Ichiro Satake

L'opérateur Φ

Séminaire Henri Cartan, tome 10, n° 2 (1957-1958), exp. n° 14, p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1957-1958__10_2_A5_0>

L'OPÉRATEUR Φ,

par Ichiro SATAKE.

L'opérateur Φ a été plusieurs fois l'objet de notre considération (Exposé 4, n° 5 ; Exposé 7, n° 2, n° 4 ; Exposé 8, n° 1) ; mais il y a encore lieu de le compléter, parce que jusqu'ici nous nous sommes limité en principe à la considération des formes modulaires (i.e. formes automorphes relatives à $\Gamma = SL(n, Z)$ définies globalement, c'est-à-dire dans $\mathfrak{S}_n$ tout entier) ; dans cet exposé on se propose de la généraliser au cas des formes automorphes locales relatives à un groupe commensurable quelconque.

On utilisera dans ce qui suit les abréviations que voici :

$$\mathcal{E}(X) = \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(X)) ,$$

$$Y[U] = {}^tU\, Y\, U ,$$

où X, Y sont des matrices carrées et U une matrice quelconque telle que ${}^tU\, Y\, U$ ait un sens.

1. Le développement en série de Fourier des formes automorphes locales.

Soient Γ' un groupe commensurable au groupe modulaire, ρ une représentation holomorphe irréductible de $GL(n, \underset{\sim}{C})$ dans un espace vectoriel complexe F_ρ de dimension finie et μ un multiplicateur de Γ' (i.e. une représentation de Γ' dans un espace F_μ de dimension finie, représentation dont le noyau est supposé d'indice fini dans Γ') ; soit de plus U_n un ouvert Γ'-saturé dans $\mathfrak{S}_n$.

On appelle f une forme automorphe locale d'espèce (μ, ρ) pour Γ' dans U_n, si f est une fonction holomorphe définie dans U_n, à valeurs dans $\operatorname{Hom}(F_\mu, F_\rho)$, vérifiant la condition

$$f(M.Z) = \rho(CZ + D) \circ f(Z) \circ \mu(M)^{-1} \tag{1.1}$$

pour toute $M \in \Gamma'$; on désigne par $\mathfrak{H}_{\Gamma, U_n}(\mu, \rho)$ l'espace vectoriel formé de toutes ces fonctions.

Soit U un ouvert Γ'-saturé dans $\mathfrak{S}_n^*$ et soient

$$U_r = U \cap \mathfrak{S}_r , \quad \Gamma'_r = \varpi_r(\Gamma' \cap \mathfrak{G}_r^n) \quad (0 \leq r \leq n) ;$$

alors il est clair que U_r est Γ'_r-saturé (on notera que, pour U_n donné, il y a un plus grand ouvert U dans $\mathfrak{S}_n^*$ tel que $U \cap \mathfrak{S}_n = U_n$, et que cet U est Γ'-saturé) ; on se propose de définir un opérateur Φ_r^n pour $r < n$ tel que $U_r \neq \emptyset$, qui applique $\mathfrak{H}_{\Gamma', U_n}(\mu, \rho)$ dans $\mathfrak{H}_{\Gamma'_r, U_r}(\mu^{(r)}, \rho^{(r)})$, où $\rho^{(r)}$ est une représentation de $GL(r, \mathbb{C})$ déjà définie (voir n° 2), et où $\mu^{(r)}$ est un multiplicateur de Γ'_r que l'on définira plus tard.

Soit $Z_o \in U_r$; il est clair que Z_o possède un voisinage U' , contenu dans U , au sens de $\mathcal{C}_o^{\Gamma}$, tel que $U' \cap U_n$ soit stable par <u>toutes</u> les translations de la forme

$$Z \longrightarrow Z + T , \quad T = \begin{pmatrix} 0 & T_{12} \\ {}^tT_{12} & T_2 \end{pmatrix} , \quad T_2 = {}^tT_2 , T_{12} , T_2 \ : \text{réelles.}$$

(prendre, par exemple, $U' = \bigcup_{r \leq s \leq n} \Gamma V^{(s)}(U'_r , K))$. D'autre part, on a

$$\Gamma' \cap \mathfrak{G}_r^n \supset \Gamma'_{Z_o} \supset \Gamma' \cap \mathfrak{M}_r^n$$

et ce dernier, étant commensurable à $\Gamma \cap \mathfrak{M}_r^n$, contient toutes les transformations de la forme suivante

(i) $$Z \longrightarrow Z[U] , \quad U = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} , \quad U_2 \in \gamma'_{n-r} ,$$

(γ'_{n-r} : un sous-groupe d'indice fini de $\gamma_{n-r} = SL(n - r , \mathbb{Z})$)

(ii) $$Z \longrightarrow Z[U] , \quad U = \begin{pmatrix} E_r & U_{12} \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix} , \quad U_{12} \equiv 0 \pmod q ,$$

(q : un entier positif)

(iii) $$Z \longrightarrow Z + T , \quad T = \begin{pmatrix} 0 & T_{12} \\ {}^tT_{12} & T_2 \end{pmatrix} , \quad T_2 = {}^tT_2 , T_{12} , T_2 \equiv 0 \pmod q ;$$

on peut supposer de plus que la représentation μ est triviale pour toutes ces transformations.

Soit $f \in \mathfrak{H}_{\Gamma', U_n}(\mu, \rho)$. Alors d'après (1.1) on a , en particulier,

$$f(Z + T) = f(Z)$$

pour toutes les translations (iii) ; de sorte que $f(Z)$ possède des développements en série de Fourier dans $U' \cap U_n$ comme suit :

$$(1.2) \qquad f(Z) = \sum_{S_2} a_{S_2}(Z_1 , Z_{12}) \quad \mathcal{E}(S_2 Z_2) \quad ,$$

$$(1.2)' \qquad f(Z) = \sum_{S_2, S_{12}} b_{S_2,S_{12}}(Z_1) \quad \mathcal{E}({}^tS_{12} Z_{12} + S_2 Z_2) \quad ,$$

où les sommations sont étendues à toutes les matrices S_2 ou (S_2 , S_{12}) dont les coefficients sont dans $\frac{1}{q}\mathbb{Z}$, et où $a_{S_2}(Z_1 , Z_{12})$, $b_{S_2,S_{12}}(Z_1)$ sont des fonctions holomorphes de (Z_1 , Z_{12}) ou de Z_1 telles que $Z = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_{12} \\ {}^tZ_{12} & Z_2 \end{pmatrix} \in U' \cap U_n$ (Exposé 4 , n° 2) ; ces séries convergent normalement sur tout compact dans $U' \cap U_n$.

Cela posé, on va étudier les propriétés des coefficients $a_{S_2}(Z_1 , Z_{12})$, $b_{S_2,S_{12}}(Z_1)$ de ces développements. D'abord on se donne une transformation de $\Gamma'' \cap \mathfrak{M}_r^n$:

$$M : Z \longrightarrow Z[U] + T , \quad U = \begin{pmatrix} E_r & U_{12} \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & T_{12} \\ {}^tT_{12} & T_2 \end{pmatrix} \quad ,$$

ou plus précisément

$$\begin{cases} Z_1 \longrightarrow Z_1 \\ Z_{12} \longrightarrow Z_{12} U_2 + Z_1 U_{12} + T_{12} \\ Z_2 \longrightarrow Z_2 [U_2] + {}^tU_{12} Z_{12} U_2 + {}^tU_2 \, {}^tZ_{12} U_{12} + Z_1 [U_{12}] + T_2 \end{cases} ;$$

alors pour cette transformation la relation (1.1) s'écrit

$$(1.3) \qquad f(Z[U] + T) = \rho(U)^{-1} \circ f(Z) \circ \mu\left(\begin{pmatrix} {}^tU & TU^{-1} \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix} \right)^{-1} ,$$

et par suite (pour Z suffisamment voisin de Z_0)

$$\sum a_{S_2}(Z_1 , Z_{12} U_2 + Z_1 U_{12} + T_{12}) \quad \mathcal{E}(S_2(Z_2 [U_2] + 2{}^tU_{12} Z_{12} U_2 + Z_1 [U_{12}] + T_2))$$
$$= \sum \rho(U)^{-1} \circ a_{S_2}(Z_1 , Z_{12}) \circ \mu(M)^{-1} \ \mathcal{E}(S_2 Z_2) ,$$

$$\sum b_{S_2,S_{12}}(Z_1)\,\varepsilon({}^tS_{12}(Z_{12}U_2 + Z_1U_{12} + T_{12}) + S_2(Z_2[U_2] + 2{}^tU_{12}Z_{12}U_2 + Z_1[U_{12}]+T_2))$$

$$= \sum \rho(U)^{-1} \circ b_{S_2,S_{12}}(Z_1) \circ \mu(M)^{-1}\,\varepsilon({}^tS_{12}Z_{12} + S_2Z_2)\ ,$$

d'où l'on déduit

(1.4) $$\rho(U)^{-1} \circ a_{S_2[{}^tU_2]}(Z_1\ ,\ Z_{12}) \circ \mu(M)^{-1}$$

$$= a_{S_2}(Z_1\ ,\ Z_{12}U_2 + Z_1U_{12} + T_{12})\,\varepsilon(S_2(Z_1[U_{12}] + 2{}^tU_{12}Z_{12}U_2+T_2))$$

(1.4)' $$\rho(U)^{-1} \circ b_{S_2[{}^tU_2],\ S_{12}{}^tU_2+2U_{12}S_2{}^tU_2}(Z_1) \circ \mu(M)^{-1}$$

$$= b_{S_2,S_{12}}(Z_1)\,\varepsilon({}^tS_{12}(Z_1U_{12} + T_{12}) + S_2(Z_1[U_{12}] + T_2))$$

et, en particulier, pour les transformations (i), (ii), (iii) les relations suivantes

(1.5) $$a_{S_2[{}^tU_2]}(Z_1\ ,\ Z_{12}) = \rho(U) \circ a_{S_2}(Z_1\ ,\ Z_{12}U_2)\ ,$$

(1.6) $$a_{S_2}(Z_1\ ,\ Z_{12} + Z_1U_{12}) = \rho(U)^{-1} \circ a_{S_2}(Z_1\ ,\ Z_{12})\,\varepsilon(-\,S_2(Z_1[U_{12}] + 2{}^tU_{12}Z_{12}))\ ,$$

(1.7) $$a_{S_2}(Z_1\ ,\ Z_{12} + T_{12}) = a_{S_2}(Z_1\ ,\ Z_{12})\ ,$$

ou

(1.5)' $$b_{S_2[{}^tU_2],\ S_{12}{}^tU_2}(Z_1) = \rho(U)\circ b_{S_2,S_{12}}(Z_1)\ ,$$

(1.6)' $$b_{S_2,S_{12}+2U_{12}S_2}(Z_1) = \rho(U) \circ b_{S_2,S_{12}}(Z_1)\,\varepsilon(S_2Z_1[U_{12}] + {}^tS_{12}Z_1U_{12})\ .$$

On dit que S_{12} est un <u>multiple rationnel</u> de S_2 s'il existe une matrice rationnelle W de type $(r\ ,\ n-r)$ telle que $S_{12} = W\,S_2$. Alors une conséquence importante de ces relations et de la convergence des séries ci-dessus est la suivante :

THÉORÈME 1. - <u>Si</u> $n \geq 2$, <u>les coefficients</u> $a_{S_2}(Z_1\ ,\ Z_{12})$ <u>du développement</u> (1.2) <u>sont identiquement nuls lorsque</u> S_2 <u>n'est pas</u> ≥ 0 ; <u>les coefficients</u> $b_{S_2,S_{12}}(Z_1)$ <u>du développement</u> (1.2)' <u>sont identiquement nuls lorsque</u> S_2 <u>n'est</u>

<u>pas</u> $\geqslant 0$ <u>ou</u> S_{12} <u>n'est pas un multiple rationnel de</u> S_2 .

Si $r = 0$ la deuxième assertion du théorème n'a pas de sens et, d'autre part, les relations (1.5)-(1.7) se réduisent à la seule relation

$$a_{S_2[{}^tU_2]} = \rho(U)\, a_{S_2} \quad ;$$

ce cas n'est autre que le théorème de Koecher (Exposé 4 , n° 3 , Théorème 1 ; il faut le généraliser d'une façon évidente).

Soit donc $r > 0$ et supposons que $b_{S_2,S_{12}}(Z)$ ne soit pas identiquement nul. Si $U_{12}\, S_2 = 0$, (1.6)' s'écrit

$$b_{S_2,S_{12}}(Z_1) = \rho(U) \circ b_{S_2,S_{12}}(Z_1)\; \mathcal{E}({}^tS_{12}\, Z_1\, U_{12}) \ ,$$

ce qui exprime que $\mathcal{E}(-\, {}^tS_{12}\, Z_1\, U_{12})$ est une valeur propre de $\rho(U)$; mais comme les valeurs propres sont en nombre fini et que Z_1 peut parcourir un ouvert dans $\mathfrak{S}_r$, on a nécessairement $U_{12}\, {}^tS_{12} = 0$, d'où résulte que S_{12} est un multiple rationnel de S_2 .

Or, en posant $U_{12} = qU'_{12}$, on a d'après (1.6)'

$$a_{S_2}(Z_1 \ , \ Z_{12}) = \sum_{\substack{S_{12} \\ \mathrm{mod}\{2qU'_{12}S_2\}}} \ \sum_{\substack{U'_{12} \\ \mathrm{mod}\ Z^{r(n-r)}(S_2)}} b_{S_2,S_{12}+2qU'_{12}S_2}(Z_1)\, \mathcal{E}({}^tS_{12}Z_{12} + 2qS_2\, {}^tU'_{12}Z_{12})$$

$$= \sum_{S_{12}} \sum_{U'_{12}} \rho(U) \circ b_{S_2,S_{12}}(Z_1)\; \mathcal{E}(q^2\, S_2\, Z_1[U'_{12}]$$

$$+\, q\, {}^tS_{12}\, Z_1\, U'_{12} + 2q\, S_2\, {}^tU'_{12}\, Z_{12} + {}^tS_{12}\, Z_{12}) \ ;$$

$Z^{r(n-r)}(S_2)$ désignant l'ensemble des U'_{12} telles que $U'_{12}\, S_2 = 0$; donc, si $b_{S_2,S_{12}}(Z_1)$ n'est pas identiquement nul, le sous-espace de $\mathrm{Hom}(F_\mu \ , \ F_\rho)$ formé des éléments $\mathfrak{b}$ tels que

$$\sum_{U'_{12}} \rho(U)\ \mathcal{E}(q^2\, S_2\, Z_1\, [U'_{12}] + q({}^tS_{12}\, Z_1 + 2S_2\, {}^tZ_{12})U'_{12})\, \mathfrak{b}$$

soit convergente pour une $Z_1 \in U_r$ donnée et pour toutes les Z_{12} n'est pas $\neq \{0\}$; comme ce dernier est un sous-espace invariant par rapport à la représentation $\rho\left(\begin{pmatrix} E & qU'_{12} \\ 0 & E \end{pmatrix}\right)$ du groupe abélien $\{U'_{12}\}$, on en conclut, en considérant un vecteur propre de cette représentation, la convergence de la série

$$\sum_{U'_{12}} \left| \mathcal{E}(q^2 S_2 Z_1 [U'_{12}] + q({}^t S_{12} Z_1 + 2S_2 {}^t Z_{12}) U'_{12}) \right| \quad ;$$

Or il existe une matrice rationnelle non-singulière P telle que

$S_2 = P \begin{pmatrix} S_2^o & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} {}^t P$, $S_{12} = (S_{12}^o \ 0)^t P$, où S_2^o est une matrice non-singulière de degré $t \leqslant n - r$ et S_{12}^o est une matrice de type (r , t) ; alors la sommation ci-dessus s'étend à toutes les matrices entières U'_{12} modulo le sous-groupe formé des U'_{12} telles que $U'_{12} P = (\overbrace{0}^{t} , *)$; donc elle contient la sommation étendue à toutes les matrices U'_{12} telles que $qU'_{12} P = (q' U''_{12} \ 0)$, où U''_{12} est une matrice entière de type (r , t), et q' est un entier positif ; posons de plus $Z_{12} P = (Z_{12}^o , *)$ avec Z_{12}^o de type (r , t) ; alors la série ci-dessus s'écrit

$$\sum_{U''_{12}} \left| \mathcal{E}(q^{12} S_2^o Z_1 [U''_{12}] + q'({}^t S_{12}^o Z_1 + 2S_2^o {}^t Z_{12}^o) U''_{12}) \right| < \infty ,$$

la sommation étant étendue à toutes les matrices entières U''_{12} de type (r , t), d'où résulte immédiatement que $S_2^o \gg 0$.

Si $n = 1$, $r = 0$, la conclusion du théorème est évidemment fausse ; dans ce cas on <u>suppose</u> cette propriété, i.e. on suppose que f possède un développement de Fourier de la forme

$$f(Z) = \sum_{S \geqslant 0} a_S \, \mathcal{E}(SZ) \quad ;$$

cette hypothèse est, comme on sait, équivalente à dire que f est bornée dans un voisinage (au sens de $\mathcal{C}_o^{\Gamma}$) du point à l'infini ; on appelle une telle f une forme automorphe locale <u>bornée</u>.

REMARQUE. - Soit S_2 une matrice $\geqslant 0$ de degré $n - r$ dont tous les coefficients sont dans $\frac{1}{q}\mathbb{Z}$; désignons par $\{S_2\}_q$ l'ensemble des matrices S_{12} qui sont des multiples rationnels de S_2 et dont tous les coefficients sont dans $\frac{1}{q}\mathbb{Z}$, et par $\{\{S\}\}_q$ l'ensemble des matrices S_{12} de la forme $2q\, U'_{12} S_2$ avec des matrices entières U'_{12} ; alors il est clair que $\{\{S_2\}\}_q$ est un sous-groupe <u>d'indice fini</u> du groupe additif $\{S_2\}_q$. Or il est facile de voir que si S_{12} est un multiple rationnel de S_2 la série

$$(1.8)\quad \Theta^{(\rho)}_{q;S_2,S_{12}}(Z_1\ ,\ Z_{12}) = \sum_{U'_{12}:Z^{r(n-r)}/Z^{r(n-r)}(S_2)} \rho\left(\begin{pmatrix} E & qU'_{12} \\ 0 & E \end{pmatrix}\right)\ (q^2\ S_2\ Z_1\ [U'_{12}] + q({}^tS_{12}\ Z_1 + 2S_2\ {}^tZ_{12})U'_{12})$$

est convergente, et que $a_{S_2}(Z_1\ ,\ Z_{12})$ est une combinaison linéaire de celles-là de la forme suivante

$$a_{S_2}(Z_1\ ,\ Z_{12}) = \sum_{S_{12}:\{S_2\}_q/\{\{S_2\}\}_q} \Theta^{(\rho)}_{q;S_2,S_{12}}(Z_1\ ,\ Z_{12}) \circ b_{S_2,S_{12}}(Z_1)\ \varepsilon({}^tS_{12}\ Z_{12})\ ;$$

d'autre part, vu (1.5), $f(Z)$ est une combinaison linéaire de

$$\sum_{{}^tU_2:{}^t\gamma'(S_2)\backslash {}^t\gamma'} a_{S_2[{}^tU_2]}(Z_1\ ,\ Z_{12})\ \varepsilon(S_2\ Z_2\ [U_2])$$

$$= \sum \rho\left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}\right)\ a_{S_2}(Z_1\ ,\ Z_{12}\ U_2)\ \varepsilon(S_2\ Z_2\ [U_2])\ ,$$

${}^t\gamma'(S_2)$ désignant le groupe des unités de S_2 dans ${}^t\gamma'$, i.e.

${}^t\gamma'(S_2) = \{{}^tU_2\ ;\ U_2 \in \gamma' = \gamma'_{n-r}\ ,\ S_2\ [{}^tU_2] = S_2\}$; comme ce dernier s'écrit

$$\sum_{U_2}\ \sum_{S_{12}} \rho\left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}\right)\ \Theta^{(\rho)}_{q;S_2,S_{12}}(Z_1\ ,\ Z_{12}\ U_2) \circ b_{S_2,S_{12}}(Z_1)\,\varepsilon(S_2\ Z_2\ [U_2] + {}^tS_{12}\ Z_{12}\ U_2),$$

$f(Z)$ est une combinaison linéaire avec coefficients $b_{S_2,S_{12}}(Z_1)$ des séries "thêta"

$$\Theta^{(\rho)}_{\gamma';q;S_2,S_{12}}(Z) = \sum_{U_2} \rho\left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}\right)\ \Theta_{q;S_2,S_{12}}(Z_1\ ,\ Z_{12}\ U_2)\,\varepsilon(S_2\ Z_2\ [U_2] + {}^tS_{12}\ Z_{12}\ U_2)$$

(1.9)

$$= \sum_{U_2,U_{12}} \rho\left(\begin{pmatrix} E & U_{12} \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}\right)\ \varepsilon(S_2\ Z_1\ [U_{12}] + ({}^tS_{12}\ Z_1 + 2S_2\ {}^tU_2\ {}^tZ_{12})U_{12} + S_2\ Z_2\ [U_2] + {}^tS_{12}\ Z_{12}\ U_2)$$

$$= \sum_{\substack{U_2:{}^t\gamma(S_2)\backslash {}^t\gamma' \\ U_{12}:qZ^{r(n-r)}/qZ^{r(n-r)}(S_2)}} \rho\left(\begin{pmatrix} E_r & U_{12} \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}\right)\ \varepsilon\left(S_2 Z\begin{bmatrix} U_{12} \\ U_2 \end{bmatrix} + ({}^tS_{12},0)\ Z \begin{pmatrix} U_{12} \\ U_2 \end{pmatrix}\right),$$

où $S_2 \geqslant 0$ est pris modulo ${}^t\gamma'$ et $S_{12} \in \{S_2\}_q$ modulo $\{\{S_2\}\}_q$; la convergence de cette série est facile à voir.

2. Définition de l'opérateur Φ_r^n .

Les notations étant comme ci-dessus, le théorème 1 affirme en particulier que $a_o(Z_1 , Z_{12}) = b_{oo}(Z_1)$ ne dépend que de Z_1 ; c'est une fonction holomorphe définie dans un voisinage de Z_o ; en faisant varier Z_o dans U_r , on obtient une fonction holomorphe définie dans U_r ; on la note $f_r = \Phi_r^n f$:

$$(2.1) \qquad f_r(Z_1) = (\Phi_r^n f)(Z_1) = a_o(Z_1 , Z_{12}) = b_{oo}(Z_1) \quad ;$$

considérons maintenant les propriétés de cette fonction.

On déduit d'abord de (1.5), (1.6)

$$(2.2) \quad \rho(U) \circ f_r(Z_1) = f_r(Z_1) \quad \text{pour} \quad U = \begin{pmatrix} E & U_{12} \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} , \quad U_2 \in \gamma', \quad U_{12} \equiv 0 \ (q) ,$$

d'où résulte, par le raisonnement de l'Exposé 7 , p. 14-17 , que

$$(2.3) \qquad f_r(Z_1) \in \mathrm{Hom}(F_\mu , F_\rho^{(r)}) ,$$

où

$$(2.4) \qquad F_\rho^{(r)} = F_{\rho(r)} = \Big\{ \alpha \ ; \ \alpha \in F_\rho \ , \ \rho(g)\alpha = \alpha$$
$$\text{pour} \quad g = \begin{pmatrix} E_r & g_{12} \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} , \ g_2 \in SL(n - r , \underset{\sim}{C}) \Big\} ;$$

$$(2.5) \qquad \rho^{(r)}(g_1) = \text{restriction de} \quad \rho(\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix}) \quad \text{à} \quad F_\rho^{(r)} \quad .$$

On sait que $F_\rho^{(r)} \neq \{0\}$ si et seulement si $\alpha_{r+1} = \dots = \alpha_{n-1} = 0$, et qu'alors $\rho^{(r)}$ est une représentation holomorphe irréductible de $GL(r , \underset{\sim}{C})$ dans $F_\rho^{(r)}$, dont les exposants du plus haut poids sont $\alpha_1 , \dots , \alpha_{r-1} , \alpha_r + \alpha_n$; en outre on a la relation

$$(2.6) \qquad \rho(\begin{pmatrix} g_1 & g_{12} \\ 0 & g_2 \end{pmatrix})\alpha = \rho^{(r)}(g_1) \det(g_2)^{\alpha_n} \alpha, \ \text{pour} \quad \alpha \in F_\rho^{(r)} \ .$$

Cela dit, on va montrer que f_r est une forme automorphe locale d'espèce $(\mu^{(r)} , \rho^{(r)})$ pour $\Gamma'_r = \varpi_r(\Gamma' \cap \mathfrak{G}_r^n)$ dans U_r ; ce fait se démontre par l'un ou l'autre des raisonnements de l'Exposé 4 , n° 5 , théorème 3 , et de l'Exposé 8 , p. 4-6 ; mais on peut encore le démontrer de la manière suivante.

Soit

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & B_1 & B_{12} \\ A_{21} & A_2 & B_{21} & B_2 \\ C_1 & 0 & D_1 & B_{12} \\ 0 & 0 & 0 & D_2 \end{pmatrix} \in \Gamma' \cap \mathfrak{G}_r^n \quad ;$$

on note que $M_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \in \Gamma'_r$ et que $A_2 = {}^tD_2^{-1}$; par un calcul de matrices on constate facilement que

$$MZ = \begin{pmatrix} M_1 Z_1 & (\text{fonction de } Z_1 , Z_{12}) \\ & Z_2 [D_2^{-1}] + (\text{fonction de } Z_1 , Z_{12}) \end{pmatrix} .$$

Or si $Z \in U_n$ est voisine de $Z_o \in U_r$, MZ est voisine de $M_1 Z_o \in U_r$; donc on a

$$\begin{aligned} f(MZ) &= \sum a_{S_2}(M_1 Z_1 , \ldots) \mathcal{E}(S_2(Z_2 [D_2^{-1}] + \ldots)) \\ &= \rho(\begin{pmatrix} C_1 Z_1 + D_1 & * \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}) \circ f(Z) \circ \mu(M)^{-1} \\ &= \sum \rho(\begin{pmatrix} C_1 Z_1 + D_1 & * \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}) \circ a_{S_2}(Z_1 , Z_{12}) \circ \mu(M)^{-1} \mathcal{E}(S_2 Z_2) , \end{aligned}$$

d'où

$$a_{S_2}(M_1 Z_1 , \ldots) \mathcal{E}(S_2(\ldots)) = \rho(\begin{pmatrix} C_1 Z_1 + D_1 & * \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}) \circ a_{S_2[A_2]}(Z_1 , Z_{12}) \circ \mu(M)^{-1}$$

et en particulier

$$(2.7) \qquad f_r(M_1 Z_1) = \rho(\begin{pmatrix} C_1 Z_1 + D_1 & * \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}) \circ f_r(Z_1) \circ \mu(M)^{-1} \quad ;$$

mais comme $f_r(Z_1) \in \mathrm{Hom}(F_\mu , F_\rho^{(r)})$, on a d'après (2.6)

$$\rho(\begin{pmatrix} C_1 Z_1 + D_1 & * \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}) \circ f_r(Z_1) = \rho^{(r)}(C_1 Z_1 + D_1) \circ \det (D_2)^{\alpha_n} f_r(Z_1) ,$$

en sorte que $\det(D_2)^{\alpha_n} f_r(Z_1) \circ \mu(M)^{-1}$ ne dépend que de $M_1 = \varpi_r(M)$.

Or si l'on désigne par $N_{\mu}^{(r)}$ le sous-espace de F_{μ} engendré par

$$\det(D_2)^{-\alpha_n} \mu(M) \xi - \xi \ ; \ \xi \in F_{\mu} \ , \ M \in \Gamma' \cap \mathfrak{N}_r^n \ ,$$

l'endomorphisme $\det(D_2)^{-\alpha_n} \mu(M)$ $(M \in \Gamma' \cap \mathfrak{G}_r^n)$ laisse $N_{\mu}^{(r)}$ invariant et l'endomorphisme induit par celui-ci dans $F_{\mu(r)} = F_{\mu}/N_{\mu}^{(r)}$ ne dépend que de $M_1 = \varpi_r(M)$; on obtient ainsi une représentation de Γ_r' dans $F_{\mu(r)}$ qui est évidemment un multiplicateur de Γ_r' ; on le désigne par $\mu^{(r)}$:

(2.8) $\mu^{(r)}(M_1)$ = l'endomorphisme induit par $\det(D_2)^{-\alpha_n} \mu(M)$ dans $F_{\mu(r)} = F_{\mu}/N_{\mu}^{(r)}$.

Alors $f_r(Z_1)$ peut être considéré comme un élément de $\mathrm{Hom}(F_{\mu(r)} , F_{\rho(r)})$ et (2.7) s'écrit

$$f_r(M_1 Z_1) = \rho^{(r)}(C_1 Z_1 + D_1) \circ f_r(Z_1) \circ \mu^{(r)}(M_1)^{-1} \ , \tag{2.9}$$

ce qui prouve notre assertion.

On notera que

$$\det(D_2) = \pm 1 \quad \text{pour} \quad M \in \Gamma' \cap \mathfrak{G}_r^n \ . \tag{2.10}$$

En effet, pour $M \in \Gamma \cap \mathfrak{G}_r^n$, D_2 est unimodulaire et donc $\det(D_2) = \pm 1$; par suite la représentation $\Gamma' \cap \mathfrak{G}_r^n \ni M \longrightarrow \det(D_2)$ est essentiellement une représentation du groupe fini dans le groupe multiplicatif de $\mathbb{R}$; donc l'image de cette représentation est dans $\{\pm 1\}$.

Considérons le cas particulier où le multiplicateur μ est trivial ; alors $F_{\mu} = \mathbb{C}$; si $\det(D_2)^{\alpha_n} = 1$ pour toute $M \in \Gamma' \cap \mathfrak{N}_r^n$ on a $N_{\mu}^{(r)} = \{0\}$, $F_{\mu(r)} = \mathbb{C}$ et le multiplicateur $\mu^{(r)}$ est encore trivial ; mais s'il existe une $M \in \Gamma' \cap \mathfrak{N}_r^n$ telle que $\det(D_2)^{\alpha_n} = -1$, alors on a $N_{\mu}^{(r)} = \mathbb{C}$, $F_{\mu(r)} = \{0\}$, de sorte que $\Phi_r^n f = 0$ pour toute $f \in \mathfrak{H}_{\Gamma', U_n}(\mu \, ; \, \rho)$. Par exemple, si $\Gamma' = \Gamma$ et si α_n est impaire, on a toujours $\Phi_r^n f = 0$ pour tout $r < n$.

Nous avons ainsi démontré le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - Soit U un ouvert Γ'-saturé dans $\mathfrak{S}_n^*$ et soit $U_r = U \cap \mathfrak{S}_r$ $(0 \leq r \leq n)$. Si $U_r \neq \emptyset$ et $f \in \mathfrak{H}_{\Gamma', U_n}(\mu \, , \, \rho)$ (supposé bornée au cas où $n = 1$, $r = 0$) , on a $f_r = \Phi_r^n f \in \mathfrak{H}_{\Gamma_r', U_r}(\mu^{(r)} \, , \, \rho^{(r)})$, où $\rho^{(r)}$ est une représentation holomorphe irréductible de $GL(r \, , \, \mathbb{C})$ définie par (2.5), et $\mu^{(r)}$ est un multiplicateur de $\Gamma_r' = \varpi_r(\Gamma' \cap \mathfrak{G}_r^n)$ défini par (2.8).

3. Propriétés de l'opérateur Φ_r^n .

Continuité de Φ_r^n : Soit W un compact dans l'espace de (Z_1 , Z_{12}) (i.e. dans $\mathfrak{F}_r \times \underset{\sim}{C}^{r(n-r)}$) et soit $c > 0$; on désigne par $V(W , c)$ l'ensemble des $Z \in \mathfrak{H}_n$ telles que

(3.1) $$(Z_1 , Z_{12}) \in W , \quad Y_2 \geqslant cE \ ;$$

alors on a le lemme suivant (cf. Exposé 4 , n° 4 , Proposition 1) :

LEMME 1. - Si $V(W , c) \subset U_n$ et si $f \in \mathfrak{H}_{\Gamma, U_n}(\mu , \rho)$ (bornée dans le cas $n = 1$, $r = 0$), le développement de Fourier (1.2) de f converge normalement dans $V(W , c)$.

C'est une conséquence immédiate du fait que pour $Z \in V(W , c)$ on a

$$\| a_{S_2}(Z_1 , Z_{12}) \ \mathcal{E}(S_2 Z_2) \| \leqslant \| a_{S_2}(Z_1 , Z_{12}) \ \mathcal{E}(S_2 \ icE) \|$$

et que la série (1.2) converge normalement dans l'ensemble compact formé des $Z \in \mathfrak{H}_n$ telles que

$$(Z_1 , Z_{12}) \in W , \quad Z = icE .$$

Il résulte de là que la limite de la série (1.2) peut se calculer terme à terme. Par conséquent, si $\{Z_\nu\} \subset V(W , c)$ est une suite telle que

(3.2) $$Z_{\nu,1} \longrightarrow Z_0 \in U_r , \quad Y_{\nu,2} \longrightarrow \infty ,$$

alors on a

(3.3) $$\lim_{\nu \to \infty} f(Z_\nu) = f_r(Z_0)$$

(où l'on considère $f_r(Z_0)$ comme un élément de $\mathrm{Hom}(F_\mu , F_\rho)$) , puisqu'on a visiblement

$$a_{S_2}(Z_1 , Z_{12}) \ \mathcal{E}(S_2 Z_2) \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } S_2 \neq 0 , \\ f_r(Z_0) & \text{si } S_2 = 0 , \end{cases}$$

(cf. Exposé 4 , n° 5 , Théorème 2).

Soit maintenant $\{Z_\nu\} \subset U_n$ une suite contenue dans la réunion $\bigcup_i M_i \widetilde{\Omega}_n$ d'un nombre fini des transformés de $\widetilde{\Omega}_n$ (par Γ) , et convergente vers $Z_0 \in U_r$

au sens de n'importe quelle topologie satisfaisant aux conditions 1° , 2° ; alors il est clair que la condition (3.2) est remplie et par suite, on a (3.3) ; on a ainsi établi la continuité de Φ_r^n <u>dans</u> $\bigcup_i M_i \Omega_n^*$.

Si de plus la représentation ρ est <u>de dimension</u> 1 , on peut démontrer la continuité de Φ_r^n au sens de $\mathcal{C}_0^\Gamma$; cela veut dire que pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage $\widetilde{U}'$ de Z_0 au sens de $\mathcal{C}_0^\Gamma$ tel qu'on ait $\|f(Z) - f_r(Z_0)\| < \varepsilon$ pour toute $Z \in \widetilde{U}' \cap U_n$. En effet, soit $Z_0 \in \Omega_r$ et soit $\widetilde{U}' = \Gamma_{Z_0} U'$, où U' est un voisinage de Z_0 dans Ω_n^* ; il existe un nombre fini de $M_i \in \Gamma_{Z_0}$ tels que $\Gamma_{Z_0} = \bigcup_i (\Gamma \cap \Gamma' \cap \mathfrak{M}_r^n) M_i$; d'après ce qui précède on peut prendre, pour ε donné, U' tel qu'on ait $\|f(Z) - f_r(Z_0)\| < \varepsilon$ pour $Z \in \bigcup_i M_i U' \cap U_n$; or chaque $Z \in \widetilde{U}' = \Gamma_{Z_0} U'$ s'écrit $Z' = MZ$, $M \in \Gamma' \cap \mathfrak{M}_r^n$, $Z \in \bigcup_i M_i U'$; donc d'après (1.3), (1.4) on a

$$\begin{aligned}\|f(Z') - f_r(Z_0)\| &= \|\rho(U)^{-1} \circ f(Z) \circ \mu(M)^{-1} - f_r(Z_0)\| \\ &= \|f(Z) - \rho(U) \circ f_r(Z_0) \circ \mu(M)\| \\ &= \|f(Z) - f_r(Z_0)\|\end{aligned}$$

puisque $\mu(M)$ est unitaire et que $\rho(U) = \det(U)^{\alpha_n} = \pm 1$.

<u>Transitivité de Φ_r^n</u> : Soit $s < r < n$ et $U_s \neq \emptyset$; alors il est facile de voir, soit par la comparaison des coefficients des séries de Fourier, soit par la continuité ci-dessus, la relation

$$\Phi_s^r(\Phi_r^n f) = \Phi_s^n f \tag{3.4}$$

pour $f \in \mathcal{S}_{\Gamma', U_n}(\mu, \rho)$, où l'on considère $\Phi_r^n f$, ... , comme des fonctions à valeurs dans $\mathrm{Hom}(F_\mu , F_\rho)$. (Si $r = 1$, $s = 0$, $\Phi_1^n f$ est nécessairement bornée.)

On a d'ailleurs les relations suivantes :

$$(\Gamma'_r)_s \subset \Gamma'_s \tag{3.5}$$

(3.6) $(F_\rho^{(r)})^{(s)} \supset F_\rho^{(s)}$, $\rho^{(s)}$ = restriction de $(\rho^{(r)})^{(s)}$ à $F_\rho^{(s)}$
($(\rho^{(r)})^{(s)}$ étant irréductible, on a $(F_\rho^{(r)})^{(s)} = F_\rho^{(s)}$, sauf dans le cas où $(F_\rho^{(r)})^{(s)} \neq \{0\}$, $F_\rho^{(s)} = \{0\}$, i.e. le cas où $\alpha_{s+1} = \dots = \alpha_{r-1} = 0$, $\alpha_r \neq 0$, $\alpha_{r+1} = \dots = \alpha_{n-1} = 0$)

(3.7) $\quad N^{(s)}_{\mu^{(r)}} \subset N^{(s)}_{\mu}/N^{(r)}_{\mu}$, de sorte qu'il existe une projection canonique

$$p : F_{(\mu^{(r)})^{(s)}} = F_{\mu^{(r)}}/N^{(s)}_{\mu^{(r)}} \longrightarrow F_{\mu^{(s)}} = F_{\mu}/N^{(s)}_{\mu} .$$

En tenant compte de ces situations, la transitivité (3.4) signifie, plus précisément, la commutativité du diagramme suivant

$$(\Phi^r_s(\Phi^n_r f))(Z^{(s)}) \quad \begin{array}{ccc} F_{(\mu^{(r)})^{(s)}} & \xrightarrow{\;p\;} & F_{\mu^{(s)}} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ F_{(\rho^{(r)})^{(s)}} & \supset & F_{\rho^{(s)}} \end{array} \quad (\Phi^n_s f)(Z^{(s)})$$

Si l'on écrit Φ au lieu de Φ^n_{n-1} (ce qui est la définition originale de Φ), on peut écrire Φ^{n-r} au lieu de Φ^n_r .

4. Définition de l'opération $\Phi^n_r(f|M)$.

Pour compléter la définition de Φ dans le cas d'un groupe commensurable au groupe modulaire, il faut encore définir l'opérateur $\Phi^n_r(f|M)$ pour $M \in \widetilde{\Gamma}$, qui applique $\mathfrak{H}_{\Gamma',U_n}(\mu, \rho)$ dans $\mathfrak{H}_{\varpi_r(M^{-1}\Gamma' M \cap \mathfrak{G}^n_r), M^{-1}U \cap \mathfrak{S}_r}(\mu^{(r)}_M , \rho^{(r)})$, où $\mu^{(r)}_M$ est un multiplicateur de $\varpi_r(M^{-1}\Gamma' M \cap \mathfrak{G}^n_r)$ défini ci-dessous.

Pour cela, attachons à chaque $M \in \widetilde{\Gamma}$ un espace vectoriel F_{μ_M} et un isomorphisme

(4.1) $$\sigma_M : F_{\mu_M} \longrightarrow F_{\mu} ;$$

on peut définir alors un multiplicateur μ_M de $M^{-1}\Gamma' M$ dans F_{μ_M} par

(4.2) $$\mu_M(M^{-1} M' M) = \sigma_M^{-1} \circ \mu(M') \circ \sigma_M \quad (M' \in \Gamma') ;$$

on suppose qu'on a

(4.3) $$\sigma_{M'M} = \mu(M') \circ \sigma_M \qquad \text{pour} \quad M' \in \Gamma' ,$$

ce qui implique que l'espace vectoriel F_{μ_M} et le multiplicateur μ_M ci-dessus ne dépendent que de la classe de M modulo à gauche Γ' .

On pose

(4.4) $$(f|M)(Z) = \rho(CZ + D)^{-1} \circ f(MZ) \circ \sigma_M$$

pour $f \in \mathfrak{H}_{\Gamma',U_n}(\mu, \rho)$; alors il est immédiat que

(4.5) $$f|M \in \mathfrak{H}_{M^{-1}\Gamma' M, M^{-1}U_n}(\mu_M , \rho)$$

de sorte qu'on a

(4.6) $$\Phi^n_r(f|M) \in \mathfrak{H}_{\varpi_r(M^{-1}\Gamma' M \cap \mathfrak{G}^n_r), M^{-1}U \cap \mathfrak{S}_r}(\mu^{(r)}_M , \rho^{(r)}) .$$

D'après l'hypothèse (4.3) , $f|M$ et donc $\Phi_r^n(f|M)$ ne dépendent que de la classe de M modulo à gauche Γ'.

Soit maintenant $L = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & B_1 & B_{12} \\ A_{21} & A_2 & B_{21} & B_2 \\ C_1 & 0 & D_1 & D_{12} \\ 0 & 0 & 0 & D_2 \end{pmatrix} \in \tilde{\Gamma} \cap \mathfrak{G}_r^n$, $L_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} = \varpi_r(L)$;

alors il est clair que

$$\varpi_r(L^{-1} M^{-1}\Gamma' ML \cap \mathfrak{G}_r^n) = L_1^{-1}(M^{-1}\Gamma'M \cap \mathfrak{G}_r^n) L_1 , \quad L^{-1} M^{-1} U \cap \mathfrak{S}_r = L_1^{-1}(M^{-1} U \cap \mathfrak{S}_r).$$

D'autre part, considérons l'isomorphisme

$$\det(D_2)^{-\alpha_n} \sigma_M^{-1} \circ \sigma_{ML} : F_{\mu_{ML}} \longrightarrow F_{\mu_M} ;$$

comme $L^{-1} M^{-1}\Gamma' ML \cap \mathfrak{N}_r^n = L^{-1}(M^{-1}\Gamma' M \cap \mathfrak{N}_r^n) L$, on voit facilement que cet isomorphisme applique $N_{\mu_{ML}}^{(r)}$ sur $N_{\mu_M}^{(r)}$, ce qui donne l'isomorphisme induit

$$(4.7) \qquad F_{\mu_{ML}^{(r)}} = F_{\mu_{ML}}/N_{\mu_{ML}}^{(r)} \longrightarrow F_{\mu_M^{(r)}} = F_{\mu_M}/N_{\mu_M}^{(r)} ;$$

il est clair d'après la définition que, si l'on attache à $L_1 = \varpi_r(L)$ cet isomorphisme induit, le multiplicateur de $L_1^{-1} \varpi_r(M^{-1}\Gamma'M \cap \mathfrak{G}_r^n) L_1$ défini d'une manière analogue à (4.2) est précisément $\mu_{ML}^{(r)}$. De façon précise, soit $L_o \in \tilde{\Gamma} \cap \mathfrak{N}_r^n$; comme on a pour les isomorphismes (4.7) un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F_{\mu_{ML}^{(r)}} & \longrightarrow & F_{\mu_M^{(r)}} \\ \uparrow & \nearrow & \\ F_{\mu_{ML\,L_o}^{(r)}} & & \end{array} ,$$

on peut identifier tous les espaces $F_{\mu_{ML}^{(r)}}$ tels que $\varpi_r(L) = L_1$ avec un seul espace noté $F_{(\mu_M^{(r)})_{L_1}}$, et désigner par $\sigma_{L_1}^{(M)}$ l'isomorphisme

$$F_{(\mu_M^{(r)})_{L_1}} \longrightarrow F_{\mu_M^{(r)}}$$

défini par (4.7) ; alors on a

(4.8) $$(\mu_{ML})^{(r)} = (\mu_M^{(r)})_{L_1} \quad ;$$

on constate facilement que le système $F_{(\mu_M^{(r)})_{L_1}}$, $\sigma_{L_1}^{(M)}$ $(L_1 \in \tilde{\Gamma}_r)$ vérifie la même condition que (4.3) pour $\varpi_r(M^{-1}\Gamma' M \cap \mathfrak{G}_r^n)$ et $\mu_M^{(r)}$.

Cela dit, on pose

(4.9) $$(g|L_1)(Z_1) = \rho^{(r)}(C_1\ Z_1 + D_1)^{-1} \circ g(L_1\ Z_1 \circ \sigma_{L_1}^{(M)}$$

pour $g \in \mathfrak{H}_{\varpi_r(M^{-1}\Gamma' M \cap \mathfrak{G}_r^n), M^{-1}U \cap \mathfrak{S}_r}(\mu_M^{(r)}, \rho^{(r)})$, $L_1 \in \tilde{\Gamma}_r$; alors par le raisonnement du n° 2 on constate facilement la relation

(4.10) $$\Phi_r^n(f|ML) = \Phi_r^n(f|M)|L_1$$

pour $f \in \mathfrak{H}_{\Gamma', U_n}(\mu, \rho)$, $L \in \tilde{\Gamma} \cap \mathfrak{G}_r^n$; cette relation montre que l'opérateur $\Phi_r^n(f|M)$ ne dépend essentiellement que de la classe de M modulo à droite $\tilde{\Gamma} \cap \mathfrak{G}_r^n$.

Soit donc

$$\tilde{\Gamma} = \bigcup_\lambda \Gamma' M_{r,\lambda}(\tilde{\Gamma} \cap \mathfrak{G}_r^n) \ ,$$

et soient

$$U_{r,\lambda} = M_{r,\lambda}^{-1}\ U \cap \mathfrak{S}_r \ ,$$

$$\Gamma'_{r,\lambda} = \varpi_r(M_{r,\lambda}^{-1}\Gamma' M_{r,\lambda} \cap \mathfrak{G}_r^n) \ ;$$

alors $U_{r,\lambda}$ est $\Gamma'_{r,\lambda}$-saturé et on a la décomposition en somme directe

(4.11) $$U = \bigcup_{r,\lambda} \Gamma' M_{r,\lambda}\ U_{r,\lambda} \ ;$$

en faisant usage de cette représentation, on pose

(4.12) $$f_{r,\lambda} = \Phi_{r,\lambda}^n\ f = \Phi_r^n(f|M_{r,\lambda})$$

pour $f \in \mathfrak{F}_{\Gamma', U_n}(\mu, \rho)$; alors on a

(4.13) $$f_{r,\lambda} \in \mathfrak{F}_{\Gamma'_{r,\lambda}, U_{r,\lambda}}(\mu_{r,\lambda}, \rho^{(r)}) ,$$

où l'on pose $\mu_{r,\lambda} = \mu^{(r)}_{M_{r,\lambda}}$.

Or si l'on remplace F_{μ_M}, σ_M par un autre système $F_{\mu'_M}$, σ'_M , on aura l'isomorphisme

$$\tau_M = \sigma'^{-1}_M \circ \sigma_M \; : \; F_{\mu_M} \longrightarrow F_{\mu'_M}$$

qui applique $N^{(r)}_{\mu_M}$ sur $N^{(r)}_{\mu'_M}$ pour tout r et donc induit un isomorphisme

$$\tau^{(r)}_M \; : \; F_{\mu^{(r)}_M} \longrightarrow F_{\mu'^{(r)}_M} .$$

En désignant par $f|'M$ l'opérateur défini comme (4.4) par σ'_M , on obtiendra les relations

$$f|M = (f|'M) \circ \tau_M \, , \; \Phi^n_r(f|M) = (\Phi^n_r(f|'M)) \circ \tau^{(r)}_M \quad ;$$

ce qui montre que toutes les définitions ci-dessus ne dépendent pas essentiellement du choix du système F_{μ_M}, σ_M .

Dans le cas particulier où le multiplicateur μ est trivial, on peut poser $F_{\mu_M} = F_\mu = C$ et σ_M = identité ; alors $(f|M)(Z) = \rho(CZ + D)^{-1} \circ f(MZ) \in F_\rho$ et $\Phi^n_r(f|M)(Z_1) \in F_{\rho^{(r)}}$. Or on a $F_{\mu^{(r)}_M} = C$ ou $\{0\}$, et c'est nul si et seulement s'il existe une $M'' \in M^{-1}\Gamma' M \cap \mathfrak{G}^n_r$ telle que $\det(D''_2)^{\alpha_n} = -1$; s'il en est ainsi, $\Phi^n_r(f|M)$ est identiquement nulle. D'après ce que nous avons dit cette alternative ne dépend que de la classe de M à gauche modulo Γ' et à droite modulo $\tilde{\Gamma} \cap \mathfrak{G}^n_r$; en posant $\sigma^{(M)}_{L_1}$ = identité dans (4.9) on obtient toujours la relation (4.10).

<u>Transitivité de $\Phi^n_{r,\lambda}$</u> : Soit $s < r < n$ et soient

$$\tilde{\Gamma}_r = \bigcup_\nu \Gamma'_{r,\lambda} \, M^{(r,\lambda)}_{s,\nu} (\tilde{\Gamma}_r \cap \mathfrak{G}^r_s) ,$$

$$U_{s,\nu}^{(r,\lambda)} = M_{s,\nu}^{(r,\lambda)^{-1}} \ (M_{r,\lambda}^{-1} U \cap \mathfrak{H}_r^*) \cap \mathfrak{H}_s$$

$$= \iota_n (M_{s,\nu}^{(r,\lambda)})^{-1} M_{r,\lambda}^{-1} U \cap \mathfrak{H}_s \ ,$$

$$(\Gamma'_{r,\lambda})_{s,\nu} = \varpi_s (M_{s,\nu}^{(r,\lambda)-1} \Gamma''_{r,\lambda} M_{s,\nu}^{(r,\lambda)} \cap \mathfrak{G}_s^r)$$

$$= \varpi_s (\iota_n (M_{s,\nu}^{(r,\lambda)})^{-1} M_{r,\lambda}^{-1} \Gamma' M_{r,\lambda} \iota_n (M_{s,\nu}^{(r,\lambda)}) \cap \mathfrak{G}_r^n \cap \mathfrak{G}_s^n) \ ,$$

alors $U_{s,\nu}^{(r,\lambda)}$ est $(\Gamma'_{r,\lambda})_{s,\nu}$-saturé et on a

$$M_{r,\lambda}^{-1} U \cap \mathfrak{H}_r^* = \bigcup_{s,\nu} \Gamma'_{r,\lambda} M_{s,\nu}^{(r,\lambda)} \ U_{s,\nu}^{(r,\lambda)} \ ;$$

on pose pour $g \in \mathfrak{H}_{\Gamma'_{r,\lambda}, U_{r,\lambda}} (\mu_{r,\lambda}, \rho^{(r)})$

(4.14) $\Phi_{s,\nu}^{r,\lambda} g = \Phi_s^r (g | M_{s,\nu}^{(r,\lambda)}) \in \mathfrak{H}_{(\Gamma'_{r,\lambda})_{s,\nu}, U_{s,\nu}^{(r,\lambda)}} ((\mu_{r,\lambda})_{s,\nu} , (\rho^{(r)})^{(s)})$.

Or, si $(\lambda , \nu) \to \mu$, i.e. s'il y a $M' \in \Gamma'$, $L \in \widetilde{\Gamma} \cap \mathfrak{G}_s^n$ telles que

$$M_{r,\lambda} M_{s,\nu}^{(r,\lambda)} = M' M_{s,\mu} L \ ,$$

on a

(4.15)
$$U_{s,\nu}^{(r,\lambda)} = \varpi_s (L)^{-1} U_{s,\mu} \ ,$$

$$(\Gamma'_{r,\lambda})_{s,\nu} \subset \varpi_s (L)^{-1} \Gamma'_{s,\mu} \varpi_s (L) \ ;$$

on va montrer la relation suivante

(4.16)
$$\Phi_{s,\nu}^{r,\lambda} (\Phi_{r,\lambda}^n f) = (\Phi_{s,\mu}^n f) | \varpi_s (L) \ ;$$

en effet, d'après la définition et (3.4), (4.10) on a

$$\Phi_{s,\nu}^{r,\lambda} (\Phi_{r,\lambda}^n f) = \Phi_s^r (\Phi_r^n (f | M_{r,\lambda}) | M_{s,\nu}^{(r,\lambda)})$$

$$= \Phi_s^r (\Phi_r^n (f | M_{r,\lambda} \cdot \iota_n (M_{s,\nu}^{(r,\lambda)}))$$

$$= \Phi_s^n (f | M_{s,\mu} L)$$

$$= \Phi_s^n (f | M_{s,\mu}) | \ \varpi_s (L)$$

$$= (\Phi_{s,\mu}^n f) | \ \varpi_s (L) \ .$$

BIBLIOGRAPHIE

La généralisation de l'opérateur Φ donnée dans cet exposé se trouve partiellement dans :

[1] KOECHER (Max). - Zur Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades, I., Math. Z., t. 59, 1954, p. 399-416.

[2] SATAKE (Ichiro). - On the compactification of the Siegel space, J. Indian math. Soc., new Series, t. 20, 1956, p. 259-281.

[3] SATAKE (Ichiro). - On Siegel's modular functions, Proceedings of the international Symposium on algebraic number theory, Tokyo and Nikko 1955. - Tokyo, Science Council of Japan, 1956 ; p. 107-129.