est définie par l'injection

$$\Omega(X , x_0) \to \Omega(X , A , x_0)$$

et la commutativité du carré (2) résulte du fait que cette inclusion donne lieu au diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(\Omega(X\,,\,x_o)) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(\Omega(X\,,\,x_o)) \arrow[d] & H_{n+1}(E'(X\,,\,x_o)\,,\,\Omega(X\,,\,x_o)) \arrow[l, "\approx"'] \arrow[r, "p_*"] \arrow[d] & H_{n+1}(X) \arrow[d] \\
\pi_n(\Omega(X,A,x_o)) \arrow[r] & H_n(\Omega(X,A,x_o)) & H_{n+1}(E'(X\,,\,x_o)\,,\,\Omega(X,A,x_o)) \arrow[l, "\approx"'] \arrow[r, "p_*"] & H_{n+1}(X\,,\,A)
\end{tikzcd}$$

2. Les théorèmes de Hurewicz.

Il est clair que si $\pi_o(X\,,\,x_o)$ est réduit à un élément, le groupe $H_o(X)$ est nul, et réciproquement ; ceci exprime que X est connexe. Par abus de langage, on écrira alors que $\pi_o(X) = 0$. Si en outre $\pi_1(X) = 0$, alors $H_1(X) = 0$ en vertu du théorème 1. Pour généraliser aux autres groupes d'homotopie et d'homologie, on utilisera un

LEMME 1. - Soit $x_o \in A \subset X$, X étant tel que $\pi_o(X) = 0$, $\pi_1(X) = 0$, et soit n un entier ≥ 2. Si l'on a

(i) $$H_i(X\,,\,A) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq i < n\,,$$

la suspension $\sigma_i : H_i(\Omega(X\,,\,A\,,\,x_o)) \to H_{i+1}(X\,,\,A)$ est bijective pour $0 \leq i < n$, et surjective pour $i = n$. (En particulier on a $H_i(\Omega(X\,,\,A\,,\,x_o)) = 0$ pour $i < n - 1$).

Ce lemme résulte aussitôt de la proposition 3 (B), de l'exposé 3, appliquée au fibré (1) et au sous-fibré (2).

THÉORÈME 2 (théorème de Hurewicz "absolu"). - Soit n un entier ≥ 2. Si $\pi_o(X) = 0$ et $\pi_1(X) = 0$, les conditions

(i) $$H_i(X) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq i < n\,,$$

(ii) $$\pi_i(X) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq i < n$$

sont équivalentes ; elles entraînent :

a. l'homomorphisme $h_n : \pi_n(X) \to H_n(X)$ est bijectif ;

b. l'homomorphisme $h_{n+1} : \pi_{n+1}(X) \to H_{n+1}(X)$ est surjectif.

DÉMONSTRATION. - Montrons d'abord que (i) entraîne (ii) et (a), et ceci par récurrence sur n. Pour $n = 2$, il y a seulement à prouver (a) ; d'après la définition de h_2, il suffit de prouver que

$$h_1 : \pi_1(\Omega(X)) \to H_1(\Omega(X)) \quad \text{et} \quad \sigma_1 : H_1(\Omega(X)) \to H_2(X)$$

sont bijectifs. La première application est bijective à cause du théorème 1, compte tenu du fait que $\pi_1(\Omega(X))$ est abélien (exposé 1, proposition 11). Quant à σ_1, c'est un isomorphisme, en vertu du lemme ci-dessus (appliqué pour $n = 2$ dans le cas où $A = \{x_0\}$).

Supposons prouvé que (i) entraîne (ii) et (a) pour $n - 1$, et montrons-le pour n $(n \geqslant 3)$. D'après le lemme, la suspension

$$\sigma_i : H_i(\Omega(X)) \to H_{i+1}(X)$$

est bijective pour $0 \leq i \leq n - 1$. On a donc $H_i(\Omega(X)) = 0$ pour $0 \leq i < n - 1$ (d'après l'hypothèse (i)) ; donc $\pi_0(\Omega(X)) = 0$ et $\pi_1(\Omega(X)) = 0$, et l'hypothèse de récurrence est applicable à l'espace $\Omega(X)$. On en conclut que $\pi_i(\Omega(X)) = 0$ pour $0 \leq i < n - 1$, et que $\pi_{n-1}(\Omega(X)) \to H_{n-1}(\Omega(X))$ est bijectif. Donc $\pi_i(X) = 0$ pour $i < n$, et puisque $\sigma_{n-1} : H_{n-1}(\Omega(X)) \to H_n(X)$ est bijective, on conclut que $h_n : \pi_n(X) \to H_n(X)$ est bijectif.

On a ainsi montré que (i) entraîne (ii) et (a). Il s'ensuit que (ii) entraîne (i) ; sinon, soit p le plus petit entier $< n$ tel que $H_p(X) \neq 0$; d'après ce qu'on vient de démontrer, $h_p : \pi_p(X) \to H_p(X)$ est bijectif, d'où une contradiction.

Il reste finalement à montrer que (i) et (ii) entraînent (b). Si on peut le prouver pour $n = 2$, cette assertion se démontrera ensuite par récurrence sur $n \geqslant 3$. En effet, d'après le lemme, la suspension $\sigma_n : H_n(\Omega(X)) \to H_{n+1}(X)$ est surjective ; et, par l'hypothèse de récurrence appliquée à $\Omega(X)$, $h_n : \pi_n(\Omega(X)) \to H_n(\Omega(X))$ est surjective. On s'appuiera sur le

LEMME 2. - $H_3(\pi, 2) = 0$ <u>pour tout groupe abélien</u> π (on note ainsi l'homologie d'un espace $K(\pi, 2)$ dont tous les groupes d'homotopie sont nuls, sauf π_2 qui est π).

Admettons provisoirement ce lemme. On montre qu'on peut plonger X dans un espace $V = K(\pi_2(X), 2)$ de façon que l'application $\pi_2(X) \to \pi_2(V)$ définie par l'injection $X \to V$ soit l'identité (V s'obtient par adjonction de cellules à X) . Soit alors X' l'espace des chemins de V , d'extrémité dans X ; X est rétracte par déformation de X' . L'application fibrée $p : X' \to V$ qui associe à chaque chemin son origine a pour fibre un espace $\widetilde{X}$ tel que

$$\pi_i(\widetilde{X}) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq i \leq 2 \ , \quad \pi_3(\widetilde{X}) = \pi_3(X) \ ,$$

comme le montre la suite exacte d'homotopie du fibré. D'après la partie déjà démontrée du théorème 2, il s'ensuit que

$$H_i(\widetilde{X}) = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq 2 \ , \quad H_3(\widetilde{X}) = \pi_3(X) \ .$$

Le terme E^2 de la suite spectrale du fibré est donné par

$$E^2_{p,q} = H_p(\pi_2 \ , 2 \ ; H_q(\widetilde{X})) \ , \text{ d'où } \ E^2_{p,q} = 0 \quad \text{pour} \quad q = 1 \ \text{ ou } \ 2 \ ,$$

avec $E^2_{0,3} = \pi_3(X)$, $E^2_{p,0} = H_p(\pi_2 \ , 2)$ (Remarque : ici, on ne prend pas, en dimension 0 , les groupes d'homologie "réduits"). Le théorème 5.12 (a), page 328 du livre de CARTAN-EILENBERG [1] donne alors la suite exacte

$$E^2_{4,0} \to E^2_{0,3} \to H_3(X) \to E^2_{3,0} \to 0 \ ,$$

c'est-à-dire

$$H_4(\pi_2 \ , 2) \to \pi_3(X) \xrightarrow{h_3} H_3(X) \to H_3(\pi_2 \ , 2) \to 0 \ .$$

Si l'on admet le lemme 2, il s'ensuit que h_3 est surjectif.

<u>Indication sur la démonstration du lemme</u> 2. - Soit B l'espace $K(\pi \ , 2)$, et soit X l'espace des chemins de B , d'origine donnée ; la fibre F est un espace $K(\pi \ , 1)$, comme le montre la suite exacte d'homotopie du fibré. La suite spectrale de ce fibré donne une suite exacte

$$H_1(\pi \ , 1) \otimes H_1(\pi \ , 1) \xrightarrow{f} H_2(\pi \ , 1) \longrightarrow H_3(\pi \ , 2) \to 0 \ ,$$

où f est l'application définie par la loi de composition du groupe abélien π . Il suffira de montrer que l'application f est surjective ; pour cela, on peut se borner au cas où le groupe π est de type fini (le cas général s'en

---

[1] CARTAN (H.) et EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).

déduit par limite inductive). Montrons que si f est surjective pour deux groupes π et π', f est surjective pour le groupe produit $\pi \times \pi'$: en effet, d'après la formule de Künneth, $H_2(\pi \times \pi', 1)$ est somme directe de $H_2(\pi, 1)$, $H_2(\pi', 1)$ et $H_1(\pi, 1) \otimes H_1(\pi', 1)$, et il est clair que chacun de ces groupes est contenu dans l'image de $H_1(\pi \times \pi', 1) \otimes H_1(\pi \times \pi', 1)$. Pour achever la démonstration, il suffit de montrer que $H_2(\pi, 1) = 0$ lorsque π est un groupe cyclique, fini ou infini. Or cela résulte du calcul explicite, bien connu, de l'homologie d'un groupe cyclique.

THÉORÈME 3 (théorème de Hurewicz "relatif"). - Soient $x_0 \in A \subset X$, et supposons $\pi_0(A) = \pi_0(X) = 0$, $\pi_1(X) = 0$. Alors $\pi_1(X, A)$ et $H_1(X, A)$ sont nuls ; $h_2 : \pi_2(X, A, x_0) \to H_2(X, A)$ est surjectif et a pour noyau le groupe des commutateurs de $\pi_2(X, A, x_0)$. Si de plus $\pi_1(A, x_0) = 0$, alors $\pi_2(X, A, x_0) \to H_2(X, A)$ est un isomorphisme. Moyennant toutes les hypothèses précédentes, soit n un entier $\geqslant 3$; alors les conditions

(i) $$H_i(X, A) = 0 \quad \text{pour } [illegible] \leq i < n ,$$

(ii) $$\pi_i(X, A) = 0 \quad \text{pour } 0 \leqslant i < n$$

sont équivalentes ; elles entraînent :

a. l'homomorphisme $h_n : \pi_n(X, A) \to H_n(X, A)$ est bijectif ;

b. l'homomorphisme $h_{n+1} : \pi_{n+1}(X, A) \to H_{n+1}(X, A)$ est surjectif.

DÉMONSTRATION. - $\pi_1(X, A)$ et $H_1(X, A)$ sont nuls à cause de la suite exacte d'homotopie (resp. d'homologie). L'espace $Y = \Omega(X, A, x_0)$ est donc connexe ; d'après le théorème 1 appliqué à Y, l'application $\pi_2(X, A) \to H_1(\Omega(X, A, x_0))$ identifie le second groupe au premier "rendu abélien" ; de plus, d'après le lemme 1, la suspension $\sigma_1 : H_1(\Omega(X, A, x_0)) \to H_2(X, A)$ est bijective. De là s'ensuit bien que $h_2 : \pi_2(X, A) \to H_2(X, A)$ identifie le second groupe au premier "rendu abélien". Si maintenant on suppose $\pi_1(A) = 0$, la suite exacte d'homotopie montre que $\pi_2(X, A)$ est un quotient de $\pi_2(X)$, qui est abélien ; donc $\pi_2(X, A)$ est abélien, et $h_2 : \pi_2(X, A) \to H_2(X, A)$ est un isomorphisme.

Sous les hypothèses précédentes, les conditions $\pi_2(X, A) = 0$ et $H_2(X, A) = 0$ sont équivalentes. Elles sont remplies si on fait l'hypothèse (i) de l'énoncé, avec un $n \geqslant 3$. D'après le lemme 1,

$$\sigma_i : H_i(\Omega(X, A, x_0)) \to H_{i+1}(X, A)$$

est alors bijective pour $i < n$, et surjective pour $i = n$. L'espace $Y = \Omega(X , A , x_0)$ satisfait donc à $\pi_0(Y) = \pi_1(Y) = 0$, $H_i(Y) = 0$ pour $i < n - 1$; d'après le théorème 2 (appliqué à Y) , on a $\pi_i(Y) = 0$ pour $i < n - 1$, $\pi_{n-1}(Y) \to H_{n-1}(Y)$ est bijectif, et $\pi_n(Y) \to H_n(Y)$ est surjectif. On en conclut que $\pi_i(X , A) = 0$ pour $i < n$, que $h_n : \pi_n(X , A) \to H_n(X , A)$ est bijectif, et que $h_{n+1} : \pi_{n+1}(X , A) \to H_{n+1}(X , A)$ est surjectif. Ceci démontre les propriétés (ii), (a) et (b) de l'énoncé. Comme plus haut, on montre que (ii) entraîne (i), et le théorème 3 est établi.

3. Les théorèmes de J.H.C. WHITEHEAD.

THÉORÈME 4. - Soit $f : X \to Y$ une application continue d'espaces topologiques, telle que $f(x_0) = y_0$. Supposons

$$\pi_0(X , x_0) = \pi_1(X , x_0) = \pi_0(Y , y_0) = \pi_1(Y , y_0) = 0 ,$$

et soit n un entier ≥ 2 . Alors les conditions :

(i) $f_* : \pi_i(X , x_0) \to \pi_i(Y , y_0)$ est bijectif pour $i < n$ et surjectif pour $i = n$;

(ii) $f_* : H_i(X) \to H_i(Y)$ est bijectif pour $i < n$ et surjectif pour $i = n$;

sont équivalentes.

DÉMONSTRATION. - On peut se ramener au cas où f est une injection grâce au "mapping cylinder" (cylindre d'application) de f : c'est un espace M tel que X soit plongé dans M , que Y soit rétracte par déformation de M , et que l'application composée de l'injection $X \to M$ et de la rétraction $M \to Y$ soit l'application donnée f .

Supposons donc désormais que $f : X \to Y$ soit une injection topologique (X étant donc un sous-espace de Y avec la topologie induite). Alors les conditions (i) de l'énoncé équivalent à $\pi_i(Y , X , x_0) = 0$ pour $i \leq n$, et les conditions (ii) équivalent à $H_i(Y , X) = 0$ pour $i \leq n$. Le présent théorème résulte alors du théorème 3 (équivalence des conditions (i) et (ii) du théorème 3).

THÉORÈME 5. - Soient X et Y des espaces connexes, et soit $f : X \to Y$ une application continue telle que $f(x_0) = y_0$. Soit enfin n un entier ≥ 2 . Alors :

a. Si l'application $\pi_i(X, x_o) \to \pi_i(Y, y_o)$ définie par f est bijective pour $i < n$ et surjective pour $i = n$, il en est de même de l'application $H_i(X) \to H_i(Y)$ définie par f ;

b. Si $\pi_i(X, x_o) \to \pi_i(Y, y_o)$ est bijective pour $i \leq n$, il en est de même de l'application $H_i(X) \to H_i(Y)$;

c. Si $\pi_i(X, x_o) \to \pi_i(Y, y_o)$ est bijective pour $i \leq n$ et injective pour $i = n + 1$, il en est de même de $H_i(X) \to H_i(Y)$.

DÉMONSTRATION. - On va d'abord supposer que $\pi_1(X, x_o) = 0$ et $\pi_1(Y, y_o) = 0$. D'autre part, on supposera, comme dans la démonstration du théorème 4, que X est un sous-espace de Y, et $x_o = y_o$. L'assertion (a) est une conséquence du théorème 4. Prouvons (b) : on suppose que l'application $\pi_i(X) \to \pi_i(Y)$ est bijective pour $i \leq n$; d'après (a), $H_i(X) \to H_i(Y)$ est bijective pour $i < n$ et surjective pour $i = n$, et tout revient à montrer que $H_n(X) \to H_n(Y)$ est injective. Or on a $\pi_i(Y, X) = 0$ pour $i \leq n$, donc, d'après le théorème 3, $\pi_{n+1}(Y, X) \to H_{n+1}(Y, X)$ est bijective ; le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_{n+1}(Y, X) & \xrightarrow{0} & \pi_n(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{n+1}(Y, X) & \longrightarrow & H_n(X) \end{array}$$

montre alors que l'application $H_{n+1}(Y, X) \to H_n(X)$ est nulle, et par suite $H_n(X) \to H_n(Y)$ est injective.

Prouvons (c) (en supposant toujours $\pi_1(X) = \pi_1(Y) = 0$). On peut appliquer ce qui vient d'être dit dans le cas (b) ; le théorème 3 dit que l'application $\pi_{n+2}(Y, X) \to H_{n+2}(Y, X)$ est surjective ; comme on suppose que $\pi_{n+1}(X) \to \pi_{n+1}(Y)$ est injective, le même diagramme que ci-dessus (mais où n serait remplacé par $n + 1$) montre que l'application $H_{n+2}(Y, X) \to H_{n+1}(X)$ est nulle ; donc $H_{n+1}(X) \to H_{n+1}(Y)$ est injective, ce qui démontre (c).

On va maintenant, dans chacun des trois cas (a), (b), (c), s'affranchir de l'hypothèse $\pi_1(X) = 0$, $\pi_1(Y) = 0$. Supposant toujours que X est un sous-espace de Y, nous plongeons Y dans un espace $V = K(\pi, 1)$, où π désigne le groupe $\pi_1(Y, y_o) = \pi_1(X, x_o)$. Soit X' l'espace des chemins de V dont l'extrémité est dans X ; X' est un fibré (de Serre) sur V, la fibre $\tilde{X}$ étant l'espace des chemins de V d'origine x_o et d'extrémité dans X. De même, soit Y' l'espace des chemins de V dont l'extrémité est dans Y ; Y' est fibré de base V, de fibre $\tilde{Y}$. Le fibré X' est un sous-fibré de Y', de même base V, la fibre $\tilde{X}$ s'identifiant à un sous-espace de la fibre $\tilde{Y}$. De plus, Y est rétracte par déformation de Y', et dans la déformation X' se rétracte sur X. La su te spectrale du fibré X' s'envoie dans celle du fibré Y' ; elles aboutissent respectivement à $H_*(X)$ et $H_*(Y)$. L'homomorphisme des termes E^2 est

$$g_{p,q} : H_p(V, H_q(\tilde{X})) \rightarrow H_p(V, H_q(\tilde{Y}))$$

(il s'agit d'homologie de V à valeurs dans le système local des homologies des fibres).

La suite exacte d'homotopie des fibrés montre que $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ sont connexes, que $\pi_1(\tilde{X}) = \pi_1(\tilde{Y}) = 0$, et que $\pi_i(\tilde{X}) \rightarrow \pi_i(X)$ et $\pi_i(\tilde{Y}) \rightarrow \pi_i(Y)$ sont des isomorphismes pour tout $i \geqslant 2$. Dans le cas (a), l'application $\pi_i(\tilde{X}) \rightarrow \pi_i(\tilde{Y})$ est donc bijective pour $i < n$ et surjective pour $i = n$; dans le cas (b), elle est bijective pour $i \leqslant n$; dans le cas (c), elle est bijective pour $i \leqslant n$ et injective pour $i = n + 1$. On peut appliquer le présent théorème à l'injection $\tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$, et on en déduit ceci :

- dans le cas (a), l'application $H_i(\tilde{X}) \rightarrow H_i(\tilde{Y})$ est bijective pour $i < n$, et surjective pour $i = n$;

- dans le cas (b), l'application $H_i(\tilde{X}) \rightarrow H_i(\tilde{Y})$ est bijective pour $i \leqslant n$,

- dans le cas (c), l'application $H_i(\tilde{X}) \rightarrow H_i(\tilde{Y})$ est bijective pour $i \leqslant n$, et injective pour $i = n + 1$.

Dans le cas (a), l'homomorphisme $g_{p,q}$ des termes E^2 est bijectif pour $p + q < n$, et surjectif pour $p + q = n$ (car si $p + q = n$, ou bien $p > 0$, et alors $g_{p,q}$ est bijectif, ou bien $p = 0$ et $q = n$, et alors $H_o(V, H_n(\tilde{X})) \rightarrow H_o(V, H_n(\tilde{Y}))$ est surjectif).

Dans le cas (b), l'homomorphisme $g_{p,q}$ est bijectif pour $p + q \leqslant n$, et il est surjectif (et même bijectif) pour $p + q = n + 1$, $p \geqslant 2$.

Dans le cas (c), l'homomorphisme $g_{p,q}$ est bijectif pour $p + q \leqslant n$, injectif pour $p + q = n + 1$, et surjectif pour $p + q \leqslant n + 2$ et $p \geqslant 2$ (en fait dans ce dernier cas, $g_{p,q}$ est même bijectif).

Dans le cas (a), on peut appliquer le lemme 3 (Appendice), qui dit que l'application $H_i(X) \rightarrow H_i(Y)$ des aboutissements des suites spectrales est bijective pour $i < n$, et surjective pour $i = n$; ceci prouve l'assertion (a) de l'énoncé.

Dans le cas (b), le lemme 4 (Appendice) montre que l'application $H_i(X) \to H_i(Y)$ est bijective pour $i \leq n$; ceci prouve l'assertion (b) de l'énoncé. Enfin, dans le cas (c), le lemme 5 (Appendice) dit que $H_i(X) \to H_i(Y)$ est bijective pour $i \leq n$ et injective pour $i = n + 1$, ce qui démontre l'assertion (c) de l'énoncé.

Le théorème 5 est ainsi entièrement démontré.

REMARQUE. - Lorsque $\pi_1(X)$ et $\pi_1(Y)$ ne sont pas nuls, il ne faudrait pas croire que la condition (ii) du théorème 4 entraîne (i), même lorsque $\pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ est bijectif. Voici en effet l'exemple d'une application $f : X \to Y$, (X et Y étant connexes) telle que les applications $H_i(X) \to H_i(Y)$ définies par f soient toutes des isomorphismes, ainsi que l'application $\pi_1(X) \to \pi_1(Y)$; et cependant $\pi_i(X) \to \pi_i(Y)$ n'est pas un isomorphisme pour tout $i \geq 2$.

Soit π le groupe Z_2 des entiers modulo 2 ; l'espace $K(\pi , 1) = Y$ est, comme on sait, la base d'un fibré principal P dont le groupe structural est π . Soit d'autre part M un espace tel que $\pi_0(M) = \pi_1(M) = 0$, $H_2(M) = Z_3$, $H_i(M) = 0$ pour $i \geq 3$ ("espace de Moore" $M(Z_3 , 2)$; un tel espace existe). Si on fait opérer $Z_2 = \pi$ sur Z_3 , cela définit des opérations de π sur l'espace M , et on a donc un fibré de base Y et de fibre M associé au fibré principal P . Nous ferons opérer π dans Z_3 de manière non triviale, le générateur de $\pi = Z_2$ définissant l'automorphisme de Z_3 qui change 1 en -1 . Soit X le fibré ainsi défini, de base Y et de fibre M . Soit f l'application de ce fibré sur sa base. Puisque $\pi_1(M) = 0$, l'application $\pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ définie par f est un isomorphisme.

Le terme E^2 de la suite spectrale du fibré X est donné par

$$E^2_{p,q} = H_p(\pi , 1 ; H_q(M)) \quad .$$

Donc $E^2_{p,q} = 0$ si q est distinct de 0 et de 2 . Pour $p \neq 0$, $q = 2$, les éléments de $E^2_{p,q}$ sont à la fois d'ordre 2 et d'ordre 3, donc $E^2_{p,q} = 0$. Enfin, pour $p = 0$, $q = 2$, $E^2_{0,2}$ est le quotient de $H_2(M) = Z_3$ par les opérations de π , donc c'est 0 . Finalement, $E^2_{p,q} = 0$ pour $q \neq 0$. Il en résulte que $H_p(X) \to H_p(Y)$ est un isomorphisme pour tout p . Or M a des groupes d'homotopie non nuls (et même, en fait, possède une infinité de groupes d'homotopie non nuls) ; il en résulte que $\pi_i(X) \to \pi_i(Y)$ ne peut être un isomorphisme pour tout i (ni même pour tous les i sauf un nombre fini).

APPENDICE

Un homomorphisme de groupes différentiels gradués définit un homomorphisme des suites spectrales correspondantes. Soit $g^r_{p,q} : E^r_{p,q} \to E'^r_{p,q}$ l'homomorphisme des termes E^r et soit $h_i : H_i \to H'_i$ l'homomorphisme des aboutissements de ces suites spectrales. On se propose de donner des conditions suffisantes pour que certains des h_i soient bijectifs, resp. surjectifs, resp. injectifs. Observons d'abord que si $g^\infty_{p,q}$ est injectif (resp. surjectif, resp. injectif) pour tout couple (p , q) tel que $p + q = i$, alors h_i est bijectif (resp. surjectif, resp. injectif).

LEMME 3. – *Si* $g^2_{p,q}$ *est bijectif pour* $p + q < n$ *et surjectif pour* $p + q = n$, *alors* h_i *est bijectif pour* $i < n$ *et surjectif pour* $i = n$.

LEMME 4. – *Si* $g^2_{p,q}$ *est bijectif pour* $p + q \leq n$ *et surjectif pour* $p + q = n + 1$, $p \geq 2$, *alors* h_i *est bijectif pour* $i \leq n$.

LEMME 5. – *Si* $g^2_{p,q}$ *est bijectif pour* $p + q \leq n$, *injectif pour* $p + q = n + 1$ *et surjectif pour* $p + q \leq n + 2$, $p \geq 2$, *alors* h_i *est bijectif pour* $i \leq n$ *et injectif pour* $i = n + 1$.

DÉMONSTRATION de ces trois lemmes. – Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
E^r_{p+r,q-r+1} \arrow[r, "d^r"] \arrow[d, "g^r_{p+r,q-r+1}"] & E^r_{p,q} \arrow[r, "d^r"] \arrow[d, "g^r_{p,q}"] & E^r_{p-r,q+r-1} \arrow[d, "g^r_{p-r,q+r-1}"] \\
E'^r_{p+r,q-r+1} \arrow[r, "d'^r"] & E'^r_{p,q} \arrow[r, "d'^r"] & E'^r_{p-r,q+r-1}
\end{tikzcd}$$

Si $g^r_{p,q}$ est surjectif, et $g^r_{p-r,q+r-1}$ est injectif, il est clair que $g^{r+1}_{p,q}$ est surjectif. Si $g^r_{p,q}$ est injectif, et $g^r_{p+r,q-r+1}$ est surjectif, il est clair que $g^{r+1}_{p,q}$ est injectif.

Dans les hypothèses du lemme 3, on montre par récurrence sur $r \geq 2$, que $g^r_{p,q}$ est bijectif pour $p + q < n$ et surjectif pour $p + q = n$. Dans les hypothèses du lemme 4, on montre, par récurrence sur r , que $g^r_{p,q}$ est bijectif pour $p + q \leq n$, et surjectif pour $p + q = n + 1$, $p \geq 2$. Dans les hypothèses du lemme 5, on montre, par récurrence sur r, que $g^r_{p,q}$ est bijectif pour $p + q \leq n$, injectif pour $p + q = n + 1$, et surjectif pour $p + q \leq n + 2$, $p \geq 2$.