Séminaire Henri Cartan

Roger Godement

Généralités sur les formes modulaires, I

Séminaire Henri Cartan, tome 10, n° 1 (1957-1958), exp. n° 7, p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1957-1958__10_1_A7_0>

13 janvier 1958

GÉNÉRALITÉS SUR LES FORMES MODULAIRES, I.

par Roger GODEMENT.

On trouvera dans un exposé ultérieur, dont il n'est pas encore possible de prévoir le numéro, la suite de l'exposé précédent (n° 6). Les résultats du présent exposé ne reposent pas sur ceux de l'Exposé 6 (sauf en ce qui concerne la définition du produit scalaire de deux formes modulaires, qui est de toute façon triviale), et ne supposent connus, de l'Exposé 5 , que les deux premiers numéros, relatifs aux représentations de $GL(n , \underline{C})$ [1].

1. Une généralisation de la notion de forme automorphe.

Soient Γ un sous-groupe discret de $Sp(n , \underline{R})$ et ρ une représentation holomorphe de $GL(n , \underline{C})$ dans un espace vectoriel complexe F_ρ de dimension finie ; on a défini dans l'Exposé 4 les formes automorphes d'espèce ρ pour Γ comme étant les applications holomorphes $f(z)$ du demi-plan de Siegel dans F_ρ qui vérifient la relation

$$f(Mz) = \rho(cz + d)f(z) \quad \text{pour} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma . \tag{1.1}$$

Nous allons maintenant définir une notion un peu plus générale (qui d'ailleurs rentre dans le cadre des "facteurs d'automorphie" de l'Exposé 4 , n° 1).

Donnons-nous en plus de ρ une représentation linéaire

$$M \longrightarrow \mu(M)$$

du groupe Γ dans un espace vectoriel F_μ de dimension finie ; nous appellerons alors forme automorphe d'espèce (ρ , μ) pour Γ toute application holomorphe $z \rightarrow f(z)$ du demi-plan de Siegel dans l'espace (vectoriel complexe de dimension finie)

$$\mathrm{Hom}(F_\mu , F_\rho)$$

---

[1] Convention d'écriture. - Dans cet exposé, comme dans le précédent, exceptionnellement, les lettres soulignées d'un trait rectiligne ont la même signification que les lettres soulignées d'un trait ondulé dans les autres exposés de ce Séminaire : elles apparaîtraient en caractères gras en typographie.

les applications linéaires de F_μ dans F_ρ , vérifiant la relation

(1.2) $$f(Mz) = \rho(cz + d) \circ f(z) \circ \mu(M^{-1}) \quad \text{pour toute} \quad M \in \Gamma .$$

L'espace vectoriel formé par ces fonctions $f(z)$ sera désigné par

$$\mathcal{H}(\mu ; \rho) .$$

Indiquons tout de suite la raison pour laquelle il est indispensable d'introduire la notion précédente. Soit Γ' un sous-groupe discret de $Sp(n , \underline{R})$ commensurable à Γ ; on a donc un groupe

$$\Gamma_o \subset \Gamma \cap \Gamma'$$

qui est invariant et d'indice fini dans Γ et Γ' à la fois. Nous allons montrer que, pour toute forme automorphe f' d'espèce ρ pour Γ', on peut construire canoniquement une représentation μ de Γ et une forme automorphe d'espèce (μ , ρ) pour Γ (et la représentation μ sera d'ailleurs triviale sur Γ_o) .

Considérons pour cela, pour chaque $M \in Sp(n , \underline{R})$, l'opérateur $L_\rho(M)$ défini dans l'exposé 6 , n° 6 : il est défini dans l'espace des fonctions $f(z)$ à valeurs dans F_ρ , et donné par

(1.3) $$L_\rho(M)^{-1} : f(z) \longrightarrow \rho(cz + d)^{-1} f(Mz) .$$

(On a pris $f(z) \longrightarrow \rho(cz + d)^{-1} f(Mz)$ pour opérateur $L_\rho(M^{-1})$ de façon à ce que le groupe symplectique opère à gauche sur les fonctions $f(z)$; la convention adoptée ici est donc opposée à celle de l'Exposé 6 , ce qui n'a bien entendu aucune importance). Puisque f' est une forme automorphe d'espèce ρ pour Γ' , il est clair qu'on a

(1.4) $$L_\rho(M)f' = f' \qquad \text{pour tout} \quad M \in \Gamma' .$$

Considérons alors l'espace vectoriel E engendré par les fonctions

$$L_\rho(M)f' \quad , \quad M \in \Gamma ;$$

en vertu de (1.4) et du fait que Γ_o est d'indice fini dans Γ , il est clair que E est de dimension finie ; on a de plus une représentation linéaire μ de Γ dans E en définissant

(1.5) $$\mu(M) : \quad f \rightarrow L_\rho(M)f \quad \text{pour} \quad f \in E ,$$

et il est clair qu'en fait μ est une représentation du groupe fini Γ/Γ_o .

Cela fait, attachons à chaque point z du demi-plan de Siegel l'application linéaire

(1.6) $$u(z) : \quad f \longrightarrow f(z)$$

de E dans F_ρ ; on obtient ainsi une fonction holomorphe u à valeurs dans $\mathrm{Hom}(E\,,\,F_\rho)$; calculons maintenant $u(Mz)$ pour $M \in \Gamma$; on a par définition

(1.7) $$u(z)f = f(z) \qquad \text{pour} \quad f \in E\,,$$

donc

$$\begin{aligned} u(Mz)f = f(Mz) &= \rho(cz+d)\,\rho(cz+d)^{-1} f(Mz) \\ &= \rho(cz+d)\,\mu(M^{-1})f(z) = \rho(cz+d)u(z)\,\mu(M^{-1})f \end{aligned}$$

et comme $f \in E$ est arbitraire il vient

$$u(Mz) = \rho(cz+d) \circ u(z) \circ \mu(M^{-1}) \quad ,$$

ce qui prouve que u est une forme automorphe d'espèce $(\mu\,;\,\rho)$ pour le groupe Γ ; il est clair d'après (1.7) que la donnée de u permet de reconstituer f', à l'aide du procédé général que voici.

Soit u une forme automorphe d'espèce $(\mu\,;\,\rho)$ pour Γ, et supposons que le noyau $\Gamma_\mu \subset \Gamma$ de la représentation μ de Γ soit d'indice fini dans Γ. Pour un vecteur $\underline{a} \in F$ donné considérons la fonction

$$f_{\underline{a}}(z) = u(z)\underline{a} \quad ,$$

à valeurs dans F_ρ ; alors $f_{\underline{a}}$ est une forme automorphe d'espèce ρ pour Γ_μ, comme on le vérifie trivialement.

Par la suite nous nous intéresserons presque uniquement aux représentations μ de Γ qui vérifient la condition précédente (on les appellera des multiplicateurs du groupe Γ). La nécessité d'admettre de tels multiplicateurs est bien connue dans les cas les plus classiques ; pour obtenir une théorie vraiment complète on devrait même admettre des représentations ρ "non uniformes" de $GL(n\,,\,\underline{C})$, de façon à récupérer la théorie des formes modulaires "de poids non entier", étudiée dans le cas classique par PETERSSON, et qui se présente fatalement pour une fonction telle que

$$\eta(z) = \sqrt[24]{\Delta(z)} = e^{\pi i z/12} \cdot \prod_{n=1}^{n=+\infty} (1 - e^{2\pi i n z})$$

cette fonction est une forme de poids 1/2 pour le groupe modulaire usuel, avec un multiplicateur dont la détermination complète est un problème non trivial et fort célèbre (les valeurs du multiplicateur sont des racines 24-ièmes de l'unité). Cependant nous nous bornerons aux représentations ρ "uniformes" dans ce qui suit, pour des raisons de simplicité ; pour traiter le cas général il serait indispensable de remplacer le groupe symplectique $Sp(n, \underline{R})$ par son revêtement simplement connexe (comme HARISH-CHANDRA l'a fait, à propos d'un autre problème, dans les articles cités au précédent exposé).

Notons enfin que la méthode de passage de Γ' à Γ exposée plus haut s'applique en particulier au cas où Γ est le <u>groupe modulaire</u> de Siegel et Γ' un <u>groupe paramodulaire</u> ; il est raisonnable de conjecturer que ce procédé permet de déduire trivialement les résultats relatifs aux groupes paramodulaires de ceux qu'on obtiendra pour le groupe modulaire ; mais bien entendu "on" n'a pas vérifié cette conjecture dans tous les cas !

2. - <u>Définition des Spitzenformen</u>.

Dans ce numéro on désigne par Γ le <u>groupe modulaire de Siegel</u> $Sp(n, \underline{Z})$. On se donne une représentation holomorphe ρ de $GL(n, \underline{C})$ dans un espace vectoriel complexe F_ρ de dimension finie, et une représentation μ de Γ dans un espace vectoriel complexe F_μ de dimension finie ; on supposera que μ est équivalente à une représentation <u>unitaire</u> de Γ (ce qui est évidemment le cas lorsque le noyau de μ est d'indice fini dans Γ). Nous introduirons les notations suivantes : pour

$$M = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (n = n' \text{ entière})$$

on posera $\mu(M) = \mu(n)$, d'où une représentation unitaire du groupe abélien discret des n dans F_μ ; de même pour

$$M = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u'^{-1} \end{pmatrix} \qquad (u \text{ entière unimodulaire})$$

on posera $\mu(M) = \mu(u)$, d'où une représentation unitaire de $SL(n, \underline{Z})$ dans F_μ.

Soit $f(z)$ une forme modulaire d'espèce $(\mu ; \rho)$. On a la relation

$$f(z + n) = f(z) \circ \mu(n)^{-1} \; ; \tag{2.1}$$

or la représentation $n \longrightarrow \mu(n)$, étant semblable à une représentation unitaire, est somme directe de représentations de dimension 1 correspondant à des caractères de module 1 du groupe additif des n, autrement dit il y a une base $(\underline{e}_k)$ de F_μ formée de vecteurs vérifiant des relations

$$\mu(n)\underline{e}_k = \exp(2\pi i Tr(s_k n))\underline{e}_k \tag{2.2}$$

avec des $s_k = s'_k$ réelles ; il s'ensuit que la fonction $f(z)$ est elle-même somme de fonctions $f_k(z)$ pour lesquelles on a

$$f_k(z+n) = \exp(-2\pi i \mathrm{Tr}(s_k n)) f_k(z) ,$$

ce qui veut dire que la fonction holomorphe $f_k(z)\exp(2\pi i \mathrm{Tr}(s_k z))$ est de période 1 , donc admet un développement en série de Fourier ; en revenant à $f(z)$ on trouve finalement une série de Fourier

$$f(z) = \sum \hat{f}(s)\exp(2\pi i \mathrm{Tr}(sz)) \quad , \tag{2.3}$$

où la sommation est étendue à toutes les matrices $s = s'$ réelles (pas forcément demi-entières !) telles que le caractère

$$n \longrightarrow \exp(2\pi i \mathrm{Tr}(sn))$$

intervienne dans la représentation $n \longrightarrow \mu(n)$ (cela veut dire en particulier que les s sont soumises à des conditons de congruence) ; les coefficients $\hat{f}(s)$ sont des applications linéaires de F_μ dans F_ρ , assujetties à vérifier

$$\hat{f}(s) \circ \mu(n)^{-1} = \exp(2\pi i \mathrm{Tr}(sn))\hat{f}(s) , \tag{2.4}$$

et que l'on calcule comme suit : pour toute matrice $s = s'$ réelle désignons par $\hat{\mu}(s)$ l'opérateur de projection (dans F_μ) sur le sous-espace des vecteurs $\underline{a} \in F$ qui vérifient

$$\mu(n)\underline{a} = \exp(-2\pi i \mathrm{Tr}(sn))\underline{a} \quad ; \tag{2.5}$$

évidemment $\hat{\mu}(s)$ ne dépend que de la classe de s modulo 1 , et l'on a

$$\hat{f}(s) = \int_{x \bmod 1} f(z) \circ \hat{\mu}(s)\exp(-2\pi i \mathrm{Tr}(sz))dx \qquad (z = x+iy) \tag{2.6}$$

l'intégrale ayant un sens pour la raison que (2.1) et l'identité

$$\mu(n) \circ \hat{\mu}(s) = \hat{\mu}(s) \circ \mu(n) = \hat{\mu}(s)\exp(-2\pi i \mathrm{Tr}(sn)) \tag{2.7}$$

montrent que la fonction sous le signe $\int$ dans (2.6) est périodique (i.e. invariante par $z \longrightarrow z \mp n$).

Tenons compte maintenant du groupe des matrices

$$M = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u'^{-1} \end{pmatrix} \qquad (\bar{u} \text{ entière unimodulaire}) ;$$

tout d'abord l'identité

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \check{u} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \check{u} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & unu' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\check{u} = u'^{-1})$$

donne la relation

(2.8) $$\mu(unu') = \mu(u) \circ \mu(n) \circ \mu(u)^{-1} \quad ;$$

il s'ensuit aussitôt que l'ensemble des matrices s qui interviennent dans la série de Fourier (2.3) est stable par $s \longrightarrow usu'$, et en explicitant la relation

(2.9) $$f(uzu') = \rho(\check{u}) \circ f(z) \circ \mu(u)^{-1}$$

on trouve immédiatement

(2.10) $$\hat{f}(usu') = \rho(u) \circ \hat{f}(s) \circ \mu(u') .$$

Il résulte de là que le théorème de KOECHER

(2.11) $$\hat{f}(s) \neq 0 \qquad \text{implique} \quad s \geqslant 0$$

s'applique, si $n > 1$ bien entendu (Exposé 4 , n° 3 , Théorème 1 ; dans la démonstration donnée à l'Exposé 4 , l'hypothèse que la matrice s soit demi-entière est visiblement superflue ; l'essentiel est d'avoir la relation (12) de l'Exposé 4 ; bien entendu pour avoir (2.11) il faut appliquer le théorème de l'Exposé 4 en prenant $\gamma = SL(n , \underline{Z})$, $F = Hom(F_\mu , F_\rho)$, et pour représentation de γ dans F celle qui se construit de façon évidente à l'aide de ρ et de μ).

Nous dirons par la suite que $f(z)$ est une Spitzenform si

(2.12) $$\hat{f}(s) \neq 0 \qquad \text{implique} \quad s \gg 0 .$$

Tout ce qui a été dit dans l'Exposé 4 lorsque le multiplicateur est trivial s'applique sans changement à la situation présente, comme le lecteur le constatera facilement.

EXEMPLE. - Soient Γ' un groupe commensurable au groupe modulaire et f' une forme automorphe d'espèce ρ pour Γ' ; on en déduit, par le procédé indiqué au numéro précédent, un forme modulaire f d'espèce $(\rho ; \mu)$ pour une certaine représentation μ de Γ (F_μ n'est autre que l'espace vectoriel engendré par les fonctions $L_\rho(M)f'$, $M \in \Gamma$; $\mu(M)$ est l'opérateur $L_\rho(M)$ regardé dans F_μ ; et $f(z)$ est l'application linéaire $g \longrightarrow g(z)$ de F_μ dans F_ρ) ; nous dirons alors que f' est une Spitzenform pour Γ' si f est une Spitzenform pour Γ ; cela signifie évidemment que, pour tout $M \in \Gamma$, la série de Fourier de la fonction $L_\rho(M)f'(z)$ ne comporte que des termes $s \gg 0$; on retrouve ainsi la définition de KOECHER pour les "groupes de congruences" , en particulier pour les groupes paramodulaires. Dans le cas classique $(n = 1)$ f' est une Spitzenform si et seulement si f' est nulle en toutes les "pointes" du domaines fondamental de Γ'.

REMARQUE. - Lorsque le noyau de la représentation μ de Γ est <u>d'indice fini</u> dans Γ (i.e. lorsque μ est un <u>multiplicateur</u> pour Γ), les matrices s qui interviennent dans les séries de Fourier considérées plus haut sont nécessairement <u>rationnelles</u>. En effet, ces s sont caractérisées par le fait que la représentation $n \longrightarrow \mu(n)$ du groupe des translations entières contient le caractère $n \longrightarrow \exp(-2\pi i \operatorname{Tr}(sn))$ de ce groupe ; mais si le noyau de μ est d'indice fini, on a évidemment $\mu(n) = 1$ dès que n est multiple d'un entier q convenablement choisi, ce qui veut dire que $\exp(-2\pi i \operatorname{Tr}(qsn)) = 1$ pour toute n entière ; donc la matrice qs est demi-entière, ce qui établit notre assertion.

3. - <u>Produit scalaire de deux formes modulaires</u>.

Soient Γ un sous-groupe discret de $Sp(n, \underline{R})$, ρ une représentation holomorphe de $GL(n, \underline{C})$ dans un espace F_ρ, et μ une représentation de Γ dans un espace F_μ ; nous supposerons F_ρ muni d'un produit scalaire <u>adapté à</u> ρ (Exposé 5, n° 2), et F_μ d'un produit scalaire tel que la représentation μ soit <u>unitaire</u> (ce qui est une hypothèse sur μ ...). Etant donné un homomorphisme

$$u : F_\mu \longrightarrow F_\rho$$

on a alors un homomorphisme <u>adjoint</u>

$$u^* : F_\rho \longrightarrow F_\mu$$

défini par la relation

$$(3.1) \qquad \langle u(\underline{a}), \underline{b} \rangle = \langle \underline{a}, u^*(\underline{b}) \rangle \qquad (\underline{a} \in F_\mu, \ \underline{b} \in F_\rho) ;$$

ceci permet de munir l'espace

$$F = \operatorname{Hom}(F_\mu, F_\rho)$$

d'un produit scalaire en posant

$$(3.2) \qquad \langle u, v \rangle = \operatorname{Tr}(u \circ v^*) = \operatorname{Tr}(v^* \circ u) .$$

Soient alors f et g deux formes automorphes d'espèce $(\mu ; \rho)$ pour Γ ; tenant compte du fait que les opérateurs $\mu(M)$, $M \in \Gamma$, sont unitaires, on voit immédiatement (cf. Exposé 6, n° 6) que la fonction numérique

$$(3.3) \qquad \langle \rho(y^{1/2}) \circ f(z), \rho(y^{1/2}) \circ g(z) \rangle = \operatorname{Tr}(g(z)^* \rho(y) f(z))$$

(on supprime le signe $\circ$ quand aucune ambiguité n'est possible) est <u>invariante par</u> Γ.

Donnons-nous alors un nombre p vérifiant

$$1 \leqslant p \leqslant +\infty \quad ;$$

nous poserons

(3.4)
$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{H}_\Gamma^p(\mu;\rho) = \text{ensemble des formes } f \in \mathcal{H}_\Gamma(\mu;\rho) \\ \qquad \text{telles que} \\ \displaystyle\int_{z \bmod \Gamma} \|\rho(y^{1/2})\, f(z)\|^p dz < +\infty \end{array}}$$

si p est fini ; et

(3.5)
$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{H}_\Gamma^\infty(\mu;\rho) = \text{ensemble des formes } f \in \mathcal{H}_\Gamma(\mu;\rho) \\ \qquad \text{telles que} \\ \displaystyle\sup_z \|\rho(y^{1/2})\, f(z)\| < +\infty \end{array}}$$

On définit naturellement sur l'espace $\mathcal{H}_\Gamma^p(\mu;\rho)$ une norme

(3.6)
$$\|f\|_{p;\Gamma} = \left(\int_{z \bmod \Gamma} \|\rho(y^{1/2})\, f(z)\|^p dz\right)^{1/p}$$

et une dualité (en général <u>non séparée</u>, sauf si $p = 2$)

(3.7)
$$\langle f\,,\,g\rangle_\Gamma = \int_{z \bmod \Gamma} \langle \rho(y^{1/2})\, f(z)\,,\, \rho(y^{1/2})\, g(z)\rangle\, dz$$

entre $\mathcal{H}_\Gamma^p(\mu;\rho)$ et $\mathcal{H}_\Gamma^q(\mu;\rho)$ pour $1/p + 1/q = 1$. Pour $p = 2$, on a ainsi un espace de Hilbert, et pour p quelconque, un espace de Banach (le fait que ces espaces soient complets se démontre en utilisant les raisonnements usuels à la Bergmann).

LEMME 1. – <u>Si le domaine fondamental de</u> Γ <u>est de volume fini on a les inclusions</u>

(3.8)
$$\mathcal{H}_\Gamma^\infty(\mu;\rho) \subset \mathcal{H}_\Gamma^p(\mu;\rho) \subset \mathcal{H}_\Gamma^1(\mu;\rho)$$

<u>pour</u> $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

Beweis klar.

THÉORÈME 1. – <u>Si</u> Γ <u>est le groupe modulaire de Siegel, et si</u> f <u>est une Spitzenform, la fonction</u>

$$\langle \rho(y^{1/2})f(z)\,,\, \rho(y^{1/2})g(z)\rangle$$

<u>est bornée pour toute forme modulaire</u> g <u>de même espèce que</u> f .

Cette fonction étant invariante par Γ , il suffit de prouver qu'elle est bornée dans le domaine fondamental de Γ. Or dans un ouvert fondamental contenu dans un demi-plan $y \gg c.1$, on a des majorations

$$||f(z)|| \leqslant c_1 \exp(-c_2 \mathrm{Tr}(y)) , \quad ||g(z)|| \leqslant c_3 \quad ;$$

(Exposé 4, n° 4) ; d'autre part (Exposé 6, lemme 1) on a une majoration

$$||\rho(y)|| \leqslant c_4 . \exp(1/2 c_2 \mathrm{Tr}(y)) \det(y)^{\alpha_n}$$

où α_n est le paramètre qui figure dans le plus haut poids de ρ (il va de soi qu'on pourrait améliorer de beaucoup cette dernière majoration !) ; il reste donc à faire voir que pour $\gamma > 0$ et α réel quelconque la fonction $\exp(-\gamma \mathrm{Tr}(y)) \det(y)^{\alpha}$ est bornée pour $y \gg c.1$, ce qui est trivial.

COROLLAIRE 1. - <u>Soient Γ le groupe modulaire de Siegel et $\mathcal{S}_\Gamma(\mu ; \rho)$ l'espace des Spitzenformen d'espèce $(\mu ; \rho)$ pour Γ. On a</u>

$$\mathcal{S}_\Gamma(\mu ; \rho) \subset \mathcal{H}^p_\Gamma(\mu ; \rho)$$

<u>pour tout</u> p.

COROLLAIRE 2. - <u>Soit Γ le groupe modulaire de Siegel. Le produit scalaire</u>

$$\langle f , g \rangle_\Gamma = \int_{z \bmod \Gamma} \langle \rho(y^{1/2}) f(z) , \rho(y^{1/2}) g(z) \rangle dz$$

<u>converge dès que f est une Spitzenform.</u>

COROLLAIRE 3 (Hecke). - <u>Soit</u>

$$f(z) = \sum_{s \gg 0} \hat{f}(s) \exp(2\pi i \mathrm{Tr}(sz))$$

<u>une Spitzenform d'espèce (ρ , μ) pour le groupe modulaire de Siegel. Alors</u>

$$\sup_{s \gg 0} || \rho(s^{1/2}) \hat{f}(s) || < +\infty \quad .$$

On a en effet la relation

$$(2.6) \qquad \rho(y^{1/2}) \hat{f}(s) = \int_{x \bmod 1} \rho(y^{1/2}) f(z) \hat{\mu}(s) \exp(-2\pi i \mathrm{Tr}(sz)) dx \quad ;$$

comme la fonction $\rho(y^{1/2}) f(z)$ est bornée dans le demi-plan de Siegel, et comme le multiplicateur μ est unitaire, on déduit de là une majoration de la forme

$$|| \rho(y^{1/2}) \hat{f}(s) || \leqslant c(f) . \exp(2\pi \mathrm{Tr}(sy)) \quad ;$$

le corollaire s'obtient alors en faisant $y = s^{-1}$ dans cette relation.

(La référence à Hecke dans l'énoncé est due au fait que pour $n = 1$ le corollaire précédent, ainsi que son ingénieuse démonstration, sont dus à HECKE ; voir les articles cités dans la Bibliographie ; il faut noter que pour les coefficients de Fourier d'une forme modulaire

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$$

à une variable, avec $a_0 \neq 0$, HECKE a aussi obtenu une majoration importante, savoir

$$a_n = O(n^{k-1+\varepsilon})$$

si f est de "poids" k ; dans le cas du groupe de Siegel, KOECHER a obtenu la majoration

$$|\hat{f}(s)| \leqslant c(f).\det(s_1)^k$$

pour f de poids k (on note s_1 la matrice $\gg 0$ de rang r qui se déduit de façon évidente de s si s est de rang r) ; cette majoration est moins bonne que celle de HECKE ; la question n'aurait guère d'importance si l'on ne s'intéressait aux séries de Dirichlet associées aux formes modulaires : quand une série de Dirichlet **vérifie** une équation fonctionnelle en $s \longrightarrow k - s$, il est préférable de savoir qu'elle converge pour $R(s) > k$, plutôt que pour $R(s) > k + 1$ ... A ce sujet l'article de KOECHER cité dans la Bibliographie comporte apparemment une lacune importante. En ce qui concerne les majorations de $\hat{f}(s)$ dans le cas d'une représentation ρ quelconque, "on" ne peut rien dire pour le moment;"on" espère revenir plus tard sur cette question qui n'est nullement négligeable, pour la raison expliquée ci-dessus : convergence des séries de Dirichlet associées aux formes modulaires).

Il est raisonnable de se demander si le Corollaire 1 caractérise les Spitzenformen ; on va voir qu'il en est bien ainsi lorsque $\alpha_n \neq 0$.

Considérons en effet, pour le groupe modulaire de Siegel, une forme $f \in \mathcal{H}_{\Gamma}^{\infty}(\mu ; \rho)$ on a donc une relation

$$(3.9) \qquad \| \rho(y^{1/2}) f(z) \| \leqslant c \ .$$

Formons alors la série de Fourier

$$f(z) = \sum_{s \geqslant 0} \hat{f}(s) \exp(2\pi i \mathrm{Tr}(sz))$$

de f ; les coefficients sont donnés par la formule

$$(2.6) \qquad \hat{f}(s) = \int_{x \bmod 1} f(z) \hat{\mu}(s) \exp(-2\pi i \mathrm{Tr}(sz))\, dx \quad ,$$

d'où

$$\rho(y^{1/2})\hat{f}(s) = \exp(2\pi \mathrm{Tr}(sy)) \int \rho(y^{1/2}) f(x+iy)\hat{\mu}(s) \ldots \quad ;$$

il s'ensuit que l'on a (voir la démonstration du Corollaire 3)

(3.10) $$\|\rho(y^{1/2})\hat{f}(s)\| \leqslant c.\exp(2\pi \mathrm{Tr}(sy)) \qquad \text{pour tout} \quad y \gg 0 .$$

Posant pour simplifier $u = \hat{f}(s)$, homomorphisme de F_μ dans F_ρ , et posant $y = g'g$ avec $g \in GL_+(n , \underline{R})$, on donc une majoration

(3.11) $$\|\rho(g)u\| \leqslant c.\exp(2\pi \mathrm{Tr}((gsg')) \qquad \text{pour} \quad g \in GL_+(n , \underline{R}) ,$$

s étant une matrice symétrique $\geqslant 0$ indépendante de g ; et l'on doit déduire de là que $u = 0$, si s n'est pas $\gg 0$.

Comme $\mathrm{Hom}(F_\mu , F_\rho)$ est obtenu en prenant un nombre fini de copies de F_ρ , on peut évidemment de ramener au cas où F_μ est de dimension 1 , i.e. supposer qu'en fait u désigne, dans (3.11), un élément de l'espace F_ρ de la représentation ρ . On peut d'autre part se ramener (en remplaçant g par gk , $k \in O_+(n)$, et u par $\rho(k)u$) au cas où la matrice s est <u>diagonale</u> :

$$s = (\sigma_1 , \ldots , \sigma_n) , \qquad \sigma_i \geqslant 0 .$$

Examinons d'abord le cas simple où

$$\rho(g) = \det(g)^k \quad ;$$

prenant g diagonale, (3.11) s'écrit encore

$$(\lambda_1 \ldots \lambda_n)^k.\|u\| \leqslant c.\exp(2\pi(\sigma_1\lambda_1^2 + \ldots + \sigma_n\lambda_n^2)) \quad ;$$

si l'une des valeurs propres σ_i est nulle et si $k \neq 0$ il s'ensuit évidemment que $u = 0$; le résultat que nous avons en vue est donc établi dans ce cas.

Considérons maintenant le cas général en supposant s non définie ; on peut donc écrire

$$s = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec s_1 de rang $r < n$. Prenons alors dans $GL_+(n , \underline{R})$ une matrice de la forme

(3.12) $$g = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \qquad (x \text{ quelconque}, \quad g_2 \in GL_+(n-r , \underline{R}) \; ;$$

il est clair que $\mathrm{Tr}(gsg') = \mathrm{Tr}(s)$; donc on a

$$\|\rho(g)u\| \leqslant c_1 ,$$

constante indépendante de g. Or pour tout $v \in F_\rho$ la fonction $\langle \rho(g)u , v \rangle$ est un polynome en g multiplié éventuellement par une puissance du déterminant de g ; une telle fonction ne peut être bornée sur le sous-groupe (3.12) que si elle est constante, et par suite il vient

$$(3.13) \qquad \rho(g)u = u \qquad \text{pour } g \text{ de la forme (3.12).}$$

Or les $u \in F_\rho$ qui possèdent la propriété (3.13) forment un sous-espace de F_ρ, qui est visiblement stable par le normalisateur du sous-groupe (3.12), donc en particulier par le sous-groupe

$$\begin{pmatrix} g_1 & x \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} ;$$

comme celui-ci contient le sous-groupe triangulaire de $GL_+(n , \underline{R})$ on voit que, si (3.13) possède des solutions non nulles alors le vecteur $\underline{a}^+ \in F_\rho$ appartenant au <u>plus haut poids</u>

$$\alpha(h) = \prod_{i=1}^{i=n} \Delta_i(h)^{\alpha_i}$$

de ρ figure parmi ces solutions ; en prenant g_2 diagonale dans (3.12) il s'ensuit donc que

$$\alpha_{r+1} = \ldots = \alpha_n = 0 .$$

Donc :

THÉORÈME 2. - <u>Soient Γ le groupe modulaire de Siegel, ρ une représentation holomorphe de $GL(n , \underline{C})$, de plus haut poids</u>

$$\prod \Delta_i(h)^{\alpha_i} \qquad \underline{\text{avec}} \quad \alpha_n \neq 0 .$$

<u>Alors, pour tout multiplicateur μ de Γ, on a la relation</u>

$$\mathcal{H}_\Gamma^\infty(\mu ; \rho) = S_\Gamma(\mu ; \rho) .$$

REMARQUE. - Pour $\rho(g) = \det(g)^k$, l'hypothèse $k \neq 0$ est nécessaire pour assurer la validité du théorème 2 ; en effet pour $k = 0$ les formes modulaires sont les solutions de

$$f(Mz) = f(z)\mu(M)^{-1} ;$$

comme $\mu(M)$ est unitaire, et que f est de toute façon bornée dans le domaine fondamental, on voit que dans ce cas

$$\mathcal{H}_{\Gamma}^{\infty}(\mu ; \rho) = \mathcal{H}_{\Gamma}(\mu ; \rho) ;$$

par contre $\mathcal{S}_{\Gamma}(\mu ; \rho) = 0$; en effet une Spitzenform vérifie dans le domaine fondamental de Γ une inégalité de la forme

$$\|f(z)\| \leqslant c_1 . \exp(-c_2 \mathrm{Tr}(y))$$

avec $c_2 > 0$, ce qui permet de raisonner comme dans l'exposé 4 , proposition 4 , et d'appliquer le principe du maximum ; donc les Spitzenformen sont constantes, et forcément nulles puisque nulles à l'infini. En conclusion le théorème 2 ne peut être valable que si $\mathcal{H}_{\Gamma}(\mu ; \rho) = 0$, ce qui est par exemple faux pour $\mu = 1$, attendu qu'alors $\mathcal{H}_{\Gamma}(\mu ; \rho)$ se compose de toutes les fonctions constantes.

Le cas où ρ est de dimension > 1 avec $\alpha_n = 0$ n'a pas été étudié ; on ignore ce qui se passe.

4. - Remarques sur les coeffcients des formes modulaires.

Dans ce numéro on désigne par Γ le groupe modulaire de Siegel, par ρ une représentation holomorphe irréductible de $GL(n, \underline{C})$ dans un espace F_ρ , et par μ un multiplicateur de Γ (n° 1). Le contenu de ce numéro est trivial si la représentation ρ est de dimension 1 .

Soit $f(z)$ une forme modulaire d'espèce $(\mu ; \rho)$ et écrivons sa série de Fourier

$$f(z) = \sum_{s \geqslant 0} \hat{f}(s) \exp(2\pi i \mathrm{Tr}(sz)) \quad ;$$

on a vu que les coefficients $\hat{f}(s) \in \mathrm{Hom}(F_\mu , F_\rho)$ vérifient nécessairement l'identité

$$\hat{f}(usu') = \rho(u)\hat{f}(s)\mu(u') \tag{2.10}$$

pour

$$u \in U = SL(n , \underline{Z}) .$$

Nous nous proposons d'en déduire des restrictions importantes sur les valeurs possibles de $\hat{f}(s)$ (restrictions qui, on le verra, ne font intervenir que la représentation ρ).

Comme μ est un multiplicateur les s qui interviennent dans la question sont rationnelles et positives. Posons

(4.1) $$U(s) = \text{ensemble des } u \in U \text{ telles que } usu' = s ,$$

de sorte que $U(s)$ est le groupe des unités de s ; il est clair que (2.10) implique

(4.2) $$\rho(u)\hat{f}(s)\mu(u') = \hat{f}(s) \quad \text{pour } u \in U(s) ;$$

c'est de cette identité que vont provenir les restrictions cherchées dans le cas où la matrice s <u>n'est pas définie</u>.

Supposons en effet s de rang $r < n$. Comme s est rationnelle, on peut, au besoin en remplaçant s par usu' avec un $u \in U$, supposer

(4.3) $$s = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $s_1 \gg 0$ et rationnelle de rang r . On vérifie alors trivialement que

$$U(s) : \text{matrices } u = \begin{pmatrix} u_1 & x \\ U & u_2 \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} u_1 \in U(s_1) \\ x \text{ entière quelconque} \\ u_2 \in U_2 = SL(n-r , \underline{Z}) \end{cases}$$

A côté de ce groupe discret (infini !) nous allons introduire le groupe <u>continu</u>

$$G(s) : \text{matrices } g = \begin{pmatrix} 1_r & x \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} x \text{ complexe quelconque} \\ g_2 \in GL(n-r , \underline{C}) . \end{cases}$$

THÉORÈME 3. - <u>Soient</u> ρ <u>une représentation holomorphe irréductible de</u> $GL(n , \underline{C})$, <u>de plus haut poids</u>

$$\prod \Delta_i(h)^{\alpha_i} ,$$

Γ <u>le groupe modulaire de Siegel,</u> μ <u>un multiplicateur de</u> Γ , <u>et</u> f <u>une forme modulaire d'espèce</u> $(\mu ; \rho)$. <u>Pour toute matrice</u>

$$s = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\text{avec}} \quad s_1 \gg 0 \ \underline{\text{de rang}} \ r < n ,$$

<u>on a la relation</u>

$$\rho(g)\hat{f}(s) = \det(g_2)^{\alpha_n} . \hat{f}(s) \qquad \underline{\text{pour}} \quad g \in G(s) ;$$

<u>de plus, on ne peut avoir</u> $\hat{f}(s) \neq 0$ <u>pour une matrice</u> s <u>de rang</u>

$$r < n - 1$$

<u>que si l'on a</u>

$$\alpha_{r+1} = \ldots = \alpha_{n-1} = 0 \; .$$

Pour faire la démonstration nous poserons

$$\alpha_{r+1} + 2\alpha_{r+2} + \ldots + (n-r)\alpha_n = (n-r)N_r \quad ;$$

on va d'abord établir que l'on a

$$\rho(g)\underline{a} = \det(g)^{N_r} . \underline{a} \tag{4.4}$$

pour tout vecteur de la forme $\underline{a} = \hat{f}(s)\underline{b}$ $(\underline{b} \in F_\mu)$.

D'après (4.2) et le fait que le multiplicateur μ est unitaire il est clair que

$$\sup_{u \in U(s)} \| \rho(u)\underline{a} \| < +\infty \quad ; \tag{4.5}$$

c'est de là que nous allons déduire (4.4).

Considérons d'abord dans $G(s)$ le sous-groupe abélien

$$X : \text{matrices} \quad x = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{complexes.}$$

L'application $x \longrightarrow \rho(x)\underline{a}$ de X dans F_ρ est <u>polynômiale</u>, et par hypothèse bornée sur les matrices x <u>entières</u> ; elle est donc constante, ce qui prouve (4.4) dans ce cas.

Considérons maintenant le sous-groupe

$$G_2 : \text{matrices} \quad g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad g_2 \in SL(n-r\, ,\, \underline{C}) \; .$$

L'application $g_2 \longrightarrow \rho(g_2)\underline{a}$ est encore polynomiale (car g_2 est de déterminant 1) et bornée sur les $g_2 \in SL(n-r\, ,\, \underline{Z})$. En considérant les matrices de la forme $g_2 = 1 + n$ avec n nilpotente supérieure, on en conclut par le même raisonnement que ci-dessus (un polynome sur un espace vectoriel complexe, qui est borné sur l'ensemble des points entiers, est constant) que $\underline{a}$ est invariant par les g_2 unipotentes supérieures ; et aussi, bien entendu, par les g_2 unipotentes inférieures ; or le sous-groupe de $SL(n-r\, ,\, \underline{C})$ engendré par les matrices unipotentes inférieures et supérieures (2) est $SL(n-r\, ,\, \underline{C})$ tout entier ; ceci établit (4.4) pour G_2 .

Il reste à examiner les matrices de la forme

---

(2) La démonstration qu'on vient de donner revient évidemment à prouver que $SL(p\, ,\, \underline{C})$ est <u>l'enveloppe algébrique</u> du (i.e. le plus petit groupe algébrique complexe contenant le) groupe $SL(p\, ,\, \underline{Z})$.

$$t = \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & t.1_{n-r} \end{pmatrix} \quad \text{avec } t \text{ complexe } \neq 0 .$$

Désignons par $F_\rho(s)$ le sous-espace de F_ρ formé des vecteurs $\underline{a}$ qui vérifient

(4.6) $$\rho(g)\underline{a} = \underline{a} \quad \text{pour } g = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \quad , \quad g_2 \in SL(n-r, \underline{C}) \; ;$$

nous devons montrer que

(4.7) $$\rho(t) = t^{(n-r)N_r}.1 \qquad \text{sur } F_\rho(s) .$$

Or il est clair que $F_\rho(s)$ <u>est stable par le normalisateur du sous-groupe</u> (4.6) <u>dans</u> $GL(n, \underline{C})$; en particulier $F_\rho(s)$ est stable par le sous-groupe

$$G_1 : \text{matrices } g_1 = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & 1_{n-r} \end{pmatrix} \quad \text{avec } g_1 \in GL(r, \underline{C}) .$$

Montrons tout d'abord que ρ <u>induit une représentation irréductible de</u> G_1 <u>dans</u> $F_\rho(s)$. Comme la représentation de G_1 dans $F_\rho(s)$ est en tout cas semi-simple (parce que rationnelle), il suffit de prouver que le sous-groupe de G_1 formé des matrices pour lesquelles g_1 est <u>triangulaire</u> admet dans F_ρ <u>un seul</u> vecteur propre à un facteur constant près (car il y a autant de composantes irréductibles que de vecteurs appartenant à un "plus haut" poids de la représentation considérée, en vertu du fait que le plus haut poids d'une représentation irréductible est de multiplicité 1) ; mais si un sous-espace de dimension 1 de $F_\rho(s)$ est stable par $\rho(g_1)$ pour g_1 triangulaire il est clair en vertu de (4.6) qu'il est aussi stable par le sous-groupe de $GL(n, \underline{C})$ formé des matrices unipotentes supérieures ; il appartient donc au plus haut poids de la représentation ρ de $GL(n, \underline{C})$ dans F_ρ, et par suite notre assertion est établie.

Cela étant, puisque la représentation ρ de G_1 dans $F_\rho(s)$ est irréductible, tout endomorphisme de $F_\rho(s)$ qui commute à cette représentation est un scalaire. Par suite $\rho(t)$ <u>est un scalaire sur</u> $F_\rho(s)$, et pour calculer la valeur de $\rho(t)$ dans $F_\rho(s)$ il suffit de prendre le vecteur $\underline{a}$ appartenant au plus haut poids de la représentation ρ de $GL(n, \underline{C})$; on vient de voir en effet que ce vecteur est nécessairement dans $F_\rho(s)$. Mais alors

$$\rho(t)\underline{a} = \prod_{i=1}^{i=n} \Delta_i(t)^{\alpha_i}.\underline{a}$$

et comme on a

$$\Delta_i(t) = 1 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant r$$

$$\Delta_{r+1}(t) = t \quad , \quad \Delta_{r+2}(t) = t^2 \; , \; \ldots \; , \; \Delta_n(t) = t^{n-r}$$

il vient

$$\rho(t)\underline{a} = t^{\alpha_{r+1} + 2\alpha_{r+2} + \ldots + (n-r)\alpha_n} . \underline{a} \quad ,$$

ce qui établit (4.7) et donc (4.4).

Pour établir la seconde assertion du théorème, on utilise le fait que si $\Gamma_\rho(s) \neq 0$ (ce qui est sûrement le cas pour $\hat{f}(s) \neq 0$) alors $F_\rho(s)$ contient le vecteur $\underline{a}$ appartenant au plus haut poids de ρ comme on l'a vu ci-dessus, et de plus on a

$$\rho(g)\underline{a} = \det(g_2)^{N_r} . \underline{a} \quad \text{pour} \quad g \in G(s) \; .$$

Prenons alors

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix}$$

avec h_2 diagonale ; comme $\underline{a}$ appartient au plus haut poids de ρ il vient

$$\rho(g)\underline{a} = \underline{a} . \prod_{i=1}^{i=n} \Delta_i(g)^{\alpha_i}$$

d'où en comparant avec la relation obtenue précédemment,

$$\Delta_{r+1}(h_2)^{\alpha_{r+1}} \ldots \Delta_{n-1}(h_2)^{\alpha_{n-1}} \, \Delta_n(h_2)^{\alpha_n} = \Delta_n(h_2)^{N_r} \quad ;$$

comme

$$N_r = \alpha_n + \frac{n-r-1}{n-r}\alpha_{n-1} + \ldots + \frac{1}{n-r}\alpha_{r+1}$$

on obtient la condition $\alpha_{r+1} = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$ si $r < n-1$. Le théorème 3 est donc entièrement démontré.

COROLLAIRE. - <u>Supposons</u> $\alpha_r \geqslant 1$ <u>pour un indice</u> $r \leqslant n-1$. <u>Alors on a</u>

$$\hat{f}(s) = 0 \quad \underline{\text{pour}} \quad s \quad \underline{\text{de rang}} \; < r$$

<u>pour toute forme modulaire</u> f <u>d'espèce</u> $(\mu \, ; \, \rho)$.

Par exemple, si $\alpha_{n-1} \geqslant 1$, alors les séries de Fourier des formes modulaires d'espèce (μ , ρ) , quel que soit le multiplicateur arithmétique μ , ne peuvent faire intervenir que des matrices s de rang $n-1$ ou n , ce qui veut dire que

$$\Phi(\Phi(f)) = 0 \qquad \text{si} \quad \alpha_{n-1} \geq 1 .$$

Évidemment, il n'y a pas de résultat analogue dans le cas classique où ρ est de dimension 1.

Indiquons pour terminer qu'il n'est pas certain qu'on ne puisse améliorer le théorème 3 et son corollaire.

BIBLIOGRAPHIE

La notion de produit scalaire de deux formes automorphes est due (pour $n = 1$) à PERTERSSON et (pour n quelconque, ρ de dimension 1) à MAAS ; voir les articles cités dans l'exposé 5 . Voir aussi les articles de KOECHER cités dans l'exposé 4 .

Il va de soi qu'on ne saurait étudier sérieusement le cas symplectique sans connaître le cas classique $n = 1$, attendu que les efforts des géomètres qui ont abordé ce cas général n'ont pas eu d'autre but que d'étendre les résultats connus pour $n = 1$, dans la mesure du possible. A ce sujet il faut citer, outre de nombreux articles de PETERSSON parus entre 1930 et 1957 , un certain nombre d'articles fondamentaux de HECKE (celui-ci s'est toujours borné au groupe modulaire et à ses sous-groupes de congruence ; les résultats de HECKE ont été ensuite généralisés aux groupes fuchsiens quelconques et souvent améliorés par PETERSSON), notamment :

HECKE (E.). - Theorie der Eisensteinschen Reihen höherer Stufe und ihre Anwendung auf Funktionentheorie und Arithmetik, Abhandl. math. Seminar Hamburg. Univ., t. 5, 1927, p. 199-224.

HECKE (E.). - Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung, Math. Annalen, t. 112, 1936, p. 664-699.

HECKE (E.). - Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktenwicklung. I., Math. Annalen, t. 114, 1937, p. 1-28 ; II., Math. Annalen, t. 114, 1937, p. 316-351.

L'article de Koecher auquel il est fait allusion dans les commentaires au corollaire 3 du théorème 1 est le suivant :

KOECHER (Max). - Über Dirichlet-Reihen mit Funktionalgleichung, J. reine und angew. Math., t. 192, 1953, p. 1-23 (voir Hilfssatz 13, p. 17).