HENRI CARTAN

Plongements projectifs

Séminaire Henri Cartan, tome 10, n° 2 (1957-1958), exp. n° 17, p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1957-1958__10_2_A8_0>

PLONGEMENTS PROJECTIFS

par Henri CARTAN

On se propose de montrer que, pour tout groupe Γ' commensurable au groupe modulaire Γ, l'espace analytique normal $\Gamma' \backslash \mathfrak{S}_n^*$ se réalise comme <u>sous-variété algébrique d'un espace projectif</u>, le plongement projectif pouvant être défini par des <u>formes automorphes</u> d'un même poids.

1. Préliminaires sur les anneaux gradués.

Il sera commode de rassembler ici quelques résultats classiques. Un <u>anneau gradué</u> est un anneau A, muni d'une graduation positive telle que le produit d'un élément de A_p et d'un élément de A_q soit dans A_{p+q}. Pour qu'un anneau gradué A soit <u>intègre</u>, il faut et il suffit que <u>le produit de deux éléments homogènes</u> $\neq 0$ <u>soit</u> $\neq 0$; en effet, si $a = \sum_i a_i$ et $b = \sum_i b_i$ sont $\neq 0$, soient p le plus petit des i tels que $a_i \neq 0$ et q le plus petit des i tels que $b_i \neq 0$; la composante de degré $p + q$ du produit ab est $a_p b_q \neq 0$, donc $ab \neq 0$.

On s'intéresse à la <u>clôture intégrale d'un anneau gradué</u> A (intègre). Considérons les éléments du corps des fractions K de A qui peuvent s'écrire a/b, où a et b sont <u>homogènes</u>, $b \neq 0$; ceux d'entre eux qui sont entiers sur A engendrent évidemment un anneau gradué A^*, entier sur A. On va voir que A^* est, en fait, la clôture intégrale de A (clôture qui est donc un <u>anneau gradué</u>). Pour le montrer, observons que $A^{**} = A^*$; donc, remplaçant A par A^*, il suffit de prouver :

PROPOSITION 1. - <u>Soit</u> A <u>un anneau gradué intègre, tel que</u> $A = A^*$. <u>Alors</u> A <u>est intégralement clos.</u>

On aura besoin d'un lemme connu :

LEMME. - <u>Soit</u> A <u>un anneau intègre,</u> K <u>son corps des fractions, et</u> t <u>une indéterminée. Tout élément de l'algèbre des polynômes</u> $K[t]$ <u>qui est entier sur</u> $A[t]$ <u>a ses coefficients entiers sur</u> A.

DÉMONSTRATION du lemme. - Soit $f(t)$ un polynôme à coefficients dans K, et

$$P(y) = y^n + a_{n-1}\, y^{n-1} + \dots + a_o$$

un polynôme unitaire dont les coefficients a_i appartiennent à $A[t]$, et tel que $P(f(t)) = 0$. Soit m un entier strictement supérieur aux degrés de $f(t)$ et des $a_i(t)$. On a

$$P(x + t^m) = x^n + b_{n-1}\, x^{n-1} + \dots + b_o \, , \tag{1}$$

à coefficients $b_i \in A[t]$, et $b_o(t)$ est un polynôme unitaire en t. Si dans le second membre de (1) on remplace x par $f(t) - t^m$, on trouve identiquement 0, donc le polynôme unitaire $b_o(t)$ est divisible par le polynôme $t^m - f(t)$, dans l'anneau $K[t]$. Les racines du polynôme $t^m - f(t)$ (dans une clôture algébrique de K) annulent donc le polynôme unitaire $b_o(t)$; par suite, elles sont entières sur A, et les coefficients du polynôme unitaire $t^m - f(t)$ sont donc entiers sur A. Il s'ensuit que les coefficients de $f(t)$ sont entiers sur A. C.Q.F.D.

DÉMONSTRATION de la proposition 1. - Soit φ l'homomorphisme de l'anneau A dans l'anneau $A[t]$, qui envoie un élément $a \in A_i$ dans $a\, t^i$. C'est une injection, qui identifie A à un sous-anneau de $A[t]$; φ se prolonge en une injection (encore notée φ) de K (corps des fractions de A) dans le corps $K(t)$ des fractions rationnelles à une indéterminée t. Soit c un élément de K, entier sur A ; $\varphi(c)$ est un élément de $K(t)$ entier sur $A[t]$, donc entier sur $K[t]$; et comme $K[t]$ est intégralement clos, $\varphi(c) \in K[t]$. Soit $\varphi(c) = \sum_k c_k\, t^k$, $c_k \in K$; d'après le lemme, les c_k sont entiers sur A.

Puisque $c = u/v$, avec $u = \sum_i u_i$ $(u_i \in A_i)$, $v = \sum_{j \geqslant p} v_j$ $(v_j \in A_j,\ v_p \neq 0)$ on a, dans $K[t]$, l'égalité

$$\left(\sum_i a_i\, t^i\right) . \left(\sum_{j \geqslant p} v_j\, t^j\right) = \sum_k c_k\, t^k \, ,$$

d'où l'on déduit, par récurrence sur k, que c_k est le quotient de deux éléments homogènes de A. Puisque $\mathbf{A} = A^*$, les c_k sont dans A, donc

$$c = \sum_k c_k \in A \, ,$$

ce qui achève la démonstration.

2. Algèbres projectives.

Dans ce paragraphe et le suivant, K désigne un corps algébriquement clos, donné une fois pour toutes.

Pour chaque entier N, on note P_N l'espace projectif sur le corps K, quotient de l'espace $K^{N+1} - \{0\}$. Toute sous-variété algébrique irréductible V de P_N définit un cône algébrique irréductible W dans K^{N+1}, et réciproquement. Le quotient de l'algèbre des polynômes $K[X_0, \ldots, X_N]$ par l'idéal des polynômes nuls sur W est une algèbre graduée, que nous noterons $A(V)$: elle est déterminée par la donnée de la sous-variété V de P_N ; $A(V)$ est intègre, se réduit aux scalaires en degré 0, et est engendrée (comme algèbre à élément unité) par un nombre fini d'éléments homogènes de degré 1.

DÉFINITION. - On appelle algèbre projective une algèbre graduée A, intègre, telle que A_0 se réduise aux scalaires, et que A soit engendrée (comme algèbre à élément unité) par un nombre fini (non nul) d'éléments homogènes de degré 1.

Soit A une algèbre projective ; notons $N + 1$ la dimension de l'espace vectoriel A_1. Le choix d'une base de A_1 identifie l'algèbre A au quotient de $K[X_0, \ldots, X_N]$ par un idéal homogène, premier, qui définit donc un cône algébrique irréductible W dans K^{N+1} ; et cet idéal est celui de tous les polynômes qui s'annulent sur W, d'après le "Nullstellensatz". Soit V la variété algébrique projective définie par W ; alors l'algèbre A s'identifie à l'algèbre $A(V)$ associée à V. Si on change la base de l'espace vectoriel A_1, on trouve une variété V' qui se déduit de V par un automorphisme de l'espace projectif P_N. Ainsi toute algèbre projective A définit, à un isomorphisme près, une variété algébrique projective V, irréductible, telle que $A(V) = A$. On la notera $V(A)$; elle n'est contenue dans aucun vrai sous-espace projectif de l'espace P_N dans lequel elle est plongée.

Soit A une algèbre projective ; notons A^+ l'idéal maximal $\sum_{k \geq 1} A_k$. Pour tout idéal premier homogène I distinct de A^+, le quotient A/I est encore une algèbre projective, qui définit une sous-variété de la variété V définie par A. Les idéaux premiers homogènes $\neq A^+$ forment un ensemble ordonné inductif, dont les éléments maximaux correspondent aux points de la variété $V(A)$. Ce sont les I tels que A/I soit isomorphe (comme algèbre graduée) à l'algèbre $K[X]$ des polynômes à une variable.

Pour qu'un idéal premier homogène I soit maximal dans l'ensemble des idéaux premiers homogènes $\neq A^+$, il faut et il suffit $I \cap A_1$ soit un sous-espace vectoriel de A_1 dont la codimension soit égale à 1 ; et alors I est engendré (comme idéal) par $I \cap A_1$.

PROPOSITION 2. - Soient A et B deux algèbres projectives, B étant une sous-algèbre graduée de A. Si A est entière sur B, l'injection $B \longrightarrow A$ définit une application surjective $V(A) \longrightarrow V(B)$.

DÉMONSTRATION. - Un point de $V(A)$ est défini par un idéal premier homogène I de A, maximal dans l'ensemble des idéaux premiers homogènes $\neq A^+$. Soit $J = I \cap B$, idéal premier homogène de B ; pour montrer que J définit un point de $V(B)$, on doit montrer que $J \cap B_1 = I \cap B_1$ est de codimension 1 dans B_1, et pour cela prouver que B_1 n'est pas contenu dans I. Or soit $a \in A_1$ tel que $a \notin I$; on a une relation $a^n + \sum_{0 \leq i < n} b_i a^i = 0$, où $b_i \in B_{n-i}$ est de degré > 0 ; les b_i ne sont pas tous dans I, ce qui implique que B_1 n'est pas contenu dans I.

Ainsi on a défini une application $f : V(A) \longrightarrow V(B)$. Il reste à montrer qu'elle est surjective. Soit J un idéal premier homogène de B, maximal dans l'ensemble des idéaux premiers homogènes ; d'après le théorème de Cohen-Seidenberg, il existe un idéal premier I de A tel que $I \cap B = J$, et tout idéal $I' \supset I$ tel que $I' \cap B = J$ est égal à I. Ceci implique d'abord que I est homogène (car l'idéal homogène I' engendré par I satisfait à $I' \cap B = J$), et ensuite que I est maximal dans l'ensemble des idéaux premiers homogènes $\neq A^+$ (car si I'' est un élément maximal contenant I, $I'' \cap B_1$ est $\neq B_1$ d'après ce qu'on a vu dans la première partie de la démonstration ; donc $I'' \cap B_1 = J \cap B_1$, et par suite $I'' \cap B = J$, d'où $I'' = I$). Alors I définit un point de $V(A)$ dont l'image dans $V(B)$ est le point donné (défini par J). Ceci achève la démonstration.

Soit A une algèbre projective ; pour que la variété $V(A)$ soit projectivement normale, il faut et il suffit que A soit un anneau intégralement clos (dans son corps des fractions). Ceci exprime que le cône $W(A)$ est une variété affine normale. On dira alors que A est une algèbre projective normale.

Soit à nouveau A une algèbre projective (quelconque) ; cherchons l'anneau local $O(x)$ d'un point $x \in V(A)$. Il se compose évidemment des fractions p/q, où p et q sont des éléments homogènes de A, de même degré, tels que q soit $\neq 0$ au point x (c'est-à-dire : q n'appartient pas à l'idéal premier homogène défini par x). L'ensemble de ces anneaux locaux définit la structure de variété algébrique de V (indépendamment de son plongement projectif). Si V est projectivement normale, sa structure de variété algébrique est celle d'une variété normale, la réciproque étant inexacte.

Pour toute algèbre graduée A, nous noterons, pour tout entier $d > 0$, $A^{(d)}$ la sous-algèbre $\sum_{k \geqslant 0} A_{kd}$, munie de la graduation dans laquelle les éléments de A_{kd} sont de degré k .

PROPOSITION 3. - Si A est une algèbre projective, il en est de même de $A^{(d)}$; et l'injection $A^{(d)} \longrightarrow A$ définit un isomorphisme des variétés algébriques $V(A)$ et $V(A^{(d)})$.

La première assertion est évidente. D'autre part, soit I un idéal premier homogène de A , maximal dans l'ensemble des idéaux premiers homogènes $\neq A^+$; l'espace vectoriel A_d n'est pas contenu dans I (car si $a \in A_1$ et $a \notin I$, a^d n'est pas dans I), et il est immédiat que $I \cap A_d$ est de codimension 1 dans A_d (prendre une base de A_1). Donc $I \cap A_d$ est un idéal premier homogène de $A^{(d)}$, maximal dans l'ensemble des idéaux premiers homogènes J tels que $A_d \neq J$. On a ainsi défini une application $f : V(A) \longrightarrow V(A^{(d)})$. Elle est injective, car si I et I' sont distincts, il existe $a \in A_1$ tel que $a \notin I$ et $a \in I'$, d'où $a^d \notin I$ et $a^d \in I'$. Enfin, f est surjective, car si J est un idéal premier homogène de $A^{(d)}$ qui ne contient pas A_d , il existe un idéal premier I de A tel que $I \cap A^{(d)} = J$ (d'après COHEN-SEIDENBERG), et on voit comme plus haut que I est homogène ; il est trivial que $I \neq A^+$, autrement dit I définit un point de $V(A)$ que f applique au point donné de $V(A^{(d)})$.

Il reste à vérifier que la bijection f définit un isomorphisme des anneaux locaux des variétés $V(A)$ et $V(A^{(d)})$. Mais c'est évident, car toute fraction p/q , où p et q sont homogènes de même degré, est égale à pq^{d-1}/q^d .

3. Algèbres graduées de type fini.

PROPOSITION 4. - Soit A une algèbre graduée telle que A_o soit réduit aux scalaires. Si A est de type fini (i.e. : engendrée, comme algèbre à élément unité, par un nombre fini d'éléments, qu'on peut évidemment supposer homogènes), il existe un entier $d > 0$ tel que l'algèbre graduée $A^{(d)}$ soit engendrée par un nombre fini d'éléments de $A^{(d)}$.

COROLLAIRE. - Si en outre A est intègre et non réduite aux scalaires, $A^{(d)}$ est une algèbre projective.

DÉMONSTRATION. - Le corollaire résulte évidemment de la proposition, qu'on va démontrer maintenant. Soient b_i des générateurs homogènes de l'algèbre A , de degrés $m_i > 0$ (on laisse de côté le cas trivial où A est réduite aux scalaires). Soit m le p.p.c.m. des m_i . Considérons tous les monômes $\prod_i b_i^{\alpha_i}$, où

$$0 \leq \alpha_i < m/m_i \ , \ \sum_i \alpha_i m_i \equiv 0 \pmod{n} \ .$$

Ces monômes sont en nombre fini ; soit d_0 le plus grand de leurs degrés ; d_0 est un multiple de m , éventuellement nul. Soit d le plus grand des entiers d_0 et m ; d est un multiple de m . Soit F l'ensemble des monômes $\prod_i b_i^{\alpha i}$ de degré d ; on va montrer que, pour tout entier $k > 0$, tout élément de A_{kd} s'exprime comme combinaison linéaire de monômes par rapport aux éléments de F , qui sont en nombre fini. C'est trivial pour $k = 1$; procédons par récurrence sur k . Si c'est vrai pour $k - 1$, tout élément de degré kd est combinaison linéaire de monômes dont chacun se met sous la forme

$$(1) \qquad (\prod_i b_i^{\alpha i}) \cdot (\prod_i b_i^{\lambda i(m/m_i)}) \ , \qquad \text{où } 0 \leq \alpha_i < m/m_i \ , \ \lambda_i \text{ entiers.}$$

Le premier facteur a un degré multiple de m , donc $\leq d$, et par suite l'expression (1) peut s'écrire comme produit d'un élément de F par un élément de degré $(k - 1)d$; d'où la récurrence. C.Q.F.D.

APPLICATION. - Soit A une algèbre projective. On sait que la clôture intégrale A' de A est un A-module de type fini, donc est une algèbre de type fini. De plus A' est une algèbre graduée, d'après la proposition 1. Le corollaire ci-dessus montre alors que $A'^{(d)}$ est une algèbre projective normale, pour un entier $d > 0$ convenable. L'injection $A^{(d)} \longrightarrow A'^{(d)}$ définit une surjection $V(A'^{(d)}) \longrightarrow V(A^{d})$, d'après la proposition 2 ; d'ailleurs $V(A^{(d)})$ est isomorphe à $V(A)$ comme variété algébrique (proposition 3). La variété algébrique projective $V(A'^{(d)})$ s'appelle la normalisée projective de $V(A)$.

Pour toute algèbre graduée intègre A , telle que $A \neq A_0 = K$, et de type fini, on peut définir une variété algébrique $V(A)$, comme suit : il existe un entier $d > 0$ tel que $A^{(d)}$ soit une algèbre projective, et la variété algébrique $V(A^{(d)})$ ne dépend pas du choix de d : d'une façon précise, si $A^{(d)}$ et $A^{(d')}$ sont des algèbres projectives, on a un isomorphisme unique de la variété algébrique $V(A^{(d)})$ sur la variété algébrique $V(A^{(d')})$: on l'obtient en composant les isomorphismes $V(A^{(d)}) \sim V(A^{(dd')})$ et $V(A^{(dd')}) \sim V(A^{(d')})$ de la proposition 3. De plus, si on a trois entiers d , d' , d'' , l'isomorphisme $V(A^{(d)}) \sim V(A^{(d'')})$ est bien le composé des isomorphismes $V(A^{(d)}) \sim V(A^{(d')})$ et $V(A^{(d')}) \sim V(A^{(d'')})$. Ceci permet de considérer la variété notée simplement $V(A)$. Si A est intégralement clos, $V(A)$ est une variété projectivement normale.

Rappelons un résultat connu :

PROPOSITION 5. - Soit A une algèbre graduée intègre, telle que $A_0 = K$; soit G un groupe fini d'automorphismes de A (comme algèbre graduée), et soit B la sous-algèbre (graduée) des éléments G-invariants de A .

(i) si $A \neq A_0$, et si A est de type fini, alors $B \neq B_0$, et B est de type fini ;

(ii) si $B \neq B_0$, et si B est de type fini, alors $A \neq A_0$, et A est de type fini.

Rappelons brièvement la démonstration. Pour (i), on considère des générateurs a_i de l'algèbre A , en nombre fini ; ils sont entiers sur une sous-algèbre de type fini B' de B (pour chaque a_i , considérer les fonctions symétriques élémentaires des transformés de a_i par G). Donc A est un B'-module de type fini, et comme B' est un anneau noethérien, B est un B'-module de type fini ; il en résulte aussitôt que B , comme algèbre, est engendrée par un nombre fini d'éléments. De plus, si A n'est pas réduite aux scalaires, il en est de même de B : car si a , de degré > 0 , n'est pas nul, les fonctions symétriques élémentaires des transformés de a ne sont pas toutes nulles.

Prouvons maintenant (ii). Soit F le corps des fractions de A , et F' celui de B . Les éléments de F' sont exactement les éléments G-invariants de F , donc F est de degré fini sur F' . Il existe dans F un élément primitif sur F' , de degré k , et on peut le choisir dans A . Soit P son polynôme minimal (polynôme unitaire à coefficients dans B), et soit P' le polynôme dérivé ; alors $P'(u) \neq 0$, et l'on sait que tout élément $a \in A$, étant entier sur B , satisfait à une relation

$$a\, P'(u) = Q(u) ,$$

Q étant un polynôme de degré $< k$, à coefficients dans B . L'application $a \longrightarrow a\, P'(u)$ définit donc un isomorphisme du B-module A sur un sous-module d'un B-module de type fini ; comme B est un anneau noethérien (puisque c'est une algèbre de type fini, par hypothèse), A est un B-module de type fini ; donc A , comme algèbre, est de type fini. Puisque $A \supset B$ et que B n'est pas réduite aux scalaires, il est trivial que A n'est pas réduite aux scalaires. Ceci achève la démonstration.

PROPOSITION 6. - Dans l'une ou l'autre des hypothèses (i) et (ii) de la proposition 5, la surjection des variétés algébriques $V(A) \longrightarrow V(B)$ (cf. proposition 1) identifie $V(B)$ au quotient de la variété $V(A)$ par le groupe fini G , qui y opère naturellement (puisque G opère dans A).

DÉMONSTRATION. - On peut supposer que A et B sont des algèbres projectives ; en effet, A et B sont de type fini, donc, d'après la proposition 4, il existe un entier $d > 0$ tel que $A^{(d)}$ et $B^{(d)}$ soient des algèbres projectives. Il est immédiat que deux points de $V(A)$ congrus suivant G ont même image dans $V(B)$. Montrons que deux points x et y de $V(A)$ non congrus suivant G ont des images distinctes dans $V(B)$: ces points sont représentés par des génératrices x' et y' des cônes $W(A)$ et $W(B)$; il existe un polynôme homogène qui est nul sur la génératrice x', et $\neq 0$ sur chacune des transformées de y' par G ; l'image de ce polynôme dans l'algèbre A est un élément a ; le produit b des transformés de a par G est un élément de B, nul sur l'image de x et non nul sur l'image de y. Donc x et y ont, dans $V(B)$, des images distinctes.

Pour montrer que $V(B)$, comme variété algébrique, s'identifie au quotient de la variété algébrique $V(A)$ par le groupe G, il reste à prouver ceci : si p désigne la projection $V(A) \longrightarrow V(B)$, et si U est un ouvert de Zariski de $V(B)$, les fractions b/b' (où b et b' sont deux éléments homogènes de B, de même degré, b' étant $\neq 0$ en tout point de U) ne sont autres que les fractions a/a' (où a et a' sont deux éléments homogènes de A, de même degré, a' étant $\neq 0$ en tout point de $p^{-1}(U)$) telles que a/a' soit invariant par G. Or ceci est évident : car une telle fraction a/a' est égale à une fraction a_1/b', où b' désigne le produit de a' et de ses transformés par G, et a_1 est un élément de A invariant par G, donc est dans B.

4. Un lemme sur les variétés projectivement normales.

On suppose désormais que le corps de base K est le corps $\underset{\sim}{C}$ des nombres complexes.

Soit A une algèbre projective, et soit $V = V(A)$ la variété projective qu'elle définit dans l'espace projectif P_N (rappelons que tout sous-espace projectif de P_N contenant $V(A)$ est identique à P_N). Soit W le cône associé dans l'espace $\underset{\sim}{C}^{N+1}$. Soit F le fibré vectoriel canonique, de base P_N, de fibre $\underset{\sim}{C}$ (associé à $C^{N+1} - \{0\}$, fibré principal de base P_N, de groupe C^*). Soit $F(V)$ le fibré induit par F sur V, et, pour tout entier $k \geqslant 1$, $F^k(V)$ la puissance tensorielle k-ième de ce fibré. Notons $S_k(V)$ l'espace vectoriel des sections holomorphes du fibré $F^k(V)$. Pour interpréter ces sections, introduisons, pour chaque entier i tel que $0 \leqslant i \leqslant N$, l'ouvert V_i de V, image de l'ouvert W_i formé des points de W, où la i-ième coordonnée x_i est $\neq 0$; une section holomorphe est définie par un système de fonctions φ_i (φ_i holomorphe dans V_i) telles que, dans $U_i \cap U_j$, on ait

$$\varphi_i(x_i)^k = \varphi_j(x_j)^k .$$

Associons à une telle section la fonction φ, définie sur W, et égale à $\varphi_i(x_i)^k$ dans W_i ; la fonction φ est holomorphe sur W en tout point autre que l'origine 0 (sommet du cône W), et est homogène de degré k (i.e. : $\varphi(\lambda x) = \lambda^k \varphi(x)$ pour $x \in W$, $x \neq 0$, $\lambda \neq 0$). Réciproquement, toute φ holomorphe sur $W - \{0\}$ et homogène de degré k, définit une section holomorphe du fibré $F^k(V)$ (prendre $\varphi_i = \varphi/(x_i)^k$). Observons que la somme directe $S(V) = \sum_{k \geqslant 0} S_k(V)$ est munie d'une structure d'algèbre, et que la correspondance précédente est un isomorphisme de cette algèbre $S(V)$ sur l'algèbre des fonctions holomorphes sur $W - \{0\}$ et homogènes de tous les degrés.

PROPOSITION 7. - Lorsque V est la variété projective associée à une algèbre projective normale A, la correspondance précédente établit un isomorphisme entre l'algèbre $S(V)$ et l'algèbre A.

DÉMONSTRATION. - Tout élément de A_k définit sur W une fonction holomorphe, homogène de degré k ; car si un tel élément a s'exprime comme polynôme homogène $P(a_0 , \ldots , a_N)$, de degré k, par rapport aux éléments $a_0 , \ldots a_N$ d'une base de A_1, alors a induit sur W la même fonction que le polynôme $P(x_0 , \ldots , x_N)$ des coordonnées x_i de l'espace ambiant C^{N+1}. Il reste à montrer ceci : toute f holomorphe sur $W - \{0\}$, et homogène de degré k, est induite par un polynôme homogène de degré k.

Or, à cause de l'homogénéité, une telle f se prolonge par continuité à l'origine, avec $f(0) = 0$. Ainsi prolongée, f est induite, au voisinage de l'origine, par une fonction g holomorphe à l'origine dans l'espace ambiant, et ceci parce que W est un sous-ensemble analytique normal au point 0 (on admet le résultat classique : la normalité analytique équivaut à la normalité algébrique). Soit $g = \sum_{h \geqslant 0} g_h$ le développement de g en série de polynômes homogènes, au voisinage de 0. Par une homothétie de rapport $\lambda \neq 0$, on trouve

$$f = \sum_{h \geqslant 0} \lambda^{h-k} g_h \quad \text{sur } W .$$

Par différence, on voit que $\sum_h \lambda^{h-k} g_h$ s'annule sur W (la sommation étant étendue à tous les $h \neq k$). Comme W est un cône, si une fonction s'annule sur W, il en est de même de chacun des polynômes homogènes de son développement de Taylor. Donc, ici, on trouve que $g_h = 0$ sur W pour tout $h \neq k$, et par suite $g = g_k$ sur W, ce qui achève la démonstration.

5. Enoncé du théorème fondamental.

Nous noterons désormais X l'espace de Siegel $\mathfrak{S}_n$, et X^* l'espace complété $\mathfrak{S}_n^*$, dans lequel opèrent tous les groupes commensurables au groupe modulaire. Si Γ désigne n'importe lequel de ces groupes, on sait que X/Γ est un espace analytique normal, et on a défini sur X^*/Γ une structure annelée qui prolonge celle de X/Γ et dont on a prouvé (exposé 15) que c'est une structure d'espace analytique normal.

Définissons une algèbre graduée H comme suit : H_o se réduit aux scalaires, et, pour chaque $k > 0$, H_k est l'espace vectoriel des fonctions holomorphes dans X (pour $n = 1$, on modifie cette définition : H_k désigne alors l'espace des fonctions holomorphes dans le demi-plan $y > 0$ de la variable complexe $z = x + iy$, et qui ont une limite finie quand $y \longrightarrow + \infty$). Faisons opérer le groupe $S_p(n , \mathbb{R})$ dans l'algèbre H , comme suit : pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, posons $J_M(z) = \det(cz + d)^2$; et pour chaque entier $k > 0$, faisons opérer

$$M \in Sp(n , \mathbb{R})$$

en transformant la fonction $f(z) \in H_k$ en

$$J_M(z)^{-k} f(M . z) \in H_k .$$

Alors $Sp(n , \mathbb{R})$ opère bien par des automorphismes de l'algèbre graduée H . Pour tout groupe Γ commensurable à $Sp(n , \mathbb{Z})$, notons $A(\Gamma)$ l'algèbre graduée des éléments de H invariants par Γ . Pour tout $k > 0$, l'espace vectoriel $A_k(\Gamma)$ des éléments de degré k n'est autre que l'espace des formes automorphes (holomorphes) de poids k sur X , avec la restriction (pour $n = 1$) qu'il s'agit seulement des formes automorphes f qui ont une limite finie quand $y \longrightarrow + \infty$ (pour $n = 1$, cette restriction équivaut à supposer que $|f(z)|$ est borné pour $y \geqslant 1$).

Observons que H est un anneau d'intégrité, car le produit d'une $f \in H_k$ et d'une $g \in H_h$ ne peut être nul que si f ou g est nulle (puisque l'espace X est une variété analytique connexe). De plus, H est intégralement clos : en effet, d'après la proposition 1, il suffit de vérifier que si le quotient d'un élément de H_k par un élément de H_h est entier sur H , il est dans H_{k-h} ; or cela revient à dire que l'algèbre des fonctions holomorphes dans X est intégralement close, ce qui est vrai puisque X est une variété analytique complexe, connexe. Il faut examiner à part le cas où $n = 1$, et vérifier que si une fonction holomorphe f dans le demi-plan $y > 0$ est entière sur l'algèbre des fonctions holomorphes qui ont une limite finie pour $y \longrightarrow + \infty$, alors f

a une limite pour $y \longrightarrow +\infty$ (ce qui est immédiat).

On sait que si un groupe G opère dans un anneau intégralement clos A, le sous-anneau B des éléments invariants par G est intégralement clos (en effet, soient b et b' invariants par G, avec $b' \neq 0$; si b/b' est entier sur B, il est entier sur A, donc est dans A, et comme b/b' est G-invariant, c'est un élément de B). Ici, pour tout groupe Γ commensurable au groupe modulaire, l'algèbre $A(\Gamma)$ est donc intégralement close.

On se propose d'établir le théorème fondamental :

THÉORÈME FONDAMENTAL. - Soit Γ un groupe commensurable au groupe modulaire. Alors l'algèbre graduée $A(\Gamma)$ des formes Γ-automorphes est de type fini. De plus, il existe un entier d jouissant des propriétés suivantes :

a. l'algèbre $A^{(d)}(\Gamma)$ est une algèbre projective normale ;

b. les éléments de $A_d(\Gamma)$ (formes Γ-automorphes de poids d) n'ont aucun zéro commun dans X, et l'application f de X dans l'espace projectif, définie par le choix d'une base de l'espace vectoriel $A_d(\Gamma)$, induit un isomorphisme de l'espace analytique X/Γ sur un ouvert de Zariski U de la variété algébrique $V(A^{(d)}(\Gamma))$. Cet isomorphisme se prolonge par continuité en un isomorphisme de X^*/Γ sur $V(A^{(d)}(\Gamma))$.

6. Démonstration du théorème fondamental dans le cas où Γ est le groupe modulaire $Sp(n, \mathbb{Z})$.

Dans ce numéro, Γ désigne $Sp(n, \mathbb{Z})$. Rappelons que l'opérateur Φ (cf. exposé 4, théorèmes 2 et 3 ; et exposé 14) associe à tout forme automorphe pour $Sp(n, \mathbb{Z})$ une forme automorphe pour $Sp(r, \mathbb{Z})$, et ceci pour tout entier $r < n$. On en déduit : X étant supposé réalisé par l'espace de Siegel $\mathfrak{S}_n$, et $\mathfrak{S}_r$ étant identifié (cf. exposé 12, p. 14) à un sous-espace de la frontière de $\mathfrak{S}_n$, la propriété suivante a lieu. Si $f(z)$ est une forme automorphe (pour $Sp(n, \mathbb{Z})$) de poids k dans $\mathfrak{S}_n$, alors $(\det z)^{2k} f(z)$ tend vers une limite lorsque z tend vers un point z' de $\mathfrak{S}_r$ suivant la topologie de l'espace X^* (topologie $\mathcal{T}^{\Gamma}$ définie page 17 de l'exposé 12) ; la fonction limite ainsi obtenue s'écrit $(\det z')^{2k} g(z')$, pour $z' \in \mathfrak{S}_r$, et g est une forme automorphe de poids k sur $\mathfrak{S}_r$. Posons $g = \Phi^n_r(f)$.

On va d'abord établir le résultat suivant :

PROPOSITION 8. - Il existe un système fini de formes automorphes f_i d'un

<u>même poids</u> d , <u>jouissant des propriétés suivantes</u> : <u>les</u> f_i <u>n'ont aucun zéro commun dans</u> $X = \mathfrak{S}_n$, <u>et</u>, <u>pour chaque entier</u> $r < n$, <u>les</u> $\Phi^n_r(f_i)$ <u>n'ont aucun zéro commun dans</u> $\mathfrak{S}_r$. <u>De plus</u>, <u>l'application</u> f <u>de</u> X^*/Γ <u>dans l'espace projectif</u>, <u>définie par les</u> f_i , <u>est une application holomorphe injective</u>.

La démonstration qu'on va donner est pratiquement celle de W. L. BAILY (Satake's compactification of V_n , à paraître à l'Amer. J. Math ; mémoire déjà cité dans l'exposé 11).

On va procéder par récurrence sur n , la proposition étant triviale pour $n = 0$. Supposons-la prouvée pour $n - 1$ $(n \geqslant 1)$. Il existe donc un système fini de formes $Sp(n - 1 , \underset{\sim}{Z})$-automorphes de poids d , dans $\mathfrak{S}_{n-1}$, qui définissent une application holomorphe injective de $\mathfrak{S}^*_{n-1}/Sp(n - 1 , \underset{\sim}{Z})$ dans un espace projectif. Pour tout entier $k \geqslant 1$, les monômes de degré k par rapport aux f_i définissent aussi une application holomorphe injective de $\mathfrak{S}^*_{n-1}/Sp(n - 1 , \underset{\sim}{Z})$ dans un espace projectif. Or, d'après un théorème de Maass (cf. exposé 16), l'application Φ^n_{n-1} est <u>surjective</u> pour les poids assez grands. Donc, pour k assez grand, les monômes de degré k par rapport aux f_i sont induits par des formes automorphes sur $\mathfrak{S}_n$, de poids kd .

Ainsi, écrivant de nouveau d au lieu de kd , on voit qu'il existe un système fini de formes automorphes f_i sur $\mathfrak{S}_n = X$, de même poids d , telles que les fonctions $(\det z)^{2d} f_i(z)$, prolongées par continuité, définissent une application holomorphe injective de $\mathfrak{S}^*_{n-1}/Sp(n - 1 , \underset{\sim}{Z})$ dans l'espace projectif. Alors les zéros communs aux f_i , dans $\mathfrak{S}_n = X$, forment un ensemble, invariant par $Sp(n , \underset{\sim}{Z}) = \Gamma$, dont l'image dans X/Γ est <u>relativement compacte</u>. Or on sait (exposé 10 bis) que pour tout point z de X il existe une forme automorphe de poids k , non nulle en ce point, pourvu que k soit un multiple assez grand d'un entier convenable (la condition relative à k étant indépendante du point z considéré). Par un argument de compacité, on voit qu'on peut adjoindre aux f_i un système fini de formes automorphes ayant pour poids un même multiple du poids d des f_i , de façon que les f_i et les g_j n'aient aucun zéro commun dans X . Remplaçant à nouveau les f_i par des monômes d'un degré convenable en les f_i , on voit qu'il existe un système fini de formes automorphes d'un même poids qui définissent une application holomorphe de X^*/Γ dans l'espace projectif.

Notons à nouveau f_i ces formes, et d leur poids commun. Soit $f : X^*/\Gamma \longrightarrow P_N$ l'application qu'elles définissent. Cette application n'est peut-être pas injective ;

autrement dit, soit Δ_f l'image réciproque de la diagonale de $P_N \times P_N$ par l'application

$$f \times f : X^*/\Gamma \times X^*/\Gamma \longrightarrow P_N \times P_N ;$$

Δ_f contient la diagonale mais contient peut-être d'autres points. Toutefois, on sait déjà que l'intersection de Δ_f avec $(X^* - X)/\Gamma \times (X^* - X)/\Gamma$ se réduit à la diagonale de cet espace, puisqu'on a utilisé l'hypothèse de récurrence pour $n - 1$. Soit (a , b) un point de Δ_f tel que $a \neq b$; ou bien a et b sont tous deux dans X/Γ, ou bien l'un des points (a par exemple) appartient à X/Γ et l'autre à $(X^* - X)/\Gamma$. Dans le premier cas, soient x et y deux points de X ayant respectivement a et b pour images ; il existe (d'après l'exposé 10 bis) une forme automorphe non nulle en x et nulle en y, et dont le poids est un multiple du poids d des f_i ; en adjoignant cette forme à des monômes convenables par rapport aux f_i, on obtient une application holomorphe g de X^*/Γ dans un espace projectif, pour laquelle Δ_g est contenu dans Δ_f, avec $(a , b) \notin \Delta_g$. Dans le second cas, on sait qu'il existe une Spitzenform non nulle au point x (cf. exposé 10) ; en l'adjoignant à des monômes convenables par rapport aux f_i, on obtiendra encore une application holomorphe g de X^*/Γ dans un espace projectif, telle que les images $g(a)$ et $g(b)$ soient distinctes.

Ainsi à chaque application holomorphe f de X^*/Γ dans un espace projectif (application définie par un système fini de formes automorphes de même poids), on peut associer une autre application holomorphe g, du même type, et telle que Δ_g soit contenu dans Δ_f et distinct de Δ_f, pourvu toutefois que Δ_f soit distinct de la diagonale. Or les Δ_f sont des sous-ensembles analytiques de l'espace analytique <u>compact</u> X^*/Γ. Donc toute suite décroissante de tels ensembles est stationnaire. Il résulte de là qu'on peut choisir l'application f de manière que Δ_f soit réduit à la diagonale. Autrement dit, l'application f sera injective ; et la proposition 8 est démontrée.

Avec les notations de la proposition 8, soit A la sous-algèbre (graduée) de $A(\Gamma)$ engendrée par les formes f_i, de poids d, qui définissent l'application holomorphe injective f de X^*/Γ dans l'espace projectif. (On peut supposer les f_i linéairement indépendantes). A est une algèbre projective, qui définit canoniquement une sous-variété algébrique $V(A)$ du même espace projectif P_N. Montrons que $V(A)$ <u>est exactement l'image de</u> X^*/Γ <u>par l'application</u> f. On sait que l'image de f est un sous-ensemble analytique V' de P_N (parce que d'une part l'application f est injective, d'autre part l'espace analytique X^*/Γ est compact) ; c'est donc un sous-ensemble algébrique (théorème de Chow), évidemment contenu dans $V(A)$. Si V' était distinct de $V(A)$, il existerait un polynôme homogène P par rapport aux coordonnées homogènes de P_N , qui serait identiquement nul sur V' mais non sur $V(A)$; $P(f_i)$ serait une forme automorphe nulle sur X , donc serait l'élément 0 de l'anneau $A(\Gamma)$, et par suite P appartiendrait à l'idéal des relations entre les générateurs de l'anneau A engendré par les f_i ; autrement dit, P serait identiquement nul sur $V(A)$. Contradiction.

Considérons maintenant la clôture intégrale A' de l'anneau $\mathbf{A}$ ci-dessus ; A' est contenu dans $A^{(d)}(\Gamma)$, puisque $A(\Gamma)$ est intégralement clos. D'autre part A' est une algèbre de type fini ; donc (corollaire de la proposition 4) il existe un entier d' multiple de d , tel que la sous-algèbre $A'^{(d')}$ (qui est intégralement close) soit une algèbre projective. Les éléments d'une base de $A_{d'}$ définissent évidemment une application injective de X^*/Γ dans l'espace projectif ; il en sera de même, a fortiori, des éléments d'une base de $A'_{d'}$. Ecrivant à nouveau d au lieu de d' , et A au lieu de A' , on a démontré :

PROPOSITION 9. - <u>Il existe un système fini de formes automorphes d'un même poids</u> d , <u>qui définissent une application holomorphe injective</u> f <u>de</u> X^*/Γ <u>dans</u> <u>l'espace projectif</u>, <u>de manière à satisfaire en outre aux conditions suivantes</u> :

1. <u>la sous-algèbre</u> A <u>de</u> $A(\Gamma)$ <u>engendrée par les</u> f_i <u>est intégralement close</u> ;

2. <u>l'application</u> f <u>est une bijection de</u> X^*/Γ <u>sur la variété projectivement normale</u> $V(A)$, <u>et cette bijection est un isomorphisme pour les structures d'espace analytique</u>.

(La dernière assertion résulte d'un lemme connu : toute bijection holomorphe d'un espace analytique normal sur un espace analytique normal est un isomorphisme pour les structures d'espace analytique).

On va maintenant prouver :

PROPOSITION 10. - <u>Les</u> f_i <u>étant choisies comme dans la proposition</u> 9, <u>toute forme automorphe dont le poids est multiple de</u> d <u>s'exprime comme polynôme par rapport aux</u> f_i . <u>Autrement dit, l'algèbre</u> A <u>engendrée par les</u> f_i <u>n'est autre que l'algèbre</u> $A^{(d)}(\Gamma)$.

DÉMONSTRATION. - Soit $V = V(A)$ la variété projective définie par l'algèbre projective A . Notons, comme au paragraphe 4, $S_k(V)$ l'espace vectoriel des sections holomorphes du fibré $F^k(V)$. On va voir que $S_k(V)$ s'identifie à l'espace vectoriel $A_{kd}(\Gamma)$ de toutes les formes automorphes de poids kd sur l'espace X.

L'isomorphisme f de X^*/Γ sur V défini par les fonctions automorphes f_i (qui engendrent la sous-algèbre A de $A(\Gamma)$) applique X/Γ sur un ouvert U de V, dont le complémentaire est un sous-espace analytique de codimension (complexe) au moins égale à 2 (sauf si $n = 1$). Comme au paragraphe 4, soit V_i l'ouvert de V formé des points où la i-ième coordonnée homogène de l'espace projectif est $\neq 0$; alors $V_i \cap U$ est l'image des points de X où la fonction f_i est $\neq 0$. Soit φ une forme automorphe de poids kd ; alors $\varphi/(f_i)^k$ est invariante par le groupe modulaire Γ, donc définit une fonction holomorphe φ_i dans $V_i \cap U$. Puisque U est de codimension complexe $\geqslant 2$, φ_i se prolonge en une fonction holomorphe dans tout V_i, d'après un théorème classique de Hartogs. Ce raisonnement n'est pas valable pour $n = 1$; mais dans ce cas le complémentaire de $V_i \cap U$ dans V_i est vide ou réduit à un point, et s'il se compose d'un point φ_i est continue en ce point (parce que, par hypothèse, φ a une limite quand la partie imaginaire y de $z \in X$ tend vers $+\infty$, et f_i a une limite $\neq 0$). Ainsi, dans tous les cas, φ_i se prolonge en une fonction holomorphe (notée encore φ_i) dans V_i. De plus, dans $V_i \cap V_j$, on a $\varphi_i(f_i)^k = \varphi_j(f_j)^k$; autrement dit, le système des φ_i définit bien une section holomorphe du fibré $F^k(V)$. Réciproquement, il est évident que si on a une section holomorphe du fibré $F^k(V)$, les $\varphi_i(f_i)^k$ définissent sur X une forme automorphe de poids k.

Appliquant maintenant la proposition 7, on obtient la présente proposition 10.

Pour achever de démontrer le théorème fondamental dans le cas où Γ est le groupe modulaire $Sp(n, \mathbb{Z})$, il reste à montrer que l'algèbre $A(\Gamma)$ est de type fini. On sait déjà qu'il existe un entier d tel que la sous-algèbre $A^{(d)}(\Gamma)$ soit une algèbre projective. Il suffira donc de montrer :

PROPOSITION 11. - $A(\Gamma)$ est un module de type fini sur l'algèbre $A^{(d)}(\Gamma)$, l'entier d étant choisi comme dans la proposition 9.

DÉMONSTRATION. - Soit $f : X^*/\Gamma \longrightarrow P_N$ l'application de la proposition 9 ; elle induit une application holomorphe $f : X \longrightarrow V$, V désignant la variété algébrique projective, image de f. Considérons sur l'espace V, le faisceau $\mathcal{F}_h$ des germes de formes automorphes (holomorphes) de poids h : dans chaque ouvert U de V, les sections de $\mathcal{F}_h$ sont, par définition, les formes automorphes de poids h qui sont définies et holomorphes dans l'ouvert $f^{-1}(U)$ de l'espace X. Dans le cas où $n = 1$, on suppose en outre que les formes automorphes considérées ont une limite finie lorsque $y = \mathrm{Im}(z)$ tend vers $+\infty$ (au cas où l'image du point à l'infini est dans U). On peut montrer (cf. Appendice) que le faisceau $\mathcal{F}_h$ est un faisceau analytique <u>cohérent</u> sur l'espace analytique V, et ceci pour tout entier $h \geqslant 1$. Observons que l'espace des sections de $\mathcal{F}_h$ n'est autre que $A_h(\Gamma)$.

En raisonnant alors comme SERRE (Séminaire Cartan, t. 6, 1953/54, exposé 20, p. 11-13), on obtient précisément la proposition 11 ci-dessus.

7. Démonstration du théorème fondamental dans le cas général.

Il s'agit de prouver le théorème du paragraphe 5 pour tout groupe Γ commensurable au groupe modulaire $Sp(n, \mathbb{Z})$. Pour cela, considérons les groupes pour lesquels il est vrai ; il suffira de prouver :

PROPOSITION 12. - *Soient deux groupes Γ et Γ', Γ' étant un sous-groupe d'indice fini de Γ. Si le théorème est vrai pour Γ', il est vrai pour Γ ; s'il est vrai pour Γ, il est vrai pour Γ'.*

En fait, il suffit de prouver cela lorsque Γ' est un sous-groupe <u>invariant</u>, d'indice fini, de Γ. En effet, dans le cas général, soit Γ'' l'intersection des conjugués de Γ' dans Γ ; Γ'' est un sous-groupe invariant de Γ et de Γ', d'indice fini. Supposons le théorème vrai pour Γ' ; alors il l'est pour Γ'', et étant vrai pour Γ'' il l'est pour Γ. De même, si le théorème est vrai pour Γ, il l'est pour Γ'', et l'étant pour Γ'' il l'est pour Γ'.

Il reste donc à démontrer la proposition 12 lorsque Γ' est un sous-groupe invariant de Γ, d'indice fini. Soit G le groupe-quotient Γ/Γ' ; G est un groupe fini qui opère dans l'algèbre $A(\Gamma')$, et $A(\Gamma)$ est la sous-algèbre des éléments G-invariants de $A(\Gamma')$. On peut donc appliquer les propositions 5 et 6, en posant $A = A(\Gamma')$, $B = A(\Gamma)$. Cela étant :

1. Supposons que le théorème soit vrai pour Γ'. L'algèbre graduée $A(\Gamma')$ est donc de type fini ; par suite l'algèbre $A(\Gamma)$ est de type fini (proposition 5, (i)). D'après la proposition 4, il existe un entier d tel que $A^{(d)}(\Gamma)$ et $A^{(d)}(\Gamma')$ soient des algèbres projectives ; et l'on peut choisir d de manière que les éléments d'une base de l'espace vectoriel $A_d(\Gamma')$ n'aient aucun zéro commun dans X et définissent un isomorphisme f' de X^*/Γ' sur la variété algébrique projectivement normale $V(A^{(d)}(\Gamma'))$ (en effet, par hypothèse, le théorème

à démontrer est vrai pour le groupe Γ'). L'application f' est évidemment compatible avec les opérations du groupe G dans X^*/Γ' et dans $V(A^{(d)}(\Gamma'))$; G laisse stables le sous-espace X/Γ' et l'ouvert U', image par f' de X/Γ' dans $V(A^{(d)}(\Gamma'))$. Par suite f' induit un isomorphisme f de X^*/Γ (quotient de X^*/Γ' par G) sur $V(A^{(d)}(\Gamma))$ (qui est le quotient de $V(A^{(d)}(\Gamma')$ par G, en vertu de la proposition 6). Il est clair que f applique X/Γ sur l'ouvert U de $V(A^{(d)}(\Gamma))$, quotient de U' par G ; d'où une application holomorphe de X/Γ dans l'espace projectif, application qui est visiblement définie par les formes Γ-automorphes de degré d. Ceci prouve que ces formes n'ont aucun zéro commun dans X, et que le plongement projectif de X/Γ qu'elles définissent se prolonge par continuité en un plongement projectif de X^*/Γ, lequel définit un isomorphisme de X^*/Γ sur la variété $V(A^{(d)}(\Gamma))$. Le théorème est donc vrai pour le groupe Γ.

2. Supposons le théorème vrai pour le groupe Γ. L'algèbre graduée $A(\Gamma)$ est donc de type fini ; par suite l'algèbre $A(\Gamma')$ est de type fini (proposition 5, (ii)). D'après la proposition 4, il existe un entier d tel que $A^{(d)}(\Gamma)$ et $A^{(d)}(\Gamma')$ soient des algèbres projectives ; et l'on peut choisir d de manière que les éléments d'une base de l'espace vectoriel $A_d(\Gamma)$ définissent un isomorphisme f de X^*/Γ sur la variété projectivement normale $V(A^{(d)}(\Gamma))$. Puisque les fonctions de $A_d(\Gamma)$ n'ont aucun zéro commun dans X, il en est de même, a fortiori, des fonctions de $A_d(\Gamma')$, qui contient $A_d(\Gamma)$. Soit f' l'application de X/Γ' dans l'espace projectif, définie par les éléments d'une base de $A_d(\Gamma')$. L'application f' est évidemment compatible avec les opérations du groupe G ; l'image de f' est contenue dans la variété $V(A^{(d)}(\Gamma'))$, et c'est un ouvert de Zariski U' de cette variété algébrique. Le diagramme suivant est évidemment commutatif

$$\begin{array}{ccc} X/\Gamma' & \xrightarrow{f'} & U' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X/\Gamma & \xrightarrow{f} & U \end{array} .$$

Il en résulte aussitôt que l'application f' est injective ; c'est donc un isomorphisme de l'espace analytique normal X/Γ sur U. De plus, puisque l'espace X^*/Γ' est normal, l'application holomorphe f' se prolonge par continuité en un isomorphisme de X^*/Γ' sur $V(A^{(d)}(\Gamma'))$. Le théorème est donc vrai pour le groupe Γ'.

Ainsi la proposition 12 est établie, et par suite le théorème fondamental est établi dans tous les cas.

APPENDICE

Dans la démonstration de la proposition 11, on a considéré le faisceau $\mathcal{F}_h$ des formes Γ-automorphes de poids h, qui est un faisceau sur l'espace analytique normal X^*/Γ, comme suit : pour tout ouvert U de X^*/Γ, on considère les formes automorphes de poids h dans l'ouvert de X, image réciproque de U par l'application naturelle $p : X \longrightarrow X^*/\Gamma$. (Pour $n = 1$, on ne considère que les formes automorphes qui ont une limite à l'infini). On veut démontrer ici que $\mathcal{F}_h$ est un faisceau analytique cohérent sur X^*/Γ. La démonstration vaut pour tout sous-groupe discret Γ de $Sp(n, \underset{\sim}{R})$.

La question étant de nature locale, il suffit de montrer que, sur tout ouvert U assez petit, le faisceau $\mathcal{F}_h$ est cohérent. Choisissons une forme automorphe f_o dans $p^{-1}(U)$, non identiquement nulle (ce qui est possible si U est assez petit). Les formes automorphes dans $p^{-1}(U)$ sont alors les fonctions f holomorphes dans $p^{-1}(U)$, telles que f/f_o soit une fonction méromorphe invariante par Γ ; f/f_o induit donc une fonction méromorphe φ dans $U \cap (X/\Gamma)$, et celle-ci se prolonge en une fonction méromorphe dans U, en vertu d'un théorème de Hartogs (parce que $(X^* - X)/\Gamma$ est un sous-espace analytique de X^*/Γ, de codimension complexe ≥ 2). Ce raisonnement doit être modifié dans le cas où $n = 1$, mais la conclusion reste valable, car dans ce cas on a fait des hypothèses restrictives sur les formes automorphes considérées.

Réciproquement, soit φ une fonction méromorphe dans U ; alors le produit de f_o et $\varphi \circ p$ est une forme automorphe dans $p^{-1}(U)$, et pour qu'elle soit holomorphe, il faut et il suffit que, aux points "réguliers" de $U \cap (X/\Gamma)$, le diviseur de φ soit $\geq$ au diviseur de f_o. (Dans le cas $n = 1$, il y a en outre une condition à l'infini).

On est ainsi amené à étudier avec précision la notion de diviseur sur un espace analytique normal V, et à montrer que le faisceau des germes de fonctions méromorphes dont le diviseur, en chaque point, est $\geq$ au germe de diviseur défini par un diviseur donné D sur V, est un faisceau analytique cohérent.

Soit V un espace analytique normal, et soit S un sous-espace analytique, de codimension (complexe) ≥ 2, tel que les points de $V - S$ soient réguliers (i.e. : $V - S$ est une variété analytique complexe). Tout sous-ensemble analytique E de $V - S$, de codimension 1, se prolonge en un sous-ensemble analytique E' de V, de codimension 1, grâce au théorème de Remmert et Stein cité dans l'exposé 12 :

E' est l'adhérence de E dans V. Les composantes irréductibles (au sens global) de E' dans V coupent $V - S$ suivant les composantes irréductibles de E dans $V - S$, et elles sont leurs adhérences. On sait qu'un diviseur, dans la variété analytique complexe $V - S$, est défini par la donnée d'un ensemble analytique E de codimension 1, (appelé support du diviseur), et, pour chaque composante irréductible de E, d'un entier (positif ou négatif). Il revient au même de se donner, dans V, un ensemble analytique E' de codimension 1, et d'affecter chacune de ses composantes irréductibles (dans V) d'un entier (positif ou négatif). Une telle donnée définit, par convention, un <u>diviseur</u> dans V et E' s'appelle son support. On voit qu'un diviseur dans $V - S$ définit un diviseur dans V, et réciproquement. On a une notion évidente de <u>germe de diviseur</u> en un point de V (même si ce point appartient à S).

Soit φ une fonction méromorphe dans V ; elle définit un diviseur dans $V - S$, donc un diviseur dans V ; on le note (φ). Etant donné un diviseur D dans V, on peut donc parler du faisceau $\mathcal{F}(D)$ des germes de fonctions méromorphes qui, en chaque point de V, définissent un germe de diviseur $\geqslant D$ (ou, plus exactement, $\geqslant$ au germe de diviseur défini par D). On va prouver :

LEMME. - <u>Le faisceau</u> $\mathcal{F}(D)$ <u>est cohérent</u>.

DÉMONSTRATION. - On peut se borner au cas où D est un <u>diviseur positif</u>, car; au voisinage d'un point de D, il existe une g holomorphe non identiquement nulle qui s'annule identiquement sur le support de D (puisque celui-ci est un sous-ensemble analytique) ; si l'entier k est assez grand, le diviseur $D + (g^k)$ est positif dans le voisinage considéré.

Soit donc D un diviseur <u>positif</u>. Au voisinage d'un point de V, D est la somme d'un nombre fini de diviseurs positifs D_i dont les supports sont irréductibles ; il suffit de montrer que les faisceaux $\mathcal{F}(D_i)$ sont cohérents (car on sait que l'intersection d'un nombre fini de faisceaux cohérents est un faisceau cohérent). Soit donc D un diviseur positif dont le support Y est irréductible, et soit k $(k > 0)$ son ordre de multiplicité : dans tout ouvert U, les sections de $\mathcal{F}(D)$ sont les fonctions holomorphes qui s'annulent, en tout point de Y situé dans $U - (U \cap S)$, avec l'ordre de multiplicité k. Ce sont donc les sections du faisceau I^k, en désignant par I le faisceau (sur V) des germes de fonctions qui s'annulent sur Y. Puisque Y est un sous-ensemble analytique, on sait que le faisceau I est cohérent ; donc I^k est cohérent, et ceci achève la démonstration.