Henri Cartan

Sur la compactification de Satake

Séminaire Henri Cartan, tome 10, n° 2 (1957-1958), exp. n° 12 bis, p. 14-23
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1957-1958__10_2_A3_0>

SUR LA COMPACTIFICATION DE SATAKE

par Henri CARTAN

Le texte qui suit présente une variante dans la manière d'exposer la compactification de l'espace de Siegel (cf. Exposé 12, par I. SATAKE). Au lieu de fabriquer abstraitement, comme le fait SATAKE, un espace $\mathfrak{S}_n^*$ pour y faire opérer le groupe $\Gamma_n = Sp(n , \mathbb{Z})$, on utilise ici un espace qui existe déjà, et dans lequel Γ_n opère naturellement.

1. Quelques définition et notations.

Pour tout entier $r < n$, on identifiera l'espace de Siegel $\mathfrak{S}_r$ à un sous-espace de la frontière de $\mathfrak{S}_n$, au moyen de l'application $z \to \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (matrice décomposée en blocs $(r , n - r)$) . D'autre part, on identifiera le groupe $G_r = Sp(r , \mathbb{R})$ à un sous-groupe de $G_n = Sp(n , \mathbb{R})$, par l'application

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Ces identifications sont bien compatibles avec les opérations de G_r dans $\mathfrak{S}_r$, resp. de G_n dans l'adhérence de $\mathfrak{S}_n$ (lorsque ces opérations sont définies).

Les éléments de G_n qui transforment $\mathfrak{S}_r$ dans $\mathfrak{S}_r$ forment un <u>groupe</u> $G_{n,r}$ qui contient G_r ; $G_{n,r}$ se compose des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G_n$ telles que l'on ait

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & a_{12} \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} , \quad b = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad c = \begin{pmatrix} c_1 & c_{12} \\ c_{21} & c_2 \end{pmatrix} , \quad d = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ d_{21} & d_2 \end{pmatrix} .$$

Si à une telle matrice on associe la matrice

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in G_r ,$$

on définit un épimorphisme $\varpi_{n,r} : G_{n,r} \to G_r$, dont le noyau $I_{n,r}$ se compose des éléments de G_n qui induisent l'identité sur $\mathfrak{S}_r$. Tout élément $M \in G_{n,r}$ opère sur $\mathfrak{S}_r$ comme $\varpi_{n,r}(M) \in G_r$. Il est clair que $G_{n,r}$ est produit direct croisé de ses deux sous-groupes G_r et $I_{n,r}$.

Soit $\Gamma_n = Sp(n, \underset{\sim}{Z})$; on identifiera Γ_r à un sous-groupe de Γ_n, et on posera

$$\Gamma_{n,r} = G_{n,r} \cap \Gamma_n \quad , \quad N_{n,r} = I_{n,r} \cap \Gamma_n .$$

Soit $\mathfrak{B}_n$ le modèle borné de l'espace de Siegel, formé des n-matrices carrées symétriques complexes v telles que $\bar{v}v \ll 1_n$ (cf. Exposé 3-04). On passe de $\mathfrak{S}_n$ à $\mathfrak{B}_n$ par la transformation de Cayley $v = (1_n + iz)(1_n - iz)^{-1}$. Le groupe G_n opère dans $\mathfrak{B}_n$, et ses opérations se prolongent à l'adhérence $\mathfrak{A}_n$ de $\mathfrak{B}_n$; $\mathfrak{A}_n$ se compose des matrices v telles que $\bar{v}v \leq 1_n$, et $\mathfrak{B}_n$ n'est autre que l'intérieur de $\mathfrak{A}_n$. Pour tout entier r tel que $0 \leq r \leq n$, soit $\mathfrak{A}_{n,r}$ l'espace des $v \in \mathfrak{A}_n$ telles que le rang de $1_n - \bar{v}v$ soit au plus égal à r ; $\mathfrak{A}_{n,r}$ est fermé dans $\mathfrak{A}_n$; on posera $\mathfrak{B}_{n,r} = \mathfrak{A}_{n,r} - \mathfrak{A}_{n,r-1}$; $\mathfrak{B}_{n,r}$ se compose des v telles que le rang de $1_n - \bar{v}v$ soit exactement égal à r. On observera que $\mathfrak{B}_{n,n}$ n'est autre que $\mathfrak{B}_n$. Chaque $\mathfrak{A}_{n,r}$ (resp. $\mathfrak{B}_{n,r}$) est stable par G_n, et G_n est transitif dans chacun des $\mathfrak{B}_{n,r}$, comme on le vérifie sans peine.

Pour chaque $r < n$, on identifiera $\mathfrak{B}_r$ à un sous-espace de $\mathfrak{B}_{n,r}$, au moyen de l'application $v_1 \rightarrow \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & 1_{n-r} \end{pmatrix}$. La transformation de Cayley sur les n-matrices transforme alors $\mathfrak{B}_r$ (identifié à un sous-espace de l'adhérence $\mathfrak{A}_n$ de $\mathfrak{B}_n$) dans $\mathfrak{S}_r$ (identifié à un sous-espace de l'adhérence de $\mathfrak{S}_n$). Le groupe $G_{n,r}$ (resp. $\Gamma_{n,r}$), qui opère dans $\mathfrak{A}_n$, transforme $\mathfrak{B}_r$ en lui-même, et chaque $M \in G_{n,r}$ opère dans $\mathfrak{B}_r$ comme $\varpi_{n,r}(M) \in G_r$.

2. Ouverts fondamentaux.

Pour chaque $u > 0$ assez grand, nous avons dans $\mathfrak{S}_n$ un ouvert fondamental $\Omega_n(u)$ (ou simplement Ω_n lorsque u est choisi une fois pour toutes), qui est défini comme dans l'Exposé 12-02 : on pose $z = x + iy$ (x et y réels), $y = {}^t wdw$ (où d est une matrice diagonale à éléments $d_i > 0$, et w une matrice triangulaire unipotente : $w_{ii} = 1$, $w_{ij} = 0$ pour $j < i$). Nous modifions légèrement la définition de $\Omega_n(u)$ donnée par SATAKE (loc. cit.), en remplaçant l'inégalité (i) de l'Exposé 12-02 par la suivante :

$|\xi_{ij}| < u$, en notant ξ la matrice ${}^t w^{-1} x\, w^{-1}$.

Ainsi $\Omega_n(u)$ se compose des

$$z = {}^t w(\xi + id)w \tag{1}$$

telles que

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} |\xi| < u , & |w| < u \\ 1 < ud_1 , & d_i < ud_{i+1} \quad \text{pour} \quad 1 \leq i < n . \end{cases}$$

(La relation $|w| < u$, pour une matrice w , signifie que l'on a $|w_{ij}| < u$ pour tous ses termes w_{ij}).

Effectuons sur $\Omega_n(u)$ la transformation $z' = -z^{-1}$ (qui fait partie du groupe G_n), et posons $d^{-1} = d'$. L'ouvert transformé de $\Omega_n(u)$ se compose des

$$z' = i\, w^{-1}\, d'^{1/2}\, (1_n - id'^{1/2} \xi\, d'^{1/2})^{-1}\, d'^{1/2}\, {}^t w^{-1} , \tag{1'}$$

où la matrice diagonale d' , la matrice triangulaire unipotente w , et la matrice symétrique ξ satisfont à

$$\text{(I')} \qquad \begin{cases} |\xi| < u , & |w| < u , \\ 0 < d'_1 < u , & 0 < d'_{i+1} < ud'_i \qquad \text{pour} \quad 1 \leq i < n . \end{cases}$$

<u>Changeant de notation, c'est désormais l'ensemble des</u> z' <u>satisfaisant à</u> (I') <u>que nous désignerons par</u> $\Omega_n(u)$, <u>ou simplement</u> Ω_n . C'est un ensemble <u>borné</u>, car w^{-1} , d' et ξ sont bornés, et d'autre part la matrice $(1 + (d'^{1/2} \xi\, d'^{1/2})^2)^{-1}$ est de norme $\leqslant 1$.

L'adhérence $\overline{\Omega}_n$ de Ω_n (dans l'espace de toutes les n-matrices z' complexes et symétriques) est donc <u>compacte</u>. Les points de cette adhérence qui appartiennent à $\mathfrak{B}_{n,r}$ sont les z' satisfaisant à (1'), où ξ , w et d' satisfont à

$$\begin{cases} |\xi| \leqslant u , & |w| \leqslant u , \\ 0 < d'_1 \leqslant u , & 0 < d'_{i+1} \leqslant ud'_i \ (1 \leq i < r), \quad d'_{r+1} = \dots = d'_n = 0 . \end{cases}$$

L'intérieur de cet ensemble (relativement à $\mathfrak{B}_{n,r}$) est l'ensemble $\Omega_{n,r}$ formé des z' qui satisfont à (1'), avec

$$\text{(I}'_r\text{)} \qquad \begin{cases} |\xi| < u , & |w| < u , \\ 0 < d'_1 < u , & 0 < d'_{i+1} < ud'_i \quad (1 \leq i < r) , \quad d'_{r+1} = \dots = d'_n = 0 . \end{cases}$$

Dans ce cas, posons

$$w = \begin{pmatrix} w_1 & w_{12} \\ 0 & w_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_{12} \\ {}^t\xi_{12} & \xi_2 \end{pmatrix} \quad \text{(blocs} \quad (r\ ,\ n-r)) \ ;$$

alors $z' \in \Omega_{n,r}$ ne dépend que de d', w_1 et ξ_1 (nullement de w_{12}, ξ_{12}, w_2 et ξ_2). On voit donc que l'identification de $\mathfrak{S}_r$ avec un sous-ensemble de la frontière de $\mathfrak{S}_n$, identifie Ω_r avec $\Omega_{n,r}$; nous ferons désormais cette identification, et écrirons Ω_r au lieu de $\Omega_{n,r}$.

L'adhérence compacte $\overline{\Omega}_n$ de Ω_n contient l'ensemble

$$\Omega_n^* = \bigcup_{0 \leqslant r \leqslant n} \Omega_r \ .$$

D'une manière générale, pour $s < r$, tout élément de Ω_s est adhérent à Ω_r. L'ensemble Ω_o est réduit à un élément (la matrice nulle).

On supposera toujours que u a été choisi assez grand pour que chacun des $\Omega_r(u)$ $(0 \leqslant r \leqslant n)$ soit un ouvert fondamental pour $\mathfrak{S}_r$.

Par la transformation de Cayley, Ω_r (pour $0 \leqslant r \leqslant n$) se transporte sur un ouvert fondamental Σ_r de $\mathfrak{B}_r$, et Ω_n^* se transporte sur l'ensemble $\Sigma_n^* = \bigcup_{0 \leqslant r \leqslant n} \Sigma_r$. Les ensembles Σ_n et Σ_n^* ont même adhérence compacte.

Considérons les sous-ensembles suivants de $\mathfrak{A}_n$:

$$\mathfrak{A}_n^* = \bigcup_{M \in \Gamma_n} M.\Sigma_n^* \quad , \quad \mathfrak{A}_{n,r}^* = \mathfrak{A}_n^* \cap \mathfrak{A}_{n,r} \quad ,$$

$$\mathfrak{B}_{n,r}^* = \mathfrak{A}_{n,r}^* - \mathfrak{A}_{n,r-1}^* = \bigcup_{M \in \Gamma_n} M.\Sigma_r \quad .$$

Observons que $\mathfrak{B}_{n,n}^*$ n'est autre que $\mathfrak{B}_n$. Il est clair que le groupe Γ_n opère dans $\mathfrak{A}_n^*$ et dans chacun des $\mathfrak{B}_{n,r}^*$ (dont $\mathfrak{A}_n^*$ est la réunion). On se propose de définir sur $\mathfrak{A}_n^*$ une topologie qui induise sur $\mathfrak{B}_n$ la topologie naturelle (euclidienne) de $\mathfrak{B}_n$, et soit telle que Γ_n opère continûment dans $\mathfrak{A}_n^*$.

3. Topologie de $\mathfrak{A}_n^*$.

Soit, sur $\mathfrak{A}_n^*$, $\mathcal{C}^\Gamma$ la topologie la plus fine telle que les injections $M.\Sigma_n^* \to \mathfrak{A}_n^*$ soient continues. Un sous-ensemble de $\mathfrak{A}_n^*$ est $\mathcal{C}^\Gamma$-ouvert (resp. $\mathcal{C}^\Gamma$-fermé) s'il rencontre chacun des $M.\Sigma_n^*$ suivant un ouvert euclidien (resp.

un fermé euclidien). La topologie $\mathcal{C}^\Gamma$ induit, sur chacun des $M.\Sigma_n^*$, la topologie euclidienne : en effet, tout ouvert euclidien U de l'espace ambiant $\mathcal{A}_n$ rencontre $\mathcal{A}_n^*$ suivant un ensemble qui est $\mathcal{C}^\Gamma$-ouvert, donc U rencontre $M.\Sigma_n^*$ suivant un ensemble qui est ouvert pour la topologie induite par $\mathcal{C}^\Gamma$.

La topologie induite sur $\mathcal{B}_n$ par $\mathcal{C}^\Gamma$ est la topologie euclidienne de $\mathcal{B}_n$: en effet, d'une part tout ouvert euclidien de $\mathcal{B}_n$ est $\mathcal{C}^\Gamma$-ouvert, comme on vient de le voir ; d'autre part, si un ensemble U contenu dans $\mathcal{B}_n$ est $\mathcal{C}^\Gamma$-ouvert, $U \cap (M.\Sigma_n)$ est ouvert dans $M.\Sigma_n$ (pour la topologie euclidienne), donc est un ouvert euclidien de $\mathcal{B}_n$, et U, qui est réunion des $U \cap (M.\Sigma_n)$ quand M parcourt Γ_n, est un ouvert euclidien.

Pour chaque entier r tel que $0 \leqslant r \leqslant n$, $\mathcal{A}_{n,r}^*$ est $\mathcal{C}^\Gamma$-<u>fermé</u> dans $\mathcal{A}_n^*$; car $\mathcal{A}_{n,r}^*$ coupe chacun des $M.\Sigma_n^*$ suivant $M.(\mathcal{A}_{n,r}^* \cap \Sigma_n^*)$ qui est fermé dans $M.\Sigma_n^*$. On en déduit que $\mathcal{B}_{n,r}^*$ est $\mathcal{C}^\Gamma$-<u>ouvert</u> dans $\mathcal{A}_{n,r}^*$; c'est un ouvert <u>dense</u> dans $\mathcal{A}_{n,r}^*$, puisque chaque $M.\Sigma_r$ est dense dans $M.(\mathcal{A}_{n,r}^* \cap \Sigma_n^*)$.

Les opérations du groupe modulaire Γ_n dans $\mathcal{A}_n^*$ sont des <u>homéomorphismes</u> (pour la topologie $\mathcal{C}^\Gamma$) : car si un ensemble rencontre chacun des $M.\Sigma_n^*$ suivant un ouvert, il en est de même de chacun de ses transformés par le groupe Γ_n. Les opérations de Γ_n induisent des homéomorphismes de $\mathcal{A}_{n,r}^*$, resp. de $\mathcal{B}_{n,r}^*$. Les espaces quotients $\mathcal{A}_{n,r}^*/\Gamma_n$ s'identifient à des sous-espaces fermés de $\mathcal{A}_n^*/\Gamma_n$; et $\mathcal{B}_{n,r}^*/\Gamma_n$ s'identifie à un sous-espace ouvert de $\mathcal{A}_{n,r}^*/\Gamma_n$, dense dans $\mathcal{A}_{n,r}^*/\Gamma_n$.

En particulier, $\mathcal{B}_n/\Gamma_n$ est un ouvert partout dense de l'espace quotient $\mathcal{A}_n^*/\Gamma_n$ (on montrera plus loin que $\mathcal{A}_n^*/\Gamma_n$ est <u>compact</u>). Comme espace topologique, $\mathcal{B}_n/\Gamma_n$ s'identifie au quotient Σ_n/R, en notant R la relation d'équivalence induite sur l'ouvert fondamental Σ_n par les opérations du groupe modulaire Γ_n. De même, $\mathcal{B}_{n,r}^*/\Gamma_n$ s'identifie au quotient Σ_r/R, R désignant cette fois la relation d'équivalence induite par les opérations de Γ_n sur le domaine fondamental Σ_r de $\mathcal{B}_r$. En fait, on va voir que R n'est autre que la relation d'équivalence induite sur Σ_r par les opérations du groupe modulaire Γ_r, et que par suite $\mathcal{B}_{n,r}^*/\Gamma_n$ s'identifie à $\mathcal{B}_r/\Gamma_r$.

Par la transformation de Cayley, tout revient à étudier la relation d'équivalence définie sur Ω_r par les operations de Γ_n. Or si un $M \in \Gamma_n$ est tel que $M.\Omega_r$ rencontre Ω_r, il est immédiat que M transforme $\mathfrak{S}_r$ dans $\mathfrak{S}_r$;

autrement dit, M appartient au sous-groupe $\Gamma_{n,r}$, et M agit sur $\mathfrak{S}_r$ comme $\varpi_{n,r}(M) \in \Gamma_r$ (cf. paragraphe 1). D'où l'assertion annoncée.

De là résulte :

PROPOSITION 1. - L'espace quotient $\mathcal{A}_n^*/\Gamma_n$ est réunion de sous-espaces deux à deux disjoints, respectivement isomorphes aux $\mathfrak{S}_r/\Gamma_r$ $(0 \leqslant r \leqslant n)$; pour chaque entier $s \leqslant n$, la réunion des sous-espaces S_r/Γ_r (pour $r \leqslant s$) est fermée dans $\mathcal{A}_n^*/\Gamma_n$.

Soit s un entier $\leqslant n$. Considérons l'injection canonique de $\mathcal{A}_s$ dans $\mathcal{A}_n$, qui envoie une s-matrice carrée v dans la n-matrice $\begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 1_{n-s} \end{pmatrix}$. Elle applique évidemment, pour tout entier $r \leqslant s$, $\mathcal{A}_{s,r}$ dans $\mathcal{A}_{n,r}$, et $\mathcal{B}_{s,r}$ dans $\mathcal{B}_{n,r}$; en particulier, elle applique $\mathcal{B}_s$ dans $\mathcal{B}_{n,s}$. Dans cette injection, $\sum_s^*$ est appliqué sur $\bigcup_{r \leqslant s} \sum_r$. Donc l'application $\mathcal{A}_s^* \to \mathcal{A}_n^*$, qui est continue pour les topologies $\mathcal{C}^\Gamma$, induit un homéomorphisme de $\mathcal{A}_s^*/\Gamma_s$ sur $\mathcal{A}_{n,s}^*/\Gamma_n$ (lequel est un sous-espace fermé de $\mathcal{A}_n^*/\Gamma_n$). Dans cet homéomorphisme, chaque $\mathcal{B}_{s,r}^*/\Gamma_s$ s'applique homéomorphiquement sur $\mathcal{B}_{n,r}^*/\Gamma_n$ (pour $0 \leqslant r \leqslant s$), et ces homéomorphismes sont compatibles avec les identifications de $\mathcal{B}_{s,r}^*/\Gamma_s$ (resp. de $\mathcal{B}_{n,r}^*/\Gamma_n$) avec $\mathfrak{S}_r/\Gamma_r$.

REMARQUE. - Dans tout ce qui précède, on a fait choix d'un nombre positif u, dont dépendent les domaines fondamentaux $\sum_r$ (pour $r \leqslant n$) et l'ensemble $\sum_n^*$. En fait, l'ensemble $\mathcal{A}_n^*$ et sa topologie $\mathcal{C}^\Gamma$ ne dépendent pas du choix de u (supposé assez grand). En effet, si $u' > u$, $\sum_n^*(u')$ contient $\sum_n^*(u)$, mais est contenu dans la réunion d'un nombre fini de transformés $M.\sum_n^*(u)$: cela résulte aussitôt des propriétés des ouverts fondamentaux (cf. par exemple l'Exposé 3). De là suit aussi que la topologie $\mathcal{C}^\Gamma$ est la plus fine telle que les injections $M.\overline{\overline{\sum}}_n$ soient continues, en notant $\overline{\overline{\sum}}_n$ l'adhérence (compacte) de $\sum_n$ dans l'espace euclidien ambiant.

La fin du présent exposé est essentiellement consacrée à la démonstration du fait que l'espace quotient $\mathcal{A}_n^*/\Gamma_n$ est compact. Il suffira de prouver que sa topologie est séparée ; en effet, admettons ce dernier résultat, et montrons que $\mathcal{A}_n^*/\Gamma_n$ est compact. Considérons pour cela l'application continue $\overline{\overline{\sum}}_n/R \to \mathcal{A}_n^*/\Gamma_n$ induite par l'injection $\overline{\overline{\sum}}_n \to \mathcal{A}_n^*$, en notant R la relation d'équivalence induite sur $\overline{\overline{\sum}}_n$ par les opérations de Γ_n. C'est une bijection, car tout point de $\mathcal{A}_n^*$ est congru modulo Γ_n à au moins un point de $\overline{\Sigma}_n$. Puisque $\mathcal{A}_n^*/\Gamma_n$ est supposé séparé, il en résulte que $\overline{\Sigma}_n/R$ est séparé ; puisque $\overline{\Sigma}_n$ est compact, l'espace $\overline{\Sigma}_n/R$ est compact. Alors la bijection continue $\overline{\Sigma}_n/R \to \mathcal{A}_n^*/\Gamma_n$ est un homéomorphisme, et $\mathcal{A}_n^*/\Gamma_n$ est donc compact.

4. Quelques lemmes.

LEMME 1. - Etant donné l'entier $r \leqslant n$, il existe un nombre fini de $M_i \in \Gamma_r$ jouissant de la propriété suivante : si $M \in \Gamma_n$ et si $M.\Omega_r$ rencontre Ω_r, alors $M \in \Gamma_{n,r}$, et M opère sur $\mathfrak{S}_r$ comme l'un des M_i.

Cela résulte aussitôt du paragraphe 1 et des propriétés des ouverts fondamentaux du groupe modulaire Γ_r.

LEMME 2. - Etant donné l'entier $r \leqslant n$, soit $M_o \in \Gamma_n$, et soit $z_o \in \Omega_r \cap (M_o.\Omega_r)$ (ce qui exige que $M_o \in \Gamma_{n,r}$). Alors il existe un ouvert euclidien V_o contenant z_o, et nombre fini d'éléments $M_\alpha \in N_{n,r}$ (éléments de Γ_n induisant l'identité sur $\mathfrak{S}_r$) qui jouissent de la propriété suivante : chaque point de $V_o \cap (M_o.\Omega_n^*)$ peut être transformé dans un point de Ω_n^* par l'un des M_α.

DÉMONSTRATION (cf. Exposé 12, pages 11-13). - Tout d'abord, on peut choisir V_o de manière que V_o ne rencontre aucun des $M_o.\Omega_s$ pour $s < r$. Il suffira donc de montrer que, pour chaque entier s tel que $r < s \leqslant n$, il existe un ouvert euclidien V_o contenant z_o, et un nombre fini de $M_\alpha \in N_{s,r}$ qui jouissent de la propriété suivante : chaque point de $V_o \cap (M_o.\Omega_s)$ peut être transformé dans un point de Ω_s par l'un des M_α. C'est cela qu'on va prouver, en écrivant désormais n au lieu de s.

Le groupe $N_{n,r}$ se compose des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_n$ telles que a, b, c, d aient en outre la forme :

$$a = \begin{pmatrix} 1_r & a_{12} \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad b = 0, \quad c = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} \\ c_{21} & c_2 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ d_{21} & d_2 \end{pmatrix}.$$

(On notera que $d = {}^t a^{-1}$). Par la transformation $z \to z^{-1}$, ce groupe $N_{n,r}$ se transforme dans le groupe des transformations $z \to (az+b)(cz+d)^{-1}$ qui est engendré par les trois sous-groupes suivants :

(i) $\quad z \to az\,{}^t a$, où $a = \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$, a_2 unimodulaire entière ;

(ii) $\quad z \to az\,{}^t a$, où $a = \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ a_{21} & 1_{n-r} \end{pmatrix}$, a_{21} entière ;

(iii) $\quad z \to z + b$, où $b = \begin{pmatrix} 0_r & b_{12} \\ {}^t b_{12} & b_2 \end{pmatrix}$, b_{12} et b_2 entières, ${}^t b_2 = b_2$.

Or la transformation $z \to -z^{-1}$ transforme l'ouvert fondamental Ω_n dans l'ensemble des z de la forme (1), où d , w et ξ satisfont à (I). Par la transformation (i), $w = \begin{pmatrix} w_1 & w_{12} \\ 0 & w_2 \end{pmatrix}$ est remplacé par

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_{12}\,{}^t a_2 \\ 0 & w_2\,{}^t a_2 \end{pmatrix} .$$

Par (ii), w est remplacé par $\begin{pmatrix} w_1 & w_{12} + w_1\,{}^t a_{21} \\ 0 & w_2 \end{pmatrix}$. Enfin, par (iii), la partie réelle x de z se trouve augmentée de $\begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ {}^t b_{12} & b_2 \end{pmatrix}$.

En raisonnant comme dans l'Exposé 12 , pages 12-13 , on voit que chaque z assez voisin de z_0 peut être transformé par une transformation de $N_{n,r}$ en un z' de la forme (1') , où d' , w et ξ satisfont à toutes les conditions (I') , sauf peut-être

$$d'_{r+1} < u d'_r .$$

Mais on peut choisir le voisinage V_0 de z_0 assez petit pour que cette condition soit aussi vérifiée (car alors d'_r est uniformément minoré par un nombre > 0 , tandis que d'_{r+1} est très petit). Ayant ainsi choisi V_0 , les $M_\alpha \in N_{n,r}$ qui transforment un point de $V_0 \cap (M_0 . \Omega_n)$ en un point de Ω_n sont en nombre <u>fini</u>, puisque, pour un tel M_α , Ω_n rencontre $M_\alpha M_0 . \Omega_n$. Ceci achève de prouver le lemme 2 .

LEMME 3. - <u>Si</u> U <u>est, dans</u> Ω_n^* , <u>un voisinage de</u> $z \in \Omega_n^*$, <u>alors</u> $\Gamma_n(z).U$ <u>est un</u> $\mathcal{C}^\Gamma$<u>-voisinage de</u> z , <u>en notant</u> $\Gamma_n(z)$ <u>le groupe de stabilité de</u> z , <u>c'est-à-dire le sous-groupe des éléments de</u> Γ_n <u>qui laissent fixe</u> z .

DÉMONSTRATION. - On doit montrer l'existence d'un ouvert euclidien V contenant z et jouissant de la propriété suivante : chaque fois que $M \in \Gamma_n$ est tel que

$z \in M.\Omega_n^*$, on a

$$\Gamma_n(z).U \supset V \cap (M.\Omega_n^*) .$$

Or les M tels que $z \in M.\Omega_n^*$ sont en nombre fini modulo $\Gamma_n(z)$; en effet, supposons $z \in \Omega_r$, et considérons les M_i en nombre fini définis au lemme 1 . Si $z \in M.\Omega_n^*$, on a $z \in M.\Omega_r$, donc M est de la forme $M'M_i$, avec $M' \in N_{n,r} \subset \Gamma_n(z)$.

Il suffit, pour chacun de ces M_i , de trouver un ouvert euclidien V_i contenant z , tel que

$$\Gamma_n(z).U \supset V_i \cap (M_i.\Omega_n^*) . \tag{2}$$

Or appliquons le lemme 2 , en y remplaçant z_0 par z , M_0 par M_i : on trouve un ouvert V_i contenant z , et un nombre fini de $M_\alpha \in N_{n,r} \subset \Gamma_n(z)$, tels que

$$\bigcup_\alpha M_\alpha^{-1} \Omega_n^* \supset V_i \cap (M_i \Omega_n^*) . \tag{3}$$

On peut rapetisser V_i de manière que

$$(M_\alpha V_i) \cap \Omega_n^* \subset U \qquad \text{pour tout } \alpha .$$

On a alors $V_i \cap (M_\alpha^{-1} \Omega_n^*) \subset M_\alpha^{-1} U$, et par suite

$$\bigcup_\alpha M_\alpha^{-1} U \supset V_i \cap \bigcup_\alpha (M_\alpha^{-1} \Omega_n^*) ,$$

ce qui, compte tenu de (3), donne

$$\bigcup_\alpha M_\alpha^{-1} U \supset V_i \cap (M_i \Omega_n^*) ,$$

d'où (2) . Ceci achève la démonstration du lemme 3 .

PROPOSITION 2. - Chaque point $w \in \mathcal{A}_n^*$ possède un $\mathcal{C}\Gamma$-voisinage W jouissant de la propriété suivante : si $M \in \Gamma_n$ est tel que MW rencontre W , alors $M \in \Gamma_n(w)$ (stabilisateur de w).

DÉMONSTRATION. - On peut supposer $w \in \Sigma_n^*$. Par la transformation de Cayley, on est ramené à étudier le cas d'un point $z \in \Omega_n^*$. Supposons $z \in \Omega_r$. D'après le lemme 1 , il existe un nombre fini de $M_i \in \Gamma_n$ jouissant de la propriété suivante : si, pour un $s \geqslant r$ et pour un $M \in \Gamma_n$, $M.\Omega_s$ rencontre Ω_s , alors M opère sur Ω_s et Ω_r comme l'un des M_i . Parmi ces M_i , considérons ceux pour lesquels $M_i z \neq z$. Il existe évidemment un voisinage ouvert euclidien U de z tel que

(4) $(M_i\, U) \cap U = \emptyset$ pour ces M_i .

On peut choisir U de manière que si $M \in \Gamma_n$ est tel que $M(U \cap \Omega_n^*)$ rencontre $U \cap \Omega_n^*$, il existe un $s \geq r$ tel que $M(U \cap \Omega_s)$ rencontre $U \cap \Omega_s$. Alors l'un des M_i est tel que $M_i\,(U \cap \Omega_s)$ rencontre $U \cap \Omega_s$; cet M_i ne satisfait pas à (4), donc $M_i\, z = z$, et par suite M , qui opère sur Ω_r comme M_i , laisse fixe z . Il suffit alors de prendre pour W le saturé de $U \cap \Omega_n^*$ par le groupe $\Gamma_n(z)$, et la proposition est démontrée, en vertu du lemme 3 .

5. L'espace quotient $\mathcal{A}_n^*/\Gamma_n$ est séparé et compact.

Comme on l'a vu au paragraphe 3 , il suffit de montrer que $\mathcal{A}_n^*/\Gamma_n$ est séparé. Soient z et z' deux points de $\mathcal{A}_n^*$ non congrus suivant Γ_n . Il s'agit de construire deux ensembles $\mathcal{C}^\Gamma$-ouverts disjoints, Γ_n-saturés, et contenant respectivement z et z' . On peut supposer que z et z' sont tous deux dans $\sum_n^*$, D'après le lemme 1 , il existe un nombre fini de $M_i \in \Gamma_n$ jouissant de la propriété suivante : si un $M \in \Gamma_n$ est tel que $M.\sum_r$ rencontre $\sum_r$ pour un $r \leq n$, alors M opère sur $\sum_r$ comme l'un des M_i . Choisissons U et U' , voisinages ouverts de z et z' dans $\sum_n^*$, de manière que $M_i\, U \cap U' = \emptyset$ pour chacun des M_i ; alors on a $MU \cap U' = \emptyset$ pour tout $M \in \Gamma_n$. Donc les saturés de U et de U' par Γ_n ne se rencontrent pas ; d'après le lemme 3 , ce sont des ensembles $\mathcal{C}^\Gamma$-ouverts.

C.Q.F.D.

REMARQUE. - Il est facile, à partir de la topologie $\mathcal{C}^\Gamma$ de $\mathcal{A}_n^*$, de retrouver la topologie $\mathcal{C}_0^\Gamma$ de Satake (Exposé 12 , théorème 2). D'une manière générale : soit E un espace topologique séparé dans lequel opère continûment un groupe Γ . Faisons les hypothèses suivantes :

(a) l'espace E/Γ est compact ;

(b) tout point $z \in E$ possède un voisinage U tel que ($M \in \Gamma$ et $(MU) \cap U \neq \emptyset$) entraîne $M \in \Gamma(z)$ (stabilisateur de z). Alors il existe sur E une topologie $\mathcal{C}$ et une seule, moins fine que la topologie donnée, et jouissant des propriétés suivantes :

1° la topologie quotient E/Γ est séparée (donc identique au quotient de la topologie initiale de E) ;

2° chaque $z \in E$ possède un système fondamental de $\mathcal{C}$-voisinages U , saturés pour le groupe $\Gamma(z)$, et tels que $(MU) \cap U = \emptyset$ chaque fois que $M \in \Gamma$ n'appartient pas à $\Gamma(z)$.

En fait, on obtient un système fondamental de $\mathcal{C}$-voisinages de z en saturant, pour $\Gamma(z)$, les voisinages de z dans la topologie initiale de E .