ICHIRO SATAKE

Compactification des espaces quotients de Siegel, I

Séminaire Henri Cartan, tome 10, n° 2 (1957-1958), exp. n° 12, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1957-1958__10_2_A2_0>

COMPACTIFICATION DES ESPACES QUOTIENTS DE SIEGEL, I.

par Ichiro SATAKE

Soient $\mathfrak{S}_n$ l'espace de Siegel, Γ_n le groupe modulaire de Siegel ; on se propose de construire une compactification de l'espace quotient $\Gamma_n \backslash \mathfrak{S}_n$. Bien entendu, il y aurait plusieurs possibilités de compactification ; mais, comme on le verra dans ce qui suit, il serait naturel de considérer une compactification de la forme

$$(\Gamma_n \backslash \mathfrak{S}_n)^* = \Gamma_n \backslash \mathfrak{S}_n \cup \Gamma_{n-1} \backslash \mathfrak{S}_{n-1} \cup \dots \cup \Gamma_0 \backslash \mathfrak{S}_0 \ ;$$

où $\mathfrak{S}_0$ désigne un espace composé d'un seul point, et Γ_0 un groupe composé seulement de l'élément neutre. Le but de cet exposé est de donner la construction topologique de cette compactification. On montrera ensuite, dans les exposés suivants, que $(\Gamma_n \backslash \mathfrak{S}_n)^*$, muni d'une structure d'espace annelé définie canoniquement, est un espace analytique normal qui est réalisable comme une sous-variété algébrique normale dans un espace projectif ; on considèrera en même temps les problèmes correspondants pour tous les groupes commensurables au groupe Γ_n.

Pour mettre en évidence notre méthode, rappelons le cas $n = 1$; dans ce cas, il est bien connu que le domaine fondamental classique pour Γ_1 possède un seul point " parabolique" (point à l'infini), de sorte que l'espace quotient $\Gamma_1 \backslash \mathfrak{S}_1$ se compactifie par l'adjonction d'un seul point P_∞ correspondant à ce point, ou plus précisément à la classe de ce point ; l'espace compactifié, $(\Gamma_1 \backslash \mathfrak{S}_1)^*$ est une surface de Riemann compacte, dont un paramètre local au point P_∞ est donné par $e^{2\pi i z}$ qui applique la partie $y > c$ du demi-plan $\mathfrak{S}_1$ sur un voisinage de P_∞ dans $(\Gamma_1 \backslash \mathfrak{S}_1)^*$. Or les transformés du point à l'infini par Γ_1 ne sont autres que les points rationnels sur l'axe réel et les transformés de la partie $y > c$ sont des horicycles (i.e. des cycles tangents à l'axe réel) à ces points. Donc la compactification $(\Gamma_1 \backslash \mathfrak{S}_1)^*$ s'obtiendra par le procédé suivant : considérer d'abord l'espace $\mathfrak{S}_1^*$ qui est une somme directe du demi-plan $\mathfrak{S}_1$ et de tous les points rationnels, y introduire une topologie en prenant les horicycles comme voisinages des points rationnels, et prendre l'espace quotient $\Gamma_1 \backslash \mathfrak{S}_1^*$ de $\mathfrak{S}_1^*$ par Γ_1. Notre but est de montrer que cette méthode se généralise au cas de n quelconque.

1. Considérations préliminaires.

Soit $\mathfrak{S}_n$ l'espace de Siegel ; on désignera toujours un élément de $\mathfrak{S}_n$ par $Z = X + iY$, $X = (x_{ij})$, $Y = (y_{ij})$, $Y = {}^tWDW$, avec une matrice diagonale $D = (d_i\, \delta_{ij})$ et une matrice triangulaire au sens strict $W = (w_{ij})$. Désignons par $\Omega_n(u)$ $(u > 0)$ l'ensemble des $Z \in \mathfrak{S}_n$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) $\qquad |x_{ij}| < u$,

(ii) $\qquad |w_{ij}| < u \quad (1 \leq i < j \leq n)$,

(iii) $\qquad 1 < ud_1$, $d_i < ud_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n-1)$.

On sait déjà (Exposé 3 , n° 5) que la famille des $\Omega_n(u)$ avec $u > 0$ assez grand est une famille d' "ouverts fondamentaux" pour le groupe modulaire Γ_n . (On s'écarte ici de la définition donnée dans l'exposé 3 ; mais en posant $M_o = \begin{pmatrix} e_n & 0 \\ 0 & e_n \end{pmatrix}$, $e_n = (\delta_{i,n+1-j})$, il est facile de voir que la famille définie dans l'exposé 3 est équivalente à la famille $\{M_o\, \Omega_n(u)\}$ dans la présente notation.)

Soit $0 \leq r \leq n$; on décomposera les matrices en blocs $(r , n-r)$:

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_{12} \\ {}^tZ_{12} & Z_2 \end{pmatrix} , \quad D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} , \quad W = \begin{pmatrix} W_1 & W_{12} \\ 0 & W_2 \end{pmatrix} , \ldots$$

Alors $Z \in \Omega_n(u)$ entraîne $Z_1 \in \Omega_r(u)$, vu la relation

$$(1.1) \qquad {}^tW\, D\, W = \begin{pmatrix} {}^tW_1\, D_1\, W_1 & {}^tW_1\, D_1\, W_{12} \\ 0 & {}^tW_{12}\, D_1\, W_{12} + {}^tW_2\, D_2\, W_2 \end{pmatrix} .$$

Dans ce qui suit, on fixera une fois pour toutes un nombre u tel que $\Omega_r(u)$ soit un ouvert fondamental de Γ_r pour tout $r \leq n$ et on écrira Ω_r au lieu de $\Omega_r(u)$.

Considérons l'ensemble

$$(1.2) \qquad \Omega_n^* = \overline{\Omega}_n \cup \overline{\Omega}_{n-1} \cup \ldots \cup \overline{\Omega}_o$$

(somme au sens abstrait), $\overline{\Omega}_r$ désignant l'adhérence de Ω_r dans $\mathfrak{S}_r$ et $\Omega_o = \mathfrak{S}_o$ (un ensemble composé d'un seul point). On y introduira une topologie "naturelle" : soient U un voisinage de $Z_o \in \overline{\Omega}_r$ dans $\overline{\Omega}_r$, K un nombre positif ; on désignera par $V^{(s)}(U, K)$ $(r \leq s \leq n)$ l'ensemble des $Z \in \bar{\Omega}_s$ telles que $Z_1 \in U$ et $d_{r+1} > K$, Z_1 désignant la matrice de degré r dans la décomposition de Z en blocs $(r, s-r)$ comme ci-dessus et d_{r+1} le $(r+1)$-ième coefficient diagonal de D telle que $Z = X + iY$, $Y = {}^tWDW$; alors un voisinage de Z dans Ω_n^* sera donné par la réunion $\bigcup_{r \leq s \leq n} V^{(s)}(U, K)$; cela revient au même de dire qu'une suite $\{Z_\nu\}$ contenue dans $\bar{\Omega}_s$ converge vers Z_0 de $\bar{\Omega}_r$, si et seulement si $Z_{\nu,1} \to Z_0$ et $d_{\nu,r+1} \to \infty$. Il est clair que ces définitions donnent une topologie séparée de Ω_n^* qui induit dans chaque $\bar{\Omega}_r$ la topologie initiale. Il est aussi clair que toute suite $\{Z_\nu\}$ contenue dans $\bar{\Omega}_s$ possède une suite partielle convergente dans notre sens (pour un r convenablement choisi) ; donc Ω_n^* est un espace séparé, compact.

Soit encore $0 \leq r \leq n$; on décomposera $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n, \mathbb{R})$ comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & B_{12} \\ B_{21} & B_2 \end{pmatrix}, \ldots$$

en blocs $(r, n-r)$. On considerera le sous-groupe $\mathfrak{G}_r^n$ de $Sp(n, \mathbb{R})$ composé des matrices de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & B_1 & B_{12} \\ A_{21} & A_2 & B_{21} & B_2 \\ C_1 & 0 & D_1 & D_{12} \\ 0 & 0 & 0 & D_2 \end{pmatrix} ; \tag{1.3}$$

Il est trivial que le sous-ensemble de toutes les matrices de cette forme est en fait un sous-groupe ; on notera que la seule condition $A_{12} = 0$, $C_{12} = 0$, $C_2 = 0$ (ou la condition $C_{21}=0$, $C_2=0$, $D_{21}=0$) est suffisante pour qu'un élément M de $Sp(n, \mathbb{R})$ appartienne à $\mathfrak{G}_r^n$ à cause de la condition de symplecticité. Il résulte aussi de là que $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathfrak{G}_r^n$ entraîne $M_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \in Sp(r, \mathbb{R})$ et que l'application

$$\varpi_r : M \in \mathfrak{G}_r^n \longrightarrow M_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \in Sp(r, \mathbb{R}) \tag{1.4}$$

est un homomorphisme de $\mathfrak{G}_r^n$ dans $Sp(r, \mathbb{R})$. D'autre part, soit ι_n l'injection canonique de $Sp(r, \mathbb{R})$ dans $Sp(n, \mathbb{R})$ définie par

$$(1.5) \qquad \iota_n : \; M_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \longrightarrow M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ C_1 & 0 & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}$$

On a alors $\varpi_r \circ \iota_n = 1$ (l'identité), ce qui exprime que ϖ_r est surjective et qu'en désignant par $\mathfrak{N}_r^n$ le noyau de ϖ_r, $\mathfrak{C}_r^n$ se décompose en produit semi-direct comme suit :

$$(1.6) \qquad \mathfrak{C}_r^n = \iota_n(Sp(r\,,\,\underset{\sim}{R})) . \mathfrak{N}_r^n .$$

On remarquera que pour le groupe modulaire Γ_n on a la relation

$$(1.7) \qquad \Gamma_n \cap \mathfrak{C}_r^n = \iota_n(\Gamma_r) . (\Gamma_n \cap \mathfrak{N}_r^n) .$$

La signification du groupe $\mathfrak{C}_r^n$ sera montrée dans le lemme suivant :

LEMME 1 (GODEMENT). – Soient $\{Z_\nu\}$, $\{Z'_\nu\}$ des suites contenues dans $\overline{\Omega}_n$;

1° pour que $\{Z_\nu\}$ converge vers $Z_o \in \Omega_r$, il faut et il suffit que Z_ν^{-1} converge vers $\begin{pmatrix} Z_o^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ au sens usuel ;

2° si $\{Z_\nu\}$, $\{Z'_\nu\}$ convergent respectivement vers $Z_o \in \overline{\Omega}_r$, $Z'_o \in \overline{\Omega}_{r'}$ et si $Z'_\nu = M\, Z_\nu$ $(\nu = 1\,,\,2\,,\,\ldots)$ avec une matrice $M \in Sp(n\,,\,\underset{\sim}{R})$, alors on a $r = r'$, $M \in \mathfrak{C}_r^n$ et $Z'_o = \varpi_r(M) Z_o$.

DÉMONSTRATION. – Supposons d'abord que $\{Z_\nu\}$ converge vers Z_o et posons

$$Z_\nu = X_\nu + i\, Y_\nu \ ,$$

$$Y_\nu = {}^tW_\nu\, D_\nu\, W_\nu \ ,$$

$$D_\nu = \begin{pmatrix} D_{\nu,1} & 0 \\ 0 & D_{\nu,2} \end{pmatrix} ,$$

$$X_\nu = \begin{pmatrix} X_{\nu,1} & X_{\nu,12} \\ {}^tX_{\nu,12} & X_{\nu,2} \end{pmatrix} ,$$

$$W_\nu = \begin{pmatrix} W_{\nu,1} & W_{\nu,12} \\ 0 & W_{\nu,2} \end{pmatrix} .$$

$$Z_o = X_o + i\, Y_o \quad ,$$

$$Y_o = {}^tW_o\, D_o\, W_o \quad ;$$

alors $X_{\nu,1} \longrightarrow X_o$, $W_{\nu,1} \longrightarrow W_o$, $D_{\nu,1} \longrightarrow D_o$.

En prenant une suite partielle, on peut supposer de plus que $\{X_\nu\}$, $\{W_\nu\}$ (et pas seulement $\{X_{\nu,1}\}$, $\{W_{\nu,1}\}$) sont convergentes, parce que tous les coefficients de X , W pour $Z \in \bar{\Omega}_n$ sont bornés ; on a alors

$$Z_\nu^{-1} = W_\nu^{-1}\, D_\nu^{-1/2}(i\, E + D_\nu^{-1/2}\, {}^tW_\nu^{-1}\, X_\nu\, W_\nu^{-1}\, D_\nu^{-1/2})^{-1}\, D_\nu^{-1/2}\, {}^tW_\nu^{-1}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} W_o^{-1} & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_o^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left\{ i\, E + M_o \right\}^{-1} \begin{pmatrix} D_o^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^tW_o^{-1} & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$$

où M_o désigne $\begin{pmatrix} D_o^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^tW_o^{-1} & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_o & * \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_o^{-1} & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_o^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ceci est égal à :

$$\begin{pmatrix} W_o^{-1}\, D_o^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left\{ i\, E + \begin{pmatrix} D_o^{-1/2}\, {}^tW_o^{-1}\, X_o\, W_o^{-1}\, D_o^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} D_o^{-1/2}\, {}^tW_o^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} W_o^{-1}\, D_o^{-1/2} \left\{ i\, E_r + D_o^{-1/2}\, {}^tW_o^{-1}\, X_o\, W_o^{-1}\, D_o^{-1/2} \right\}^{-1} D_o^{-1/2}\, {}^tW_o^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Z_o^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où la première assertion de 1° . La réciproque suit immédiatement de là et du fait que chaque suite contenue dans $\bar{\Omega}_n$ possède une suite partielle convergente.

Soit maintenant $\{Z'_\nu\}$ une autre suite qui converge vers $Z'_o \in \bar{\Omega}_{r'}$, et soit $Z'_\nu = (A\, Z_\nu + B)(C\, Z_\nu + D)^{-1}$ avec $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n\, ,\, \underset{\sim}{R})$; on peut supposer que $r' \leq r$. Alors on a

$$Z'^{-1}_\nu = (D\, Z_\nu^{-1} + C)(B\, Z_\nu^{-1} + A)^{-1}$$

et, par passage à la limite, on a

$$\begin{pmatrix} Z_o'^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} B_1 & B_{12} \\ B_{21} & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_o^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} D_1 & D_{12} \\ D_{21} & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_o^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 & C_{12} \\ C_{21} & C_2 \end{pmatrix};$$

les blocs $\begin{pmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_2 \end{pmatrix}$, ... désignant la décomposition des matrices A , ... en blocs $(r , n - r)$. En comparant les coefficients correspondants, on obtient les relations

$$(1.8) \qquad \begin{pmatrix} Z_o'^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (B_1 Z_o^{-1} + A_1) = D_1 Z_o^{-1} + C_1 ,$$

$$(1.9) \qquad \begin{pmatrix} Z_o'^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A_{12} = C_{12} ,$$

$$(1.10) \qquad 0 = D_{21} Z_o^{-1} + C_{21} ,$$

$$(1.11) \qquad 0 = C_2 .$$

Comme la partie imaginaire Y_o de Z_o est $\gg 0$, il résulte de (1.10) que $C_{21} = D_{21} = 0$, ce qui, avec (1.11) , prouve déjà que $M \in \mathfrak{G}_r^n$; on a donc $M_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \in Sp(r , \underset{\sim}{R})$ et par suite (1.8) montre que $\begin{pmatrix} Z_o'^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang r ; donc $r = r'$ et $Z_o' = M_1 Z_o$, ce qui achève la démonstration.

2. Construction de l'espace $\mathfrak{H}_n^*$.

On va maintenant passer à la construction de l'espace $\mathfrak{H}_n^*$ qui est une généralisation, pour le cas de n quelconque, de $\mathfrak{H}_1^*$ énoncé plus haut. On pourrait pour cela se servir du modèle borné de l'espace de Siegel, i.e. l'espace des matrices symétriques complexes W de degré n telles que $\overline{W} W < E_n$. Mais on va construire ici directement l'espace correspondant au demi-plan $\mathfrak{H}_n$.

Soit $\Gamma = \Gamma_n$ le groupe modulaire de Siegel ; considérons l'ensemble des couples (M , Z) avec $M \in \Gamma$, $Z \in \mathfrak{H}_r$ $(0 \leq r \leq n)$; introduisons-y une relation d'équivalence définie par

$$(M , Z) \sim (M' , Z') , \quad Z \in \mathfrak{H}_r , \quad Z' \in \mathfrak{H}_{r'}$$

$$\Longleftrightarrow r = r' , \quad M'^{-1} M \in \mathfrak{G}_r^n , \quad Z' = \omega_r(M'^{-1} M)Z .$$

Il est immédiat que cette relation est en fait une relation d'équivalence ; on note M.Z la classe de (M, Z), et on désigne par $\mathfrak{S}_n^*$ l'ensemble des classes ainsi obtenues. On peut considérer $\mathfrak{S}_r$ comme un sous-ensemble de $\mathfrak{S}_n^*$ par l'injection naturelle $Z \longrightarrow 1.Z$; de même on peut faire opérer Γ sur $\mathfrak{S}_n^*$ par la formule évidente $M_1.(M.Z) = (M_1 M).Z$, parce que $(M, Z) \sim (M', Z')$ entraîne évidemment $(M_1 M, Z) \sim (M_1 M', Z')$. Ces notations sont bien entendu d'accord avec les notations usuelles lorsque $n = r$.

On a donc

$$\mathfrak{S}_n^* = \bigcup_{0 \leq r \leq n} \Gamma \mathfrak{S}_r . \tag{2.1}$$

Plus précisément, si on décompose Γ à droite par $\Gamma \cap \mathfrak{G}_r^n$:

$$\Gamma = \bigcup_i M_{r,i}(\Gamma \cap \mathfrak{G}_r^n) , \tag{2.2}$$

on a une décomposition directe de $\mathfrak{S}_n^*$ comme suit :

$$\mathfrak{S}_n^* = \bigcup_{r,i} M_{r,i} \mathfrak{S}_r . \tag{2.3}$$

D'ailleurs on peut considérer comme $\Omega_n^* \subset \mathfrak{S}_n^*$ et on obtient $\mathfrak{S}_n^* = \Gamma\Omega_n^*$

Cela posé, on va définir une topologie dans $\mathfrak{S}_n^*$; on s'intéressera à une topologie $\mathcal{T}$ sur $\mathfrak{S}_n^*$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1° $\mathcal{T}$ induit dans Ω_n^* sa topologie "naturelle".

2° Les opérations de $M \in \Gamma$ dans $\mathfrak{S}_n^*$ sont continues.

3° Si deux points x, x' de $\mathfrak{S}_n^*$ ne sont pas équivalents par rapport à Γ, il existe des voisinages U de x et U' de x' tels que $\Gamma U \cap U' = \emptyset$.

4° Chaque point $x \in \mathfrak{S}_n^*$ possède un système fondamental de voisinages $\{U\}$ tels que $\Gamma_x U = U$ et que $MU \cap U \neq \emptyset$ entraîne $M \in \Gamma_x$, Γ_x désignant le stabilisateur de x dans Γ.

Or notre résultat principal consiste dans les théorèmes suivants :

THÉORÈME 1. - <u>Parmi les topologies satisfaisant aux conditions</u> 1°, 2°, <u>il en existe une plus fine</u> (notée $\mathcal{T}^\Gamma$) ; <u>elle satisfait aussi à la condition</u> 3°.

THÉORÈME 2. - <u>Il existe une topologie et une seule</u> (notée $\mathcal{T}_0^\Gamma$) <u>satisfaisant aux conditions</u> 1°, 2°, 3°, 4°.

Avant de passer à la démonstration, donnons les conséquences de ces théorèmes. Considérons d'abord l'espace quotient $\Gamma\backslash\mathfrak{S}_n^*$ muni de la topologie induite par $\mathcal{T}^\Gamma$: les ouverts de $\Gamma\backslash\mathfrak{S}_n^*$ sont des images des $\mathcal{T}^\Gamma$-ouverts de $\mathfrak{S}_n^*$ par la projection canonique $\pi_n^* : \mathfrak{S}_n^* \to \Gamma\backslash\mathfrak{S}_n^*$. Alors on a :

THÉORÈME 3. - <u>L'espace quotient</u> $\Gamma\backslash\mathfrak{S}_n^*$ <u>est séparé et compact</u>.

Il est séparé, grâce à la condition 3° ; il est compact, parce qu'il est une image continue de l'espace compact Ω_n^* .

Cela étant, on a $\Gamma\backslash\mathfrak{S}_n^* = \bigcup_{0\leq r\leq n}\Gamma\backslash\Gamma\mathfrak{S}_r$ par (2.1) ; or le stabilisateur de $\mathfrak{S}_r$ dans Γ étant $\Gamma\cap\mathfrak{G}_r^n$ et l'opération de $\Gamma\cap\mathfrak{G}_r^n$ sur $\mathfrak{S}_r$ étant égale à celle de $\varpi_r(\Gamma\cap\mathfrak{G}_r^n) = \Gamma_r$, $\Gamma\backslash\Gamma\mathfrak{S}_r$ s'identifie canoniquement à $\Gamma_r\backslash\mathfrak{S}_r$; donc on a

(2.4) $$\Gamma\backslash\mathfrak{S}_n^* = \bigcup_{0\leq r\leq n}\Gamma_r\backslash\mathfrak{S}_r \ .$$

Il existe plusieurs topologies satisfaisant aux conditions 1° , 2° ; mais chacune d'elles induit la même topologie dans la réunion d'un nombre fini de $M_i\,\Omega_n^*$ $(M_i\in\Gamma)$. Si elle satisfait de plus à la condition 3° , elle induit la même topologie dans l'espace quotient $\Gamma\backslash\mathfrak{S}_n^*$, de sorte qu'on peut considérer dans le théorème 3 que la topologie $\Gamma\backslash\mathfrak{S}_n^*$ est définie par n'importe quelle topologie de $\mathfrak{S}_n^*$ satisfaisant aux conditions 1° , 2° , 3° .

3. <u>Démonstration des théorèmes</u> 1 <u>et</u> 2 .

Définissons d'abord la topologie $\mathcal{T}^\Gamma$ de la manière suivante : on dit qu'un sous-ensemble F de $\mathfrak{S}_n^*$ est fermé au sens de $\mathcal{T}^\Gamma$ si et seulement si $M\,F\cap\Omega_n^*$ est fermé au sens de la topologie "naturelle" de Ω_n^* , pour tout $M\in\Gamma$. Il est clair qu'alors les conditions pour les sous-ensembles fermés d'une topologie sont remplies ; il est aussi clair que la topologie $\mathcal{T}^\Gamma$ ainsi définie satisfait à la condition 2° . Pour vérifier la condition 1° , il suffira de montrer que si F est un fermé dans Ω_n^* (au sens de la topologie naturelle), alors $M\,F\cap\Omega_n^*$ l'est aussi pour tout $M\in\Gamma$; mais c'est une conséquence immédiate du lemme 1 . Il est clair que $\mathcal{T}^\Gamma$ est la plus fine des topologies satisfaisant aux conditions 1° , 2° .

Pour démontrer la dernière assertion du théorème 1, on va donner quelques lemmes :

LEMME 2. - <u>Pour chaque</u> r <u>il existe un nombre fini de</u> $M_i^{(r)}\in\mathfrak{G}_r^n$ <u>telles que les relations</u> $M\,\overline{\Omega}_r\cap\overline{\Omega}_r\neq\emptyset$, $M\in\Gamma$ (donc nécessairement $M\in\mathfrak{G}_r^n$), <u>entraînent</u> $\varpi_r(M) = \varpi_r(M_i^{(r)})$ <u>pour un indice</u> i .

C'est une conséquence immédiate du fait que Ω_r est un "ouvert fondamental" de Γ_r . On notera d'ailleurs que, si $r<n$, il existe un nombre <u>infini</u> de $M\in\Gamma$ telles que $M\,\overline{\Omega}_r\cap\overline{\Omega}_r\neq\emptyset$.

LEMME 3. - <u>Pour chaque</u> $Z \in \bar{\Omega}_r$, <u>il existe un voisinage</u> U <u>de</u> Z <u>relatifs à</u> Ω_n^* <u>et jouissant des propriétés suivantes</u> ;

1° si $M \in \Gamma$ et $MU \cap \Omega^* \neq \emptyset$, on a $M \in \mathfrak{S}_r^n$ et $M Z \in \bar{\Omega}_r$;

2° $M \in \Gamma$ et $M U \cap U \neq \emptyset$ entraînent $M \in \Gamma_Z$ (le stabilisateur de Z dans Γ).

DÉMONSTRATION. - Il est clair que, si $M U \cap \Omega_n^* \neq \emptyset$ pour tous les voisinages U de Z (dans Ω_n^*) , M étant fixée, on a $M Z \in \Omega_n^*$ et donc $M \in \mathfrak{S}_r^n$, $M Z \in \bar{\Omega}_r$. Par conséquent, on peut prendre un voisinage U de Z tel que $U \subset \bigcup_{r \leq s \leq n} \bar{\Omega}_s$ et que l'assertion du lemme soit vraie pour toutes les $M_i^{(s)}$ $(r \leq s \leq n)$ (en nombre fini) énoncées dans le lemme 2 . On va montrer qu'alors l'assertion du lemme est vraie pour toute $M \in \Gamma$. En effet, si $M U \cap \Omega_n^* \neq \emptyset$, on a $M U \cap \bar{\Omega}_s \neq \emptyset$ pour un indice s $(r \leq s \leq n)$; d'après le lemme 2 on a alors $M \in \mathfrak{S}_s^n$ et $\varpi_s(M) = \varpi_s(M_i^{(s)})$. Donc $M_i^{(s)} U \cap \bar{\Omega}_s \neq \emptyset$ et par notre choix de U on a $M_i^{(s)} \in \mathfrak{S}_r^n$, $M_i^{(s)} Z \in \bar{\Omega}_r$; par suite $\varpi_s(M) = \varpi_s(M_i^{(s)}) \in \mathfrak{S}_r^s$, d'où $M \in \mathfrak{S}_r^n$, $\varpi_r(M) = \varpi_r(M_i^{(s)})$ et donc $M Z = M_i^{(s)} Z \in \bar{\Omega}_r$, ce qui prouve la première assertion du lemme. La deuxième assertion du lemme peut se montrer tout pareillement.

LEMME 4. - <u>Soit</u> Z <u>un élément de</u> Ω_r ; <u>si</u> U <u>est un voisinage de</u> Z <u>relatif à</u> Ω_n^* , <u>alors</u> $\tilde{U} = \Gamma_Z U$ <u>est un voisinage de</u> Z <u>au sens de</u> $\mathcal{T}^\Gamma$.

DÉMONSTRATION. - On peut supposer que U vérifie la propriété 1° énoncée dans le lemme 3 ; alors $M \tilde{U} \cap \Omega_n^* \neq \emptyset$, $M \in \Gamma$ entraîne $M \in \mathfrak{S}_r^n$, $M Z \in \bar{\Omega}_r$. Donc il n'existe qu'un nombre fini de possibilités de M (modulo à droite Γ_Z) telles que $M U \cap \Omega_n^* \neq \emptyset$. Il suffira donc de démontrer que $M \tilde{U} \cap \Omega_n^*$ est un voisinage de $M Z$ relatif à Ω_n^* pour ces représentants M modulo Γ_Z en nombre fini. Soient $r \leq s \leq n$, $U_s = U \cap \bar{\Omega}_s$; alors $M \tilde{U} \cap \Omega_n^* = \bigcup_{r \leq s \leq n} M \Gamma_Z U_s \cap \bar{\Omega}_s$. Or comme $\Gamma_Z \supset \Gamma \cap \mathfrak{N}_r^n$ et $\Gamma = \iota_n(\Gamma_r) \cdot (\Gamma \cap \mathfrak{N}_r^n)$,on peut prendre M telle que $M \in \iota_n(\Gamma_r)$. Alors $M \Gamma_Z U_s \cap \bar{\Omega}_s$ contient toutes les matrices $Z^{(s)} \in \bar{\Omega}_s$

telles que $Z^{(s)} = \begin{pmatrix} Z_1^{(r)} & Z_{12} \\ {}^tZ_{12} & Z_2 \end{pmatrix} = X + i Y$, $Y = {}^tW D W$, $D = (d_i \delta_{ij})$, avec

$Z_1^{(r)}$ assez voisine de $M Z$ et d_{r+1} suffisamment grand. (Ceci résulte de la <u>proposition</u> démontrée dans l'Appendice). Donc $M \tilde{U} \cap \Omega_n^*$ est un voisinage de $M Z$ dans Ω_n^* ,

C.Q.F.D.

Maintenant on va démontrer la dernière assertion du théorème 1 . Soient x , x' deux points de $\mathfrak{S}_n^*$, non équivalents par rapport à Γ ; il s'agit de construire des voisinages $\widetilde{U}$, $\widetilde{U}'$ de x , x' respectivement, qui soient Γ-saturés et disjoints ; il suffira de le faire pour deux points Z , Z' appartenant à $\bigcup_{0 \leq r \leq n} \Omega_r$. Soient U , U' des voisinages de Z , Z' respectivement, relatifs à Ω_n^* , tels que $M_i^{(r)} U \cap U' = \emptyset$ pour toutes les $M_i^{(r)}$ dans le lemme 2 ; il est clair qu'alors $M U \cap U' = \emptyset$ pour toute $M \in \Gamma$. Soit $\widetilde{U} = \Gamma U$, $\widetilde{U}' = \Gamma U$; d'après le lemme 4 ils sont des voisinages de Z , Z' respectivement, dans $\mathfrak{S}_n^*$, au sens de $\mathcal{T}^{\Gamma}$, et ils sont Γ-saturés et ne se rencontrent pas, ce qui démontre notre assertion.

Passons à la démonstration du théorème 2 . Définissons la topologie $\mathcal{T}_0^{\Gamma}$ de la manière suivante : on dit que U est un voisinage de $x \in \mathfrak{S}_n^*$ au sens de $\mathcal{T}_0^{\Gamma}$ si et seulement si U est un voisinage Γ_x-saturé de x au sens de $\mathcal{T}^{\Gamma}$. Pour $Z \in \bigcup_{0 \leq r \leq n} \Omega_r$ un tel voisinage contient toujours un voisinage $\widetilde{U} = \Gamma_Z U$ donné dans le lemme 4 ; en y prenant U suffisamment petit tel que la condition 2° du lemme 3 soit remplie, $\widetilde{U} = \Gamma_Z U$ sera un $\mathcal{T}_0^{\Gamma}$-voisinage de Z satisfaisant à la condition 4° ; d'où résulte immédiatement que les conditions pour les systèmes de voisinages sont remplies pour $\mathcal{T}_0^{\Gamma}$; alors il est clair que $\mathcal{T}_0^{\Gamma}$ est une topologie satisfaisant aux conditions 1° , 2° , 3° , 4° ; la condition 1° est remplie, parce que pour $\widetilde{U} = \Gamma_Z U$, on peut faire $\widetilde{U} \cap \Omega_n^* = \bigcup_{M_i^{(s)} \in \Gamma_Z} M_i^{(s)} U \cap \Omega_n^*$ aussi petit qu'on veut en prenant U suffisamment petit.

Finalement, démontrons l'unicité de la topologie satisfaisant aux conditions 1° , 2° , 3° , 4° . Pour cela soit $\mathcal{T}$ une telle topologie et soit $\widetilde{U}_1$ un $\mathcal{T}$-voisinage de $Z \in \Omega_r$ satisfaisant à la condition 4° ; en posant $U = \widetilde{U}_1 \cap \Omega_n^*$, $\widetilde{U} = \Gamma_Z U$, on obtient un $\mathcal{T}_0^{\Gamma}$-voisinage $\widetilde{U}$ de Z , contenu évidemment dans $\widetilde{U}_1$; réciproquement soit $\widetilde{U} = \Gamma_Z U$ un $\mathcal{T}_0^{\Gamma}$-voisinage de $Z \in \Omega_r$; on peut supposer que $\widetilde{U}$ est contenu dans un $\mathcal{T}$-voisinage de $\widetilde{U}_1$ de Z satisfaisant à la condition 4° ; soit d'autre part $\widehat{U}_2 = \Gamma U$; $\widehat{U}_2$ est un $\mathcal{T}$-voisinage de Z , parce qu'il est un $\mathcal{T}_0^{\Gamma}$-voisinage de Z , Γ-saturé et que $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}_0^{\Gamma}$ définissent la même topologie dans l'espace quotient $\Gamma \backslash \mathfrak{S}_n^*$ en vertu des conditions 1° , 2° , 3° ; alors on a $\widetilde{U}_1 \cap \widehat{U}_2 = \widetilde{U}_1 \cap \bigcup_{M_i : \Gamma/\Gamma_Z} M_i \widetilde{U} = \widetilde{U}_1 \cap \widetilde{U} = \widetilde{U}$, donc $\widetilde{U}$ est un $\mathcal{T}$-voisinage de Z , ce qui prouve notre assertion.

La topologie classique de $\mathfrak{S}_1^*$ est $\mathcal{T}_0^{\Gamma}$; on voit facilement que les deux topologies $\mathcal{T}^{\Gamma}$ et $\mathcal{T}_0^{\Gamma}$ sont en fait différentes ; on remarquera aussi que ces topologies ne sont pas localement compactes. On remarquera d'ailleurs que les topologies $\mathcal{T}^\Gamma$ et $\mathcal{T}_o^\Gamma$ induisent la même topologie dans $\mathfrak{S}_r$ $(0 \leq r \leq n)$, i.e. la topologie initiale de $\mathfrak{S}_r$.

APPENDICE

On va ici compléter la fin de la démonstration du lemme 4. En changeant de notations, il s'agit de ceci : soient U_r et U'_r des voisinages de $Z_o \in \Omega_r$ dans Ω_r ; soient K et K' des nombres positifs, $U_s = V^{(s)}(U_r, K)$ l'ensemble de toutes les matrices $Z \in \Omega_s$ telles que $Z = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_{12} \\ {}^tZ_{12} & Z_2 \end{pmatrix} = X + iY$, $Y = {}^tW\,D\,W$, $D = (d_i\,\delta_{ij})$, avec $Z_1 \in U_r$, $d_{r+1} > K$. Soit U'_s l'ensemble défini de manière analogue à U_s, mais en remplaçant Ω_s, U_r et K par $M_o^{-1}\Omega_s$, U'_r et K' respectivement (M_o désigne un élément de $\mathcal{C}_s(\Gamma_r)$). Alors il s'agit de démontrer que, U_r, K et M_o étant donnés, on peut choisir U'_r et K' de manière que

(1) $$U'_s \subset (\Gamma_s)_{Z_o}\, U_s \ .$$

Ensuite il suffira de prendre K'' tel que $M_o^{-1}\,V^{(s)}(M_o\,U'_r\,,\,K'') \subset U'_s$, ce qui est possible grâce à la continuité de M_o^{-1} dans $\Omega_s^* \cup M_o^{-1}\Omega_s^*$.

On va utiliser le résultat suivant :

PROPOSITION. - <u>Avec les notations précédentes, supposons donnés</u> U'_r <u>et</u> M_o (U'_r <u>étant borné</u>). <u>Alors on peut choisir</u> K' <u>de manière que</u> U'_s **<u>soit contenu</u>** **<u>dans</u>** $(\Gamma_s \cap \mathfrak{M}_r^s)\Omega_s$.

L'assertion à démontrer en résultera : on aura en effet un nombre fini de $M_i \in \Gamma_s \cap \mathfrak{M}_r^s$ tels que

$$U'_s \subset \bigcup_i M_i\,\Omega_s$$

et donc, en modifiant U'_r et K' de manière que

$$(M_i^{-1}\,U'_s) \cap \Omega_s \subset U_s \qquad \text{pour tout } i$$

(ce qui est possible grâce à la continuité de M_i^{-1} dans Ω_s^*), on obtiendra

$$U'_s \subset \bigcup_i M_i\,U_s \quad ,$$

d'où (1) .

Ainsi tout revient à prouver la proposition. Soit $Z' = \begin{pmatrix} Z'_1 & Z'_{12} \\ {}^tZ'_{12} & Z'_2 \end{pmatrix} \in U'_s$. On va montrer, en prenant K' assez grand, l'existence d'une $M \in \Gamma_s \cap \mathfrak{M}^s_r$ telle que $M\,Z' \in \Omega_s$. Or le groupe $\Gamma_s \cap \mathfrak{M}^s_r$ est engendré par les transformations de la forme suivante :

(i) $M = \begin{pmatrix} {}^tU & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix}$, avec $U = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}$, U_2 étant entière et unimodulaire ;

(ii) $M = \begin{pmatrix} {}^tU & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix}$, avec $U = \begin{pmatrix} E & U_{12} \\ 0 & E \end{pmatrix}$, U_{12} entière ;

(iii) $M = \begin{pmatrix} E & T \\ 0 & E \end{pmatrix}$, avec $T = \begin{pmatrix} 0 & T_{12} \\ {}^tT_{12} & T_2 \end{pmatrix}$, où T_{12} et T_2 sont entières, et $T_2 = {}^tT_2$.

Si l'on pose

$$Z' = X' + iY' \ , \quad Y' = {}^tW'\,D'\,W' \ , \quad X' = \begin{pmatrix} X'_1 & X'_{12} \\ {}^tX'_{12} & X'_2 \end{pmatrix} \ , \quad W' = \begin{pmatrix} W'_1 & W'_{12} \\ 0 & W'_2 \end{pmatrix} \ ,$$

$D' = \begin{pmatrix} D'_1 & 0 \\ 0 & D'_2 \end{pmatrix}$, alors ces transformations opèrent comme suit :

(i) $\quad W'_{12} \longrightarrow W'_{12}\,U'_2 \ , \quad {}^tW'_2\,D'_2\,W'_2 \longrightarrow {}^tU_2\,{}^tW'_2\,D'_2\,W'_2\,U_2$;

(ii) $\quad W'_{12} \longrightarrow W'_{12} + W'_1\,U_{12} \ , \quad {}^tW'_2\,D'_2\,W'_2$ inchangé ;

(iii) $\quad X'_{12} \longrightarrow X'_{12} + T_{12} \ , \quad X'_2 \longrightarrow X'_2 + T_2 \ , \quad Y'$ inchangé ;

et ces transformations ne changent pas X'_1 , W'_1 et D'_1 . Donc on peut, en faisant $Z'' = M\,Z'$ (où M est du type (i)), faire en sorte que ${}^tW''_2\,D''_2\,W''_2 \in S'(u)$ (notation des Exposés 1 et 2), i.e. que

$$|w''_{ij}| < u \quad (\text{pour} \quad r+1 \leq i < j \leq s) \ , \quad d''_i < u d''_{i+1} \quad (\text{pour} \quad r+1 \leq i < s) \ .$$

Ensuite, en faisant une transformation du type (ii) , on peut faire en sorte que

$$|w''_{ij}| \leq 1/2 \quad (\text{pour} \quad 1 \leq i \leq r \ , \quad r+1 \leq j \leq s) \ .$$

Enfin, on faisant une transformation du type (iii) , on peut faire en sorte que

$$|x''_{ij}| \leq 1/2 \quad \text{pour} \quad r + 1 \leq j \leq s \text{ , quel que soit } i \text{ .}$$

Dans toutes ces transformations $Z''_1 = Z'_1$ ne change pas. Finalement, on voit qu'on peut choisir $M \in \Gamma'_s \cap \mathfrak{P}^s_r$ de manière que $Z'' = MZ'$ satisfasse à toutes les conditions pour appartenir à Ω_s , à la seule exception de la condition

$$d''_r < ud''_{r+1} \quad .$$

Or $d''_r = d'_r$ est borné lorsque Z'_1 parcourt U'_r . De plus, les transformations (i) utilisées ci-dessus sont en nombre fini lorsque Z' parcourt $M_o^{-1}\Omega_s$ avec $Z'_1 \in U'_r$ (en effet, pour $Z' = M_o^{-1} Z \in M_o^{-1} \Omega_s$ et $Z'_1 \in U'_r$, tous les coefficients de $Y'_2 - Y_2$ sont bornés). On peut donc choisir K' ne dépendant que de U'_r , u et M_o , de façon que, pour tout $Z' \in U'_s$, $Z'' = M\,Z'$ satisfasse aussi à $d''_r < ud''_{r+1}$, c'est-à-dire finalement $M\,Z' \in \Omega_s$.

Ceci achève de prouver la proposition.

BIBLIOGRAPHIE

La compactification ci-dessus a été donnée dans :

[1] SATAKE (Ichiro). - On the compactification of the Siegel space, J. Indian math. Soc., new Series, t. 20, 1956, p. 259-281.

(mais en n'utilisant pas l'espace $\mathfrak{S}^*_n$). Le lemme 2 de ce mémoire correspond au lemme 1 de notre exposé, mais la démonstration est beaucoup simplifiée par l'idée de GODEMENT. D'ailleurs l'introduction de l'espace $\mathfrak{S}^*_n$ est préférable surtout en raison de son utilité dans la considération des groupes commensurables au groupe Γ.

On trouvera d'autres méthodes de compactification dans :

[2] SATAKE (Ichiro). - On Siegel's modular functions, Proceedings of the international Symposium on algebraic number theory, Tokyo and Nikko 1955. - Tokyo, Science council of Japan, 1956 ; p. 107-129.

[3] SIEGEL (Carl Ludwig). - Zur Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades, Comm. pure and appl. Math., t. 8, 1955, p. 677-681.