Goro Shimura

Modules des variétés abéliennes polarisées et fonctions modulaires, III

Séminaire Henri Cartan, tome 10, nº 2 (1957-1958), exp. nº 20, p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1957-1958__10_2_A11_0>

2 juin 1958

MODULES DES VARIÉTÉS ABÉLIENNES POLARISÉES ET FONCTIONS MODULAIRES, III.

par Goro SHIMURA

On se propose maintenant de démontrer les théorènes principaux pour lesquels les exposés 18-19 sont des préliminaires. On aura besoin de fonctions thêta ; pour commencer, on va rappeler quelques résultats concernant les formes de Riemann et les fonctions thêta.

7. Formes de Riemann et fonctions thêta.

Soient D un lattice de $\mathbb{C}^n$ et $\{v_1, \dots, v_{2n}\}$ une base de D par rapport à $\mathbb{Z}$. Pour que le tore complexe $\mathbb{C}^n/D$ ait une structure de variété abélienne, il faut et il suffit qu'il existe une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire $\mathcal{E}(x, y)$ de $\mathbb{C}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(F1) la valeur $\mathcal{E}(x, y)$ est entière pour tout $x \in D$, $y \in D$;

(F2) $\mathcal{E}(x, y) = -\mathcal{E}(y, x)$;

(F3) la forme $\mathcal{E}(x, \sqrt{-1}\, y)$ est une forme symétrique positive non-dégénérée.

On appellera une telle forme $\mathcal{E}(x, y)$ une forme de Riemann sur $\mathbb{C}^n/D$. Soit ω la matrice dont les colonnes sont $v_1, \dots, v_{2n}$. Il existe alors une matrice E de degré $2n$ telle qu'on ait

$$\mathcal{E}(\omega a, \omega b) = {}^t aEb$$

pour deux vecteurs a, b de $\mathbb{R}^{2n}$. Les conditions (F1-F3) sont équivalentes aux conditions suivantes :

(E1) les coefficients de E sont entiers ;

(E2) ${}^tE = -E$;

(E3) $\omega\, {}^tE^{-1}\, {}^t\omega = 0$;

(E4) $\sqrt{-1}\quad \omega\, {}^tE^{-1}\, {}^t\bar{\omega}$ est une matrice hermitienne positive non-dégénérée.

Une forme de Riemann sur un tore $\mathbb{C}^n/D$ s'obtient à partir d'un diviseur analytique de $\mathbb{C}^n/D$ ainsi qu'il suit. Soit X un diviseur analytique positif sur $\mathbb{C}^n/D$. On sait qu'il existe une fonction f holomorphe sur $\mathbb{C}^n$ telle qu'on ait

$$(f) = X ,$$

où (f) désigne le diviseur de la fonction f, et qu'on ait

$$f(u + d) = f(u) \exp [\ell_d(u) + c_d]$$

pour chaque $d \in D$, où $\ell_d(u)$ est une forme linéaire sur $\underset{\sim}{C}^n$ et c_d est une constante ; on appellera une telle fonction f une <u>fonction thêta</u> attachée à X. On peut démontrer qu'il existe deux matrices H, H_o de degré $2n$ à coefficients dans $\underset{\sim}{C}^n$ et un vecteur b de $\underset{\sim}{C}^{2n}$ tels que

$$(\theta) \qquad f(\omega x + \omega a) = f(\omega x) \exp [2\pi\sqrt{-1}\ ({}^t aHx + {}^t aH_o a + {}^t ba)] ,$$

pour tout $x \in \underset{\sim}{R}^{2n}$ et tout $a \in \underset{\sim}{Z}^{2n}$; on a de plus

$$H \equiv H_o \pmod{\underset{\sim}{Z}} ,$$

$${}^t H_o = H_o .$$

Posons

$$E = H - {}^t H ;$$

la matrice E ne dépend que de X et non du choix de f ; on la désignera par $E(X)$. Si l'on a $\det E \neq 0$, la matrice donne une forme de Riemann sur $\underset{\sim}{C}^n/D$. Toute forme de Riemann est ainsi obtenue à partir d'un diviseur analytique positif sur le tore.

Soit $\mathfrak{L}$ l'ensemble des fonctions holomorphes f sur $\underset{\sim}{C}^n$ satisfaisant à l'équation (θ) où l'on fixe H, H_o et b. L'ensemble $\mathfrak{L}$ est un espace vectoriel de dimension $(\det E)^{\frac{1}{2}}$ sur $\underset{\sim}{C}$. On peut choisir une base $\{v_1 , \dots , v_{2n}\}$ de telle façon que la matrice E s'exprime sous la forme

$$E = \mu \begin{pmatrix} 0 & -\delta \\ \delta & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & & & 0 \\ & \delta_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \delta_n \end{bmatrix} , \quad \delta_1 = 1 , \quad \delta_i | \delta_{i+1} ,$$

où μ, $\delta_1 , \dots , \delta_n$ sont des entiers positifs ; μ et les δ_i ne dépendent pas du choix de $\{v_i\}$. Le théorème de plongement projectif de $\underset{\sim}{C}^n/D$ par des fonctions thêta s'énonce :

LEMME 8. - Avec les mêmes notations que ci-dessus, soit $\{\theta_o , \dots , \theta_N\}$ une base de $\mathfrak{L}$. Si $\mu \geqslant 3$, on a

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \theta_o(u) & \theta_1(u) & \dots & \theta_N(u) \\ \frac{\partial\theta_o}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial\theta_1}{\partial u_1}(u) & \dots & \frac{\partial\theta_N}{\partial u_1}(u) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\theta_o}{\partial u_n}(u) & \frac{\partial\theta_1}{\partial u_n}(u) & \dots & \frac{\partial\theta_N}{\partial u_n}(u) \end{pmatrix} = n + 1$$

partout sur $\underset{\sim}{C}^n$. Soit θ l'application de $\underset{\sim}{C}^n$ dans l'espace projectif P^N de dimension N , définie par

$$\theta(u) = (\theta_o(u) , \dots , \theta_N(u))$$

pour $u \in \underset{\sim}{C}^n$. Si $\mu \geqslant 3$, θ induit un isomorphisme analytique de $\underset{\sim}{C}^n/D$ sur une variété abélienne A dans P^N ; de plus $\theta(X)$ est une section hyperplane de A .

Soient A une variété abélienne de dimension n , définie par rapport à $\underset{\sim}{C}$, et X un diviseur positif sur A . On sait qu'il existe un isomorphisme analytique η de A sur un tore complexe $\underset{\sim}{C}^n/D$; $\eta(X)$ est alors un diviseur analytique positif sur $\underset{\sim}{C}^n/D$. Posons $E_o(X) = E(\eta(X))$. Pour que l'on ait $\det E_o(X) \neq 0$, il faut et il suffit que X soit non-dégénérée. X et Y étant deux diviseurs positifs sur A , on a $E_o(X) = E_o(Y)$ si et seulement si X et Y sont algébriquement équivalents. Soient A' une autre variété abélienne de dimension n , X' un diviseur positif sur A' et η' un isomorphisme A' sur un tore $\underset{\sim}{C}^n/D'$. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ les formes de Riemann correspondant à $\eta(X)$ et $\eta'(X')$, respectivement, où l'on suppose que X , X' sont non-dégénérés. Soit λ un homomorphisme de A sur A' ; il existe alors une matrice inversible M de degré n telle que l'on ait

$$M(D) \subset D' , \quad M\eta(x) \equiv \eta'(\lambda x) \mod D'$$

pour $x \in A$. On voit que $\mathcal{E}^*(u , v) = \mathcal{E}'(Mu , Mv)$ est la forme de Riemann correspondant à $\eta(\lambda^{-1}(X'))$. Soient ω et ω' dont les colonnes forment des bases de D et de D' , respectivement ; comme on a $M(D) \subset D'$, il existe une matrice T de degré $2n$ à coefficients entiers telle que

$$M\omega = \omega' T .$$

Soient E et E' respectivement les matrices de $\mathcal{E}$ et de $\mathcal{E}'$ par rapport à ω et à ω'. La matrice ${}^tTE'T$ est alors la matrice de $\mathcal{E}^*$ par rapport à ω. Si λ est un homomorphisme de la variété abélienne polarisée $(A , \mathcal{C}(X))$ sur la variété abélienne polarisée $(A' , \mathcal{C}(X'))$, il existe, d'après la définition, deux entiers positifs r, s tels que $r\lambda^{-1}(X')$ soit algébriquement équivalent à sX ; on a alors

$$r\,{}^tTE'T = sE .$$

Si λ est un isomorphisme, et si $\ell(X) = \ell(X')$, on a

$$ {}^tTE'T = E ,$$

et T^{-1} est à coefficients entiers. Réciproquement, s'il existe une matrice complexe M de degré n et une matrice T de degré $2n$ à coefficients entiers telles que l'on ait

$$M\omega = \omega' T , \quad {}^tTE'T = E , \quad \det T = 1 ,$$

les variétés abéliennes polarisées $(A , \mathcal{C}(X))$ et $(A' , \mathcal{C}(X'))$ sont isomorphes.

8. Les groupes paramodulaires.

On va rappeler quelques notions que l'on a déjà étudiées dans l'exposé 3. Soit $\delta_1 , \dots , \delta_n$, n entiers positifs tels que

$$\delta_1 = 1 , \quad \delta_i | \delta_{i+1} \qquad (1 \leq i \leq n - 1) \quad ;$$

et posons

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & & & 0 \\ & \delta_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \delta_n \end{bmatrix} , \qquad E = \begin{bmatrix} 0 & -\delta \\ \delta & 0 \end{bmatrix} .$$

Soient u, v deux matrices de degré n à coefficients dans $\mathbb{C}$. Pour que la matrice $\omega = (u \ \ v)$ satisfasse aux conditions (E3-E4), il faut et il suffit que l'on ait

$$v\delta^{-1}\,{}^tu = u\delta^{-1}\,{}^tv ,$$

$$\sqrt{-1}\,(v\delta^{-1}\,{}^t\bar{u} - u\delta^{-1}\,{}^t\bar{v}) \gg 0 \qquad \text{(positive non-dégénérée)} ;$$

s'il en est ainsi, les deux matrices u, v sont inversibles. Posons $z = \delta v^{-1} u$;

on voit alors que ω satisfait à (E3-E4) si et seulement si la matrice z est symétrique et à partie imaginaire positive non-dégénérée, c'est-à-dire si z est un point de l'espace de Siegel $\mathfrak{S}_n$. On notera désormais pour $z \in \mathfrak{S}_n$

$$\omega_\delta(z) = (z \quad \delta) \;;$$

alors $\omega_\delta(z)$ satisfait à (E3-E4) . Soit $\Gamma'(\delta)$ le groupe des matrices T de degré 2n à coefficients entiers telles que l'on ait

$$^tTET = E \;.$$

On vérifie facilement que le groupe $\Gamma(\delta) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}^{-1} {}^tT^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \middle| T \in \Gamma'(\delta) \right\}$ est un sous-groupe de $Sp(n, \underset{\sim}{R})$. Le groupe $\Gamma(1_n)$ est le groupe modulaire $Sp(n, \underset{\sim}{Z})$. Soient z , z' deux points de $\mathfrak{S}_n$; supposons qu'il existe une matrice T de $\Gamma'(\delta)$ et une matrice M de degré n telles que

$$M\omega_\delta(z) = \omega_\delta(z')T \;.$$

On a alors

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}^{-1} {}^tT^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z' \\ 1 \end{pmatrix} {}^tM^{-1} \;.$$

En posant

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}^{-1} {}^tT^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

on a $U \in \Gamma(\delta)$ et

$$U(z) = (az + b)(cz + d)^{-1} = z' \;.$$

Réciproquement, si l'on a $z' = U(z)$ pour un élément U de $\Gamma(\delta)$, il existe un élément T de $\Gamma'(\delta)$ et une matrice M tels que

$$M\omega_\delta(z) = \omega_\delta(z')T \;.$$

9. Les systèmes analytiques de variétés abéliennes.

Avec les mêmes notations que ci-dessus, soit $D_\delta(z)$ un lattice de $\underset{\sim}{C}^n$ engendré par les colonnes de la matrice $\omega_\delta(z)$ sur $\underset{\sim}{Z}$. Le fait que z est un point de $\mathfrak{S}_n$ entraîne que $\underset{\sim}{C}^n/D_\delta(z)$ a une structure de variété abélienne ; la matrice alternée E définit une forme de Riemann sur $\underset{\sim}{C}^n/D_\delta(z)$. On va donner une base des fonctions thêta correspondant à un multiple de cette forme.

Soit μ un entier positif, et soit g un vecteur de $\underset{\sim}{R}^n$ tel que les coordonnées de $\mu\delta g$ soient entières. Posons, pour $u \in \underset{\sim}{C}^n$, $z \in \mathfrak{S}_n$,

$$\theta_{\mu,g}(u\ ,\ z) = \sum \exp\left[2\mu\pi\sqrt{-1}\left(\frac{1}{2}\ {}^t dzd + {}^t du\right)\right]\ ,$$

où la somme est étendue à tous les vecteurs $d = a + g$, $a \in \underset{\sim}{Z}^n$. On vérifie facilement que, pour $x \in \underset{\sim}{R}^{2n}$, $w \in \underset{\sim}{Z}^{2n}$, on a

$$\theta_{\mu,g}(\omega_\delta(z)(x + w))\ ,\ z) = \theta_{\mu,g}(\omega_\delta(z)x)\ \exp\left[2\pi\sqrt{-1}\ \left({}^t wHx + \frac{1}{2}\ {}^t wH_o\ w\right)\right],$$

où

$$H = -\mu\begin{pmatrix} z & \delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ H_o = -\mu\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$H - {}^t H = \mu E\ .$$

Les $\theta_{\mu,g}$ sont donc des fonctions thêta correspondant à la matrice μE ; de plus, les $\theta_{\mu,g}$ pour $\mu\delta g = (c_1 \ldots c_n)$, $0 \leqslant c_i < \mu\delta_i$, forment une base de l'espace vectoriel des fonctions holomorphes sur $\underset{\sim}{C}^n$ satisfaisant à l'équation (θ) où $H = -\mu\begin{bmatrix} z & \delta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $H_o = -\mu\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $b = 0$. Désignons par $\theta_o(u\ ,\ z)\ ,\ \ldots\ ,\ \theta_N(u\ ,\ z)$ ces $\theta_{\mu,g}(u\ ,\ z)$. Fixons un entier $\mu \geqslant 3$. D'après le lemme 8, l'application $\theta_z(u)$ définie par

$$\theta_z(u) = (\theta_o(u\ ,\ z)\ ,\ \ldots\ ,\ \theta_N(u\ ,\ z))$$

induit un plongement de $\underset{\sim}{C}^n/D_\delta(z)$ dans un espace projectif P^N. Soit $A_\delta(z)$ l'image de cette application ; $A_\delta(z)$ est une variété abélienne. D'après un théorème de Poincaré, ou d'après le lemme 3 de l'exposé 18, le degré de la variété projective $A_\delta(z)$ est $n!\ \mu^n \det\delta$. On voit ainsi que les fonctions $\theta_o(u\ ,\ z)\ ,\ \ldots\ ,\ \theta_N(u\ ,\ z)$ sur $\underset{\sim}{C}^n \times \mathfrak{S}_n$ satisfont aux conditions (S1-S3) de l'exposé 19. On obtient donc, en appliquant le corollaire 1 du théorème 3, des fonctions méromorphes $\Psi_1(z)\ ,\ \ldots\ ,\ \Psi_K(z)$ sur $\mathfrak{S}_n$ telles que l'on ait

$$c(A_\delta(z)) = (1\ ,\Psi_1(z)\ ,\ \ldots\ ,\ \Psi_K(z))$$

chaque fois que les $\Psi_i(z)$ sont définis en z.

PROPOSITION 2. - <u>Soit</u> $\mathfrak{F}_\delta(z)$ <u>la famille projective de</u> $A_\delta(z)$ <u>pour chaque</u> z. <u>Alors, les variétés</u> $\mathfrak{F}_\delta(z)$, <u>pour</u> $z \in \mathfrak{S}_n$, <u>sont toutes de même dimension.</u>

Soit z un point de $\mathfrak{S}_n$, et soit f une transformation projective qui envoie $A_\delta(z)$ sur lui-même. Il existe alors un automorphisme $\mathcal{E}$ de $A_\delta(z)$ et un point a de $A_\delta(z)$ tels que $f(x) = \mathcal{E}x + a$ pour $x \in A_\delta(z)$. Soit X une section hyperplane de $A_\delta(z)$; alors X est linéairement équivalent à $\mathcal{E}(X)_a$. L'automorphisme $\mathcal{E}$ conserve la polarisation $\mathcal{C}(X)$; il n'y a qu'un nombre fini de tels automorphismes $\mathcal{E}$. De plus, comme $\mathcal{E}(X)$ est non-dégénéré, il n'y a qu'un nombre fini d'éléments a de $A_\delta(z)$ tels que $\mathcal{E}(X)_a$ soit linéairement équivalent à X ; on en conclut qu'il n'y a qu'un nombre fini de transformations projectives qui laissent fixe $A_\delta(z)$. Il s'ensuit de là que $\mathfrak{F}_\delta(z)$ est de dimension $(N+1)^2 - 1$, où N est la dimension de l'espace ambiant pour $A_\delta(z)$; ce qui démontre la proposition.

THÉORÈME 4. - Il existe un sous-ensemble analytique Y de $\mathfrak{S}_n$ de codimension 1 et des fonctions méromorphes $\chi_1(z), \dots, \chi_\lambda(z)$ sur $\mathfrak{S}_n$ jouissant des propriétés suivantes :

(m1) les $\mathfrak{F}_\delta(z)$ pour $z \in \mathfrak{S}_n - Y$ sont de même degré ;

(m2) on a

$$c(\mathfrak{F}_\delta(z)) = (1, \chi_1(z), \dots, \chi_\lambda(z))$$

pour chaque point $z \in \mathfrak{S}_n - Y$.

Les fonctions Ψ_i étant comme ci-dessus, soit W un sous-ensemble analytique de $\mathfrak{S}_n$ de codimension 1 tel que les Ψ_i sont holomorphes sur $\mathfrak{S}_n - W$, et soit z_o un point générique de $\mathfrak{S}_n - W$ pour les Ψ_i par rapport à $\mathbb{Q}$. Comme on a

$$c(A_\delta(z_o)) = (1, \Psi_1(z_o), \dots, \Psi_K(z_o)),$$

la variété $A_\delta(z_o)$ est définie par rapport au corps $\mathbb{Q}(\Psi_i(z_o))$, de sorte que $\mathfrak{F}_\delta(z_o)$ est défini par rapport à $\mathbb{Q}(\Psi_i(z_o))$. Il existe donc des éléments $\xi_1, \dots, \xi_\lambda$ de $\mathbb{Q}(\Psi_i(z_o))$ tels qu'on ait

$$c(\mathfrak{F}_\delta(z_o)) = (1, \xi_1, \dots, \xi_\lambda).$$

On obtient, au moyen de la spécialisation générique $(\Psi_i) \to (\Psi_i(z_o))$, des éléments $\chi_1, \dots, \chi_\lambda$ du corps de fonctions $\mathbb{Q}(\Psi_i)$ tels qu'on ait

$$\chi_j(z_o) = \xi_j \quad (1 \leq j \leq \lambda) ;$$

les fonctions χ_j sont méromorphes sur $\mathfrak{S}_n$; et l'on observera que la spécialisation $(\chi_j) \rightarrow (\chi_j(z_o))$ est générique par rapport à $\underset{\sim}{Q}$. On sait qu'il existe un nombre fini d'éléments $a_1 , \dots , a_t$ de $\underset{\sim}{Q}(\chi_j(z_o))$ jouissant de la propriété suivante : si $(\mathfrak{F}' , a'_1 , \dots , a'_t)$ est une spécialisation de $(\mathfrak{F}_\delta(z_o) , a_1 , \dots , a_t)$ par rapport à $\underset{\sim}{Q}$ et si $a'_k \neq 0$ pour tout k , $\mathfrak{F}'$ est une variété irréductible. Soit φ_k , pour chaque k , la fonction de $\underset{\sim}{Q}(\chi_j)$ correspondant à a_k par la spécialisation générique $(\chi_j) \rightarrow (\chi_j(z_o))$; les φ_k sont méromorphes sur $\mathfrak{S}_n$. On voit facilement qu'il existe un sous-ensemble analytique Y de $\mathfrak{S}_n$ de codimension 1 tel que les Ψ_i , les χ_j , et les φ_k soient holomorphes sur $\mathfrak{S}_n - Y$ et qu'on ait $\varphi_k(z) \neq 0$ $(1 \leq k \leq t)$ pour tout $z \in \mathfrak{S}_n - Y$. Soit z' un point de $\mathfrak{S}_n - Y$. Comme z_o est générique pour les Ψ_i et comme les χ_j , les φ_k sont contenus dans $\underset{\sim}{Q}(\Psi_i)$, $(\Psi_i(z_o) , \chi_j(z_o) , \varphi_k(z_o))$ est une spécialisation générique de $(\Psi_i , \chi_j , \varphi_k)$ par rapport à $\underset{\sim}{Q}$. Il en résulte que $(\Psi_i(z') , \chi_j(z') , \varphi_k(z'))$ est une spécialisation de $(\Psi_i(z_o) , \chi_j(z_o) , \varphi_k(z_o))$ par rapport à $\underset{\sim}{Q}$. Soit $(A' , \mathfrak{F}')$ une spécialisation de $(A_\delta(z_o) , \mathfrak{F}_\delta(z_o))$ sur cette spécialisation. Comme on a

$$c(A_\delta(z')) = (1 , \Psi_1(z') , \dots , \Psi_K(z')) ,$$

on voit que $A' = A_\delta(z')$. On peut en déduire que $\mathfrak{F}'$ contient la famille projective $\mathfrak{F}_\delta(z')$ de $A_\delta(z')$. Comme $\mathfrak{F}'$ est une spécialisation de $\mathfrak{F}_\delta(z_o)$, $\mathfrak{F}'$ a la même dimension et le même degré que $\mathfrak{F}_\delta(z_o)$; par suite, $\mathfrak{F}'$ a la même dimension que $\mathfrak{F}_\delta(z')$. D'autre part, comme on a $\varphi_k(z') \neq 0$ pour tout k , la spécialisation $\mathfrak{F}'$ de $\mathfrak{F}_\delta(z_o)$ sur $(a_k) \rightarrow (\varphi_k(z'))$ est irréductible ; on en conclut $\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}_\delta(z')$, de sorte que $\mathfrak{F}_\delta(z')$ a le même degré que $\mathfrak{F}_\delta(z_o)$. Comme $(\chi_j(z') , \mathfrak{F}_\delta(z'))$ est une spécialisation de $(\chi_j(z_o) , \mathfrak{F}_\delta(z_o))$, et comme on a $c(\mathfrak{F}_\delta(z_o)) = (1 , \chi_1(z_o) , \dots , \chi_\lambda(z_o))$, on voit que

$$c(\mathfrak{F}_\delta(z')) = (1 , \chi_1(z') , \dots , \chi_\lambda(z')) ;$$

ce qui complète la démonstration du théorème 4 .

PROPOSITION 3. - <u>Les notations étant comme ci-dessus, pour qu'on ait</u> $\mathfrak{F}_\delta(z) = \mathfrak{F}_\delta(z')$, <u>il faut et il suffit qu'il existe un élément</u> U <u>de</u> $\Gamma(\delta)$ <u>tel que</u> $z' = U(z)$.

Soient z un point de $\mathfrak{S}_n$ et U un élément de $\Gamma(\delta)$. On a vu au n° 8 qu'il existe un élément T de $\Gamma'(\delta)$ et une matrice M tels que $M\omega_\delta(z) = \omega_\delta(U(z))T$. D'après ce qu'on a signalé au n° 7 , les variétés abéliennes

$A_\delta(z)$ et $A_\delta(U(z))$, polarisées par les sections hyperplanes, sont isomorphes ; il suit de là et du théorème 1 de l' exposé 18 , que $A_\delta(U(z))$ est transformée de $A_\delta(z)$ par une transformation projective ; on a donc $\mathfrak{F}_\delta(z) = \mathfrak{F}_\delta(U(z))$. Réciproquement, si l'on a $\mathfrak{F}_\delta(z) = \mathfrak{F}_\delta(z')$, on voit, en suivant le processus inverse, qu'il existe un élément U de $\Gamma(\delta)$ tel qu'on ait $z' = U(z)$.

Soit e le degré des variétés projectives $\mathfrak{F}_\delta(z)$ pour $z \in \mathfrak{S}_n - Y$; et soit Y_0 l'ensemble des points z de $\mathfrak{S}_n$ tels que le degré de $\mathfrak{F}_\delta(z)$ soit $< e$; Y_0 est alors un sous-ensemble de Y . Soit x un point de $\mathfrak{S}_n - Y_0$, et soit $c(\mathfrak{F}_\delta(x)) = (b_0 , \dots , b_\lambda)$. On va démontrer que si $b_p \neq 0$, les fonctions $\chi_j(z)/\chi_p(z)$ sont holomorphes en x pour $0 \leq j \leq \lambda$, où l'on pose $\chi_0(z) = 1$. Supposons que χ_q/χ_p ne soit pas holomorphe en x . D'après le théorème 3 de l'exposé 19 , il existe un voisinage W de x et des fonctions holomorphes $\Phi_i(z)$ sur W tels que l'on ait

$$c(A_\delta(z)) = (\Phi_0(z) , \dots , \Phi_K(z))$$

pour tout $z \in W$. Les χ_j sont des fonctions rationnelles des fonctions $\Phi_i(z)$. Soit z_0 un point générique de W pour les Φ_i par rapport à $\underset{\sim}{Q}$; on peut supposer $z_0 \notin Y$. D'après le même argument que dans la démonstration du lemme 7 , on peut démontrer que $(\Phi_i(x) , \infty)$ est une spécialisation de $(\Phi_i(z_0) , \chi_q(z_0)/\chi_p(z_0))$ par rapport à $\underset{\sim}{Q}$. On prolonge cette spécialisation en une spécialisation

$$(\Phi_i(z_0) , \chi_q(z_0)/\chi_p(z_0) , A_\delta(z_0) , \mathfrak{F}_\delta(z_0)) \rightarrow (\Phi_i(x) , \infty , A' , \mathfrak{F}') .$$

On voit que $A' = A_\delta(x)$, car on a $c(A_\delta(x)) = (\Phi_i(x))$. Par suite, $\mathfrak{F}'$ contient la famille projective $\mathfrak{F}_\delta(x)$ de $A_\delta(x)$. Comme $\mathfrak{F}_\delta(x)$ a la même dimension et le même degré que $\mathfrak{F}_\delta(z_0)$, on a $\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}_\delta(x)$; en d'autres termes, la spécialisation

$$c(\mathfrak{F}_\delta(z_0)) = (\chi_j(z_0)) \rightarrow c(\mathfrak{F}_\delta(x)) = (b_j)$$

est compatible avec la spécialisation $\chi_q(z_0)/\chi_p(z_0) \rightarrow \infty$; ce qui est absurde, car on a $b_p \neq 0$. On a pu ainsi démontrer que les χ_i/χ_p sont holomorphes en x .

Soit maintenant S' l'ensemble des points z de $\mathfrak{S}_n$ tels que le degré de $\mathfrak{F}_\delta(z)$ soit e et que la 0-ième coordonnée de $c(\mathfrak{F}_\delta(z))$ ne soit pas 0 ; et posons $Y_1 = \mathfrak{S}_n - S'$. On a alors $Y \supset Y_1 \supset Y_0$. D'après ce qu'on vient de démontrer, les χ_i sont holomorphes sur $\mathfrak{S}_n - Y_1$ et l'on a

$$c(\mathcal{T}_\delta(z)) = (1\ ,\ \chi_1(z)\ ,\ \dots\ ,\ \chi_\lambda(z))$$

pour tout $z \in \mathfrak{H}_n - Y_1$. D'après la proposition 3 , on voit que l'ensemble Y_1 est invariant par le groupe $\Gamma(\delta)$.

THÉORÈME 5. - Les fonctions χ_i du théorème 4 sont invariantes par le groupe paramodulaire $\Gamma(\delta)$. De plus, z et z' étant deux points de $\mathfrak{H}_n - Y_1$, si l'on a $\chi_i(z) = \chi_i(z')$ pour tout i , il existe un élément U de $\Gamma(\delta)$ tel que $z' = U(z)$.

C'est une conséquence immédiate de la proposition 3 . Nous avons ainsi construit des fonctions automorphes sur $\mathfrak{H}_n$ par rapport au groupe paramodulaire $\Gamma(\delta)$ au moyen des modules des variétés abéliennes polarisées.

Le système $\{A_\delta(z) | z \in \mathfrak{H}_n\}$ dépend du choix d'un entier $\mu \geqslant 3$. Désignons par $\chi_j^{(\delta,\mu)}$ les fonctions χ_i du théorème 4 obtenues à partir du système correspondant à μ . On va démontrer

$$(* *) \qquad \underset{\sim}{Q}(\chi_j^{(\delta,\mu)}) = \underset{\sim}{Q}(\chi_j^{(\delta,\mu')})$$

pour tous μ, μ' . Soit z_0 un point générique de $\mathfrak{H}_n$ pour les $\chi_j^{(\delta,\mu)}$ et les $\chi_j^{(\delta,\mu')}$ par rapport à $\underset{\sim}{Q}$. Soient $A_{\delta,\mu}(z_0)$ et $A_{\delta,\mu'}(z_0)$ respectivement les plongements projectifs de $\underset{\sim}{C}^n/D_\delta(z_0)$ donnés par les fonctions thêta correspondant à μE et à $\mu' E$. Alors on voit facilement que les variétés abéliennes $A_{\delta,\mu}(z_0)$ et $A_{\delta,\mu'}(z_0)$, polarisées par les sections hyperplanes, sont isomorphes. Par suite, leurs corps de modules $\underset{\sim}{Q}(\chi_j^{(\delta,\mu)}(z_0))$ et $\underset{\sim}{Q}(\chi_j^{(\delta,\mu')}(z_0))$ coïncident. Comme z_0 est générique, on a la relation (* *). On désignera par $K(\delta)$ ce même corps de (* *) .

C. L. SIEGEL a défini une fonction modulaire comme quotient de deux formes automorphes de même poids ayant des développements de Fourier, et démontré que toutes les fonctions modulaires sur $\mathfrak{H}_n$ forment un corps de fonctions de dimension $n(n+1)/2$ sur $\underset{\sim}{C}$. BAILY a démontré, au moyen de la compactification de Satake, que si $n > 1$, toute fonction méromorphe sur $\mathfrak{H}_n$ invariante par $\Gamma(1_n)$ se représente comme quotient de deux formes automorphes ayant des développements de Fourier (cf. l'article signalé dans l'exposé 11). D'après SATAKE et CARTAN, ce résultat est maintenant généralisé au cas de tout groupe commensurable au groupe modulaire $\Gamma(1_n)$ (cf. les exposés 11 et 17 ; voir en particulier le théorème fondamental de l'exposé 17). Nous supposons désormais $n > 1$ et désignons par $\mathfrak{M}(\delta)$ le corps des fonctions méromorphes sur $\mathfrak{H}_n$ invariantes par

$\Gamma(\delta)$. D'après les résultats qu'on vient de signaler, $\mathfrak{M}(\delta)$ est un corps de fonctions de dimension $n(n+1)/2$ sur $\underset{\sim}{C}$; et l'on a $\mathfrak{M}(\delta) \supset K(\delta)$. Le corps $\mathfrak{M}(1_n)$ est le corps des fonctions modulaires de Siegel.

THÉORÈME 6. - Les notations étant comme ci-dessus, on a

$$\mathfrak{M}(\delta) = \underset{\sim}{C}.K(\delta) .$$

De plus, les corps $K(\delta)$ et $\underset{\sim}{C}$ sont linéairement disjoints sur $\underset{\sim}{Q}$.

D'après le théorème fondamental de l'exposé 17 , il existe des formes automorphes $f_0(z)$, ... , $f_M(z)$ sur $\mathfrak{S}_n$ par rapport à $\Gamma(\delta)$ telles que l'application

$$z \longrightarrow f(z) = (f_0(z) , \dots , f_M(z))$$

induise un isomorphisme de l'espace quotient $\mathfrak{S}_n/\Gamma(\delta)$ sur un ouvert de Zariski V_0 d'une variété algébrique V dans l'espace projectif P^M . Soient χ_i les fonctions du théorème 4 . Alors il existe des polynômes H_0 , H_i à coefficients dans $\underset{\sim}{C}$, de même degré, tels que l'on ait

$$\chi_i(z) = H_i(f_j(z))/H_0(f_j(z)) .$$

Soit k un sous-corps dénombrable de $\underset{\sim}{C}$ contenant les coefficients de H_0 , H_i , par rapport auquel V et $V - V_0$ soient rationnels. On va démontrer que le corps $k(\chi_i)$ contient les fonctions $f_j/f_{j'}$. Pour cela, supposons que $k(\chi_i)$ ne contienne pas f_p/f_q . Soit z_0 un point générique de $\mathfrak{S}_n - Y_1$ pour les f_j par rapport à k . Alors $k(\chi_i(z_0))$ ne contient pas $f_p(z_0)/f_q(z_0)$; par suite il existe un isomorphisme σ du corps $k(f_j(z_0))$ dans $\underset{\sim}{C}$ tel que l'on ait $\chi_i(z_0)^\sigma = \chi_i(z_0)$ pour tout i et $f_p(z_0)^\sigma / f_q(z_0)^\sigma \neq f_p(z_0)/f_q(z_0)$. Comme V et $V - V_0$ sont rationnels par rapport à k , il existe un point z' de $\mathfrak{S}_n$ tel que $f_j(z') = f_j(z_0)^\sigma$ $(0 \leqslant j \leqslant M)$. On a alors

$$\chi_i(z') = \chi_i(z_0)^\sigma = \chi_i(z_0)$$

pour tout i . Soit z_1 un point générique de $\mathfrak{S}_n - Y_1$ pour les Φ_i et les χ_i par rapport à $\underset{\sim}{Q}$, où les Φ_i sont des fonctions sur un voisinage de z' comme dans le théorème 3 ; soit $(A', \mathfrak{F}')$ une spécialisation de $(A_\delta(z_1) , \mathfrak{F}_\delta(z_1))$ sur la spécialisation

$$(\Phi_i(z_1) , \chi_i(z_1)) \longrightarrow (\Phi_i(z') , \chi_i(z')) .$$

On vérifie alors $A' = A_\delta(z')$ et $\mathfrak{F}' \supset \mathfrak{F}_\delta(z')$. D'autre part, on a

$$c(\mathfrak{F}') = (\chi_i(z')) = (\chi_i(z_0)) = c(\mathfrak{F}_\delta(z_0)) \quad ;$$

d'où résulte $\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}_\delta(z_0)$; ce qui entraîne que $\mathfrak{F}'$ est irréductible. Comme $\mathfrak{F}'$ et $\mathfrak{F}_\delta(z')$ sont de même dimension, on a $\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}_\delta(z')$ en vertu de la relation $\mathfrak{F}' \supset \mathfrak{F}_\delta(z')$. On a donc $\mathfrak{F}_\delta(z') = \mathfrak{F}_\delta(z_0)$. Il suit de là et de la proposition 3 , qu'il existe un élément U de $\Gamma(\delta)$ tel que $z' = U(z_0)$; ce qui est absurde puisqu'on a $f_p(z')/f_q(z') \neq f_p(z_0)/f_q(z_0)$. On a ainsi démontré que $k(\chi_i)$ contient les $f_j/f_{j'}$; ce qui démontre $\mathfrak{M}(\delta) = \underset{\sim}{C}.K(\delta)$. La dernière assertion du théorème sera démontrée dans la section 11 .

10. Fonctions automorphes par rapport aux groupes de congruence.

Soit S_0 l'ensemble des points génériques de $\mathfrak{S}_n$ pour les Ψ_i et les $\theta_j(0, z)$, par rapport à $\underset{\sim}{Q}$, où les Ψ_i sont des fonctions méromorphes sur $\mathfrak{S}_n$ telles que l'on ait

$$c(A_\delta(z)) = (1, \Psi_1(z), \ldots, \Psi_K(z))$$

chaque fois que les $\Psi_i(z)$ sont définis en z . On fixe un point z_0 de S_0 et on considère une variété de Kummer (W, h) de $A_\delta(z_0)$ jouissant des propriétés (W1-W3) de l'exposé 18 . La variété W est définie par rapport à $\underset{\sim}{Q}(\chi_j(z_0))$, et la variété abélienne $A_\delta(z_0)$ et l'application h sont définies par rapport à $\underset{\sim}{Q}(\Psi_i(z_0), \theta_j(0, z_0))$. On supposera que W soit une variété dans un espace projectif. Pour chaque point z' de S_0 , on obtient une spécialisation générique

$$(\Psi_i(z_0), \theta_j(0, z_0)) \rightarrow (\Psi_i(z'), \theta_j(0, z'))$$

par rapport à $\underset{\sim}{Q}$. Soit (W', h') la spécialisation générique de (W, h) sur cette spécialisation. Alors (W', h') est une variété de Kummer de $A_\delta(z')$ jouissant des propriétés (W1-W3) . On notera $W' = W(z')$ et $h'(t) = h(t, z')$ pour $t \in A_\delta(z')$. $W(z')$ est défini par rapport à $\underset{\sim}{Q}(\chi_i(z'))$, et $h(*, z')$ est défini par rapport à $\underset{\sim}{Q}(\Psi_i(z'), \theta_j(0, z'))$.

Soit b un vecteur de $\underset{\sim}{R}^{2n}$; on le considérera comme une matrice à $2n$ lignes et une colonne. Soit $S(b)$ l'ensemble des points génériques de $\mathfrak{S}_n$ pour les Ψ_i , les $\theta_j(0, z)$ et les $\theta_j(\omega_\delta(z)b, z)$. On fixe un point z_0 de $S(b)$ et on considère le point

$$h(\theta(\omega_\delta(z_0)b, z_0), z_0)$$

sur $W(z_o)$; ce point est rationnel par rapport au corps

$$\underset{\sim}{Q}(\Psi_i(z_o) , \theta_j(\omega_\delta(z_o)b , z_o) , \theta_j(0 , z_o)) \ ;$$

il existe donc des fonctions rationnelles φ_α à coefficients dans $\underset{\sim}{Q}$ telles que les coordonnées du point $h(\theta(\omega_\delta(z_o)b , z_o) , z_o)$ soient les

$$\varphi_\alpha(\Psi_i(z_o) , \theta_j(\omega_\delta(z_o)b , z_o) , \theta_j(0 , z_o)) \quad (0 \leq \alpha \leq \nu) .$$

Posons

$$\xi_\alpha(z , b) = \varphi_\alpha(\Psi_i(z) , \theta_j(\omega_\delta(z)b , z) , \theta_j(0 , z))$$

pour chaque α ; les $\xi_\alpha(z , b)$ sont des fonctions méromorphes sur $\mathfrak{S}_n$. On vérifie facilement que si z' est un point de $S(b)$, on a

$$h(\theta(\omega_\delta(z')b , z') , z') = (\xi_0(z' , b) , \ldots , \xi_\nu(z' , b)) .$$

THÉORÈME 7. - <u>Les notations étant comme ci-dessus, soit</u> U <u>un élément de</u> $\Gamma(\delta)$ <u>et soit</u> $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}^{-1} {}^tU^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$. <u>On a alors</u>

$$\xi_\alpha(U(z) , Tb)/\xi_\beta(U(z) , Tb) = \xi_\alpha(z , b)/\xi_\beta(z , b) .$$

Soit z_o un point générique de $\mathfrak{S}_n$ pour les fonctions

$$\Psi_i(z) , \Psi_i(U(z)) , \theta_j(0 , z) , \theta_j(0 , U(z)) , \xi_\alpha(z , b) , \xi_\alpha(U(z) , Tb)$$

par rapport à $\underset{\sim}{Q}$; on peut prendre z_o de telle façon que $z_o \in S(b)$, $U(z_o) \in S(Tb)$. On définit un isomorphisme σ du corps

$$\underset{\sim}{Q}(\Psi_i(z_o) , \theta_j(0 , z_o))$$

par

$$\Psi_i(z_o)^\sigma = \Psi_i(U(z_o)) , \theta_j(0 , z_o)^\sigma = \theta_j(0 , U(z_o)) .$$

On a alors

$$A_\delta(U(z_o)) = A_\delta(z_o)^\sigma , W(U(z_o)) = W(z_o)^\sigma = W(z_o)$$

et $h^\sigma(t) = h(t , U(z_o))$ pour $t \in A(U(z_o))$, où h désigne l'application

$x \to h(x, z_0)$. Il existe une matrice M de degré n telle qu'on ait

(1) $$M\omega_\delta(z_0) = \omega_\delta(U(z_0))T .$$

M donne un isomorphisme de $\mathbb{C}^n/D_\delta(z_0)$ sur $\mathbb{C}^n/D_\delta(U(z_0))$; il existe alors un isomorphisme λ de $A_\delta(z_0)$ sur $A_\delta(U(z_0))$ tel qu'on ait

(2) $$\lambda[\theta(u , z_0)] = \theta(Mu , U(z_0))$$

pour tput $u \in \mathbb{C}^n$. D'après la propriété (W3) de la variété de Kummer $(W(z_0) , h)$, on a

$$h(t , z_0) = h(\lambda t , U(z_0))$$

pour $t \in A_\delta(z_0)$. En vertu des relations (1) , (2) , on a

$$h(\theta(\omega_\delta(z_0)b , z_0) , z_0) = h(\theta(\omega_\delta(U(z_0))Tb , U(z_0)) , U(z_0)) .$$

Comme z_0 est un point de $S(b)$ et comme $U(z_0)$ est un point de $S(Tb)$, on a

$$\xi_\alpha(Z_0 , b)/\xi_\beta(z_0 , b) = \xi_\alpha(U(z_0) , Tb)/\xi_\beta(U(Z_0) , Tb) ;$$

ce qui démontre le théorème, puisque z_0 est un point générique pour les fonctions $\xi_\alpha(z , b)$, $\xi_\alpha(U(z) , Tb)$.

Soit q un entier positif ; on désignera par $\Gamma'(\delta , q)$ le sous-groupe de $\Gamma'(\delta)$ formé des éléments T tels que $T \equiv \pm 1_{2n} \pmod q$, et par $\Gamma(\delta , q)$ le sous-groupe $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}^{-1} {}^tT^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \middle| T \in \Gamma'(\delta , q) \right\}$ de $\Gamma(\delta)$. Soit $\mathfrak{M}(\delta , q)$ le corps des fonctions méromorphes sur $\mathfrak{S}_n$ invariantes par $\Gamma(\delta , q)$. Alors $\mathfrak{M}(\delta , q)$ est une extension galoisienne du corps $\mathfrak{M}(\delta)$ dont le groupe de Galois est isomorphe à $\Gamma(\delta)/\Gamma(\delta , q)$. Nous allons maintenant démontrer que le corps $\mathfrak{M}(\delta , q)$ est engendré par $\xi_\alpha(z , b)$ pour certaines valeurs b .

PROPOSITION 4. - <u>Soient</u> b , b' <u>deux vecteurs de</u> $\mathbb{R}^{2n}$. <u>Alors, pour qu'on ait</u>

$$\xi_\alpha(z , b)/\xi_\beta(z , b) = \xi_\alpha(z , b')/\xi_\beta(z , b') ,$$

<u>pour tous les</u> α , β , <u>il faut et il suffit qu'on ait</u> $b \equiv \pm b' \pmod{\mathbb{Z}^{2n}}$.

Soit z_o un point de $S(b) \cap S(b')$, générique pour les $\xi_\alpha(z, b)$ et les $\xi_\alpha(z, b')$ par rapport à $\underset{\sim}{Q}$. Il n'y a pas d'automorphisme de $A_\delta(z_o)$ autre que $x \longrightarrow \pm x$, puisque $A_\delta(z_o)$ est générique. Par suite, on a

$$h(t, z_o) = h(t', z_o)$$

si et seulement si $t = \pm t'$. On en déduit que l'on a

$$h(\theta(\omega_\delta(z_o)b, z_o), z_o) = h(\theta(\omega_\delta(z_o)b', z_o), z_o)$$

si et seulement si $\omega_\delta(z_o)b \equiv \pm \omega_\delta(z_o)b' \pmod{D_\delta(z_o)}$. En d'autres termes, pour qu'on ait

$$\xi_\alpha(z_o, b)/\xi_\beta(z_o, b) = \xi_\alpha(z_o, b')/\xi_\beta(z_o, b') ,$$

il faut et il suffit qu'on ait $b \equiv \pm b' \pmod{\underset{\sim}{Z}^{2n}}$; ce qui démontre la proposition, car z_o est générique pour les fonctions $\xi_\alpha(z, b)$, $\xi_\alpha(z, b')$.

Soient a_i $(1 \leq i \leq q^{2n})$ les vecteurs de $\underset{\sim}{R}^{2n}$ tels que

$$a_i = q^{-1}(\gamma_1 \dots \gamma_{2n}) , \quad 0 \leq \gamma_j < q .$$

D'après le théorème 7 et la proposition 3 , U étant un élément de $\Gamma(\delta)$, pour qu'on ait

$$\xi_\alpha(U(z), a_i)/\xi_\beta(U(z), a_i) = \xi_\alpha(z, a_i)/\xi_\beta(z, a_i)$$

pour tous les α, β et pour tous les a_i , il faut et il suffit que U soit contenu dans $\Gamma(\delta, q)$. On peut en déduire facilement le théorème suivant :

THÉORÈME 8. - <u>Soit</u> $K(\delta, q)$ <u>le corps engendré sur</u> $\underset{\sim}{Q}$ <u>par les fonctions</u> χ_i <u>et les</u> $\xi_\alpha(z, a_i)/\xi_\beta(z, a_i)$ <u>pour tous les</u> α, β <u>et tous les</u> a_i . <u>On a alors</u>

$$\mathfrak{M}(\delta, q) = \underset{\sim}{C}.K(\delta, q) .$$

11. <u>Corps de constantes des corps de fonctions automorphes.</u>

Les systèmes $\{A_\delta(z) | z \in \mathfrak{S}_n\}$ sont les plus grands systèmes de variétés abéliennes polarisées. En effet, toute variété abélienne polarisée définie par rapport à $\underset{\sim}{C}$, est isomorphe à un membre de ces systèmes. En outre de ces systèmes, il y a divers systèmes de variétés abéliennes polarisées, qui engendrent aussi des fonctions automorphes attachées à certains groupes de transformations. Mais dans cet exposé, on va seulement démontrer un théorème concernant le corps de constantes.

Soit S un ouvert connexe de $\underset{\sim}{C}^m$, et soit f une application holomorphe de S dans $\mathfrak{S}_n$. On fixe un δ et on pose $A(s) = A_\delta(f(s))$. On obtient alors un système $\{A(s) | s \in S\}$ de variétés abéliennes polarisées. Soit $\mathfrak{F}(s)$ la famille projective de $A(s)$ pour chaque $s \in S$. D'après le même procédé que pour $A_\delta(z)$, on obtient des fonctions méromorphes $\varphi_1(s), \ldots, \varphi_K(s)$ telles que

$$c(A(s)) = (1, \varphi_1(s), \ldots, \varphi_K(s))$$

chaque fois que les $\varphi_i(s)$ sont définis en s ; de plus, il existe un sous-ensemble Y' de S de codimension 1 et des fonctions méromorphes $\eta_1(s), \ldots, \eta_\nu(s)$ sur S tels qu'on ait

$$c(\mathfrak{F}(s)) = (1, \eta_1(s), \ldots, \eta_\nu(s))$$

pour $s \in S - Y'$.

Soit k un sous-corps dénombrable de $\underset{\sim}{C}$. Le système $\{A(s) | s \in S\}$ est dit <u>complet</u> par rapport à k s'il satisfait à la condition suivante :

<u>s_1 étant un point générique de S pour les φ_i par rapport à k, si B est une spécialisation de $A(s_1)$ par rapport à k, il existe un point s' tel que les variétés abéliennes $A(s')$, B polarisées par les sections hyperplanes, soient isomorphes.</u>

THÉORÈME 9. - <u>Supposons que le système $\{A(s) | s \in S\}$ soit complet par rapport à un corps dénombrable k. Alors, le corps $k(\eta_1, \ldots, \eta_\nu)$ est une extension régulière de k et l'on a</u>

$$\dim_k k(\eta_1, \ldots, \eta_\nu) = \dim_{\underset{\sim}{C}} \underset{\sim}{C}(\eta_1, \ldots, \eta_\nu).$$

On choisit $\eta_{i_1}, \ldots, \eta_{i_r}$ de telle façon que les η_{i_j} soient algébriquement indépendants sur $\underset{\sim}{C}$ et les η_i algébriques sur $\underset{\sim}{C}(\eta_{i_1}, \ldots, \eta_{i_r})$. On voit facilement qu'il existe un sous-corps k_o de $\underset{\sim}{C}$ engendré sur $\underset{\sim}{Q}$ par un nombre fini d'éléments, tel que les η_i soient algébriques sur $k_o(\eta_{i_1}, \ldots, \eta_{i_r})$; on a alors

$$\dim_{k_o} k_o(\eta_1, \ldots, \eta_\nu) = r = \dim_{\underset{\sim}{C}} \underset{\sim}{C}(\eta_1, \ldots, \eta_\nu).$$

Soit s_o un point générique de S pour les η_i par rapport à $\overline{k}_o$, où $\overline{k}_o$ désigne la clôture algébrique de k_o. Soit V le lieu de $c(\mathfrak{F}(s_o))$ par rapport à $\overline{k}_o$ et soit k_1 le plus petit corps de définition pour V. Le corps k_1 est un sous-corps de $\overline{k}_o$ engendré sur $\mathbb{Q}$ par un nombre fini d'éléments. On voit que $(1, \eta_1, \dots, \eta_\nu)$ est une spécialisation générique de $c(\mathfrak{F}(s_o))$ par rapport à $\overline{k}_o$, et donc par rapport à k_1 ; on en déduit

$$\dim_{k_1} k_1(\eta_1, \dots, \eta_\nu) = r = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(\eta_1, \dots, \eta_\nu) .$$

En vertu du fait que k_1 est un corps de définition pour la variété V, on voit que le corps $k_1(\eta_1, \dots, \eta_\nu)$ est une extension régulière de k_1. Notre théorème sera donc démontré si nous faisons voir que k contient k_1. Dans ce but, supposons que k ne contienne pas k_1 ; alors, K étant le corps composé $k.k_1$, il existe un isomorphisme σ du corps K dans C tel que σ soit l'identité sur k et qu'on ait $V \neq V^\sigma$. Soit s_1 un point générique de S pour les φ_i par rapport à K ; on vérifie aisément que $c(\mathfrak{F}(s_1))$ est un point générique de V par rapport à K. Soit w un point générique de V par rapport au corps composé $K.K^\sigma$. Il existe alors un isomorphisme τ de $K(c(\mathfrak{F}(s_1)))$ sur $K^\sigma(w)$ tel que l'on ait $c(\mathfrak{F}(s_1))^\tau = w$ et $\tau = \sigma$ sur K. Prolongeons τ à un isomorphisme de $K(c(A(s_1)))$ que l'on désignera encore par τ. Soient $B = A(s_1)^\tau$ et $\mathfrak{F}'$ la famille projective de B ; on a alors $\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}(s_1)^\tau$, $c(\mathfrak{F}') = c(\mathfrak{F}(s_1))^\tau = w$. Comme τ est l'identité sur k, B est une spécialisation générique de $A(s_1)$ par rapport à k. D'après notre hypothèse, il existe un point s' de S tel que les variétés abéliennes B et $A(s')$, polarisées par les sections hyperplanes, soient isomorphes. Il en résulte qu'on a $\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}(s')$. On voit, en vertu du corollaire 2 du théorème 3, que $A(s')$ est une spécialisation de $A(s_1)$ par rapport à K. Soit $(A(s'), \mathfrak{F}'')$ une spécialisation de $(A(s_1), \mathfrak{F}(s_1))$ par rapport à K ; on voit que $\mathfrak{F}''$ contient la famille projective $\mathfrak{F}(s')$ de $A(s')$. Comme on a $\mathfrak{F}(s') = \mathfrak{F}' = \mathfrak{F}(s_1)^\tau$, $\mathfrak{F}(s')$ a la même dimension et le même degré que $\mathfrak{F}(s_1)$, et par conséquent que $\mathfrak{F}''$; d'où résulte qu'on a $\mathfrak{F}'' = \mathfrak{F}'$. On a ainsi démontré que $\mathfrak{F}'$ est une spécialisation de $\mathfrak{F}(s_1)$ par rapport à K ; en d'autres termes, $w = c(\mathfrak{F}')$ est une spécialisation de $c(\mathfrak{F}(s_1))$ par rapport à K ; donc w est un point de V ; ce qui est absurde, car w est un point générique de V^σ par rapport à $K.K^\sigma$. Par suite k doit contenir k_1 ; ceci achève la démonstration.

Le système $\{A_\delta(z) | z \in \mathfrak{S}_n\}$ est complet par rapport à $\mathbb{Q}$, pour tout δ. En effet, soient z_1 un point de $\mathfrak{S}_n$ et B une spécialisation de $A_\delta(z_1)$

par rapport à $\mathbf{Q}$. Soient X et X' les sections hyperplanes de $A_{\delta}(z_1)$ et de B , respectivement ; et soient $E(X)$ et $E(X')$ les matrices alternées correspondant aux diviseurs X et X' , respectivement, par rapport à certains systèmes de matrices coordonnées. On voit alors facilement que les diviseurs élémentaires des matrices $E(X)$ et $E(X')$ sont les mêmes, en considérant les représentations ℓ-adiques. Il existe donc un membre $A_{\delta}(s')$ du système tel que les variétés abéliennes $A(s')$ et B porlarisées par les sections hyperplanes, soient isomorphes, comme on l'a signalé au n° 7 . On peut donc appliquer le théorème 9 aux corps $\mathbf{Q}$ et $K(\delta)$. Le corps $K(\delta)$ est alors une extension régulière de $\mathbf{Q}$, de dimension $n(n + 1)/2$; ce qui démontre la dernière assertion du théorème 6 .