Roger Godement

Où l'on généralise une intégrale étudiée par C. L. Siegel, et généralisant la fonction Γ

Séminaire Henri Cartan, tome 10, n° 1 (1957-1958), exp. n° 5, p. 1-24
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1957-1958__10_1_A5_0>

16 décembre 1957

OÙ L'ON GÉNÉRALISE UNE INTÉGRALE

étudiée par C.L. SIEGEL, et généralisant la fonction Γ

par Roger GODEMENT,

On rencontre, et nous rencontrerons, en divers endroits de la théorie des formes modulaires (convergence des séries d'Eisenstein, produit scalaire de deux formes modulaires, etc.) des intégrales étendues à l'espace des matrices $y = y' \gg 0$, (N.B : on note y' la matrice transportée ${}^t y$) intégrales dont il est essentiel de savoir si elles convergent ou non ; dans le cas classique où l'on considère des facteurs d'automorphie de la forme $\det(cz + d)^k$ (cf. l'exposé précédent), il s'agit d'intégrales de la forme

$$\int \exp(-\pi \operatorname{Tr}(sy)) \det(y)^{\sigma} dy \quad ,$$

s étant une matrice symétrique positive donnée et σ un paramètre variable ; ces intégrales ont été étudiées depuis longtemps par C.L. SIEGEL, qui en a fourni la valeur exacte (nous la retrouverons plus loin). Si l'on veut étendre la théorie classique aux formes d'espèce ρ, on est naturellement amené à examiner des intégrales plus compliquées faisant intervenir, au lieu de la fonction det, une représentation ρ de dimension finie du groupe

$$G = GL_+(n , \underline{R}) \qquad (^1)$$

des matrices réelles de déterminant > 0. Le but de cet exposé est de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence de ces intégrales. On donnera dans les exposés suivants les applications aux séries d'Eisenstein et aux Spitzenformen.

Dans les deux premiers numéros de cet exposé, on rappellera quelques résultats classiques sur les représentation de $GL_+(n , \underline{R})$, résultats qui seront de toute façon indispensables par la suite. On étudiera ensuite les intégrales auxquelles on a fait allusion plus haut.

---

(1) Convention d'écriture. - Exceptionnellement dans cet exposé, les lettre soulignées d'un trait rectiligne ont la même signification que les lettres soulignées d'un trait ondulé dans les autres exposés de ce Séminaire : elles apparaîtraient en caractère gras en typographie.

1. <u>Les représentations irréductibles de</u> $GL_+(n, \underline{R})$: <u>le plus haut poids, classification, existence</u>.

Nous allons tout d'abord introduire dans $GL_+(n, \underline{R}) = G$ des sous-groupes qui se rencontrent aussi dans <u>tous</u> les groupes de Lie (resp. groupes algébriques) semi-simples.

$$H \ : \text{matrices diagonales} \quad h = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

$$U^+ \ : \text{matrices unipotentes} \quad u^+ = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ . & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U^- \ : \text{matrices unipotentes} \quad u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & . & \ldots & . \\ u_{n1} & . & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^+ = H.U^+ = U^+.H \quad ; \quad T^- = H.U^- = U^-.H \ .$$

LEMME 1. - <u>Pour toute matrice</u> g <u>d'ordre</u> n , <u>posons</u>

(1) $$\Delta_i(g) = \begin{vmatrix} g_{11} & \ldots & g_{1i} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{i1} & \ldots & g_{ii} \end{vmatrix} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

(les $\Delta_i(g)$ sont donc les "mineurs principaux" de g). <u>Pour qu'un</u> $g \in GL_+(n, \underline{R})$ <u>puisse s'écire sous la forme</u>

(2) $$g = u^-.h.u^+$$

<u>il faut et il suffit que l'on ait</u>

(3) $$\Delta_i(g) \neq 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant n) \quad ;$$

<u>la décomposition</u> (2) <u>de</u> g <u>est alors unique, et la matrice</u> h <u>est donnée par les relations</u>

(4) $$\Delta_i(g) = \Delta_i(h) = \lambda_1 \ldots \lambda_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant n) \ .$$

Pour faire la démonstration, il vaut mieux écrire (2) sous la forme

$$g.u^+ = u^-.h \quad ;$$

tout revient alors à déterminer les paramètres (u_{ij}) de u^+ de telle sorte qu'on ait

$$\sum_k g_{ik} u_{kj} = 0 \qquad \text{pour} \quad i < j$$

ce qui en fait s'écrit

$$g_{ij} + \sum_{k<j} g_{ik} u_{kj} = 0 \qquad \text{pour} \quad i < j \quad ;$$

d'où, pour chaque j, un système linéaire en les u_{kj} $(k < j)$, ce qui conduit immédiatement au lemme.

LEMME 2. - <u>Soit ρ une représentation continue de T^+ dans un espace vectoriel complexe F de dimension finie ; il existe dans F un sous-espace de dimension 1 stable par T^+.</u>

Il est clair que T^+ est résoluble ; s'il était de plus connexe, le résultat précédent se réduirait au théorème bien connu de Sephus Lie. Soit alors T_o^+ la composante connexe de l'identité dans T^+ ; évidemment on a

$$T_o^+ = H_o.U^+$$

où H_o est l'ensemble des $h \in H$ avec $\lambda_i > 0$ pour $1 \leq i \leq n$. Vu le théorème de Lie, il existe un homomorphisme

$$\alpha^+ : T_o^+ \longrightarrow \underline{C}^*$$

tel que le sous-espace $F(\alpha^+)$ des vecteurs $\underline{a} \in F$ vérifiant

$$\rho(t^+)\underline{a} = \alpha^+(t^+)\underline{a}$$

ne soit pas nul. Or il est clair que α^+ est égal à 1 sur U^+, groupe des commutateurs de T_o^+ ; comme le commutateur de deux éléments de T^+ est aussi dans U^+, il s'ensuit immédiatement que le sous-espace $F(\alpha^+)$ est stable par T^+, et que les opérateurs $\rho(t^+)$, $t^+ \in T^+$, commutent deux à deux dans $F(\alpha^+)$; ils ont donc un vecteur propre commun dans $F(\alpha^+)$, d'où le lemme.

LEMME 3. - <u>Tout homomorphisme α^+ de T^+ dans le groupe multiplicatif $\underline{C}^*$ s'obtient comme suit : on a</u>

$$\alpha^+(h.u^+) = \alpha^+(h) \tag{5}$$

<u>et</u>

$$\alpha^+(h) = \Delta_n(h)^{\alpha_n^+} \prod_{i=1}^{i=n-1} \Delta_i(h)^{\varepsilon_i^+} . |\Delta_i(h)|^{\alpha_i^+ - \varepsilon_i^+} \tag{6}$$

<u>où les α_i^+ sont des paramètres complexes arbitraires et où les ε_i^+ sont égaux à 0 ou 1.</u>

Beweis klar : tout homomorphisme de $\underline{R}_+^*$ dans C^* est de la forme $x \longrightarrow x^\alpha$; il faut ensuite tenir compte des diverses composantes connexes de H.

Ces préliminaires étant acquis, considérons une représentation irréductible ρ de

$G = GL_+(n\ ,\ \underline{R})$ dans un espace vectoriel complexe F de dimension finie ; on notera F^* le dual de F, $\langle \underline{a}\ ,\ \underline{a}^* \rangle$ la forme bilinéaire canonique sur $F \times F^*$, et u^* l'endomorphisme de F^* transposé d'un endomorphisme u de F.

Appliquons le théorème de Lie (lemme 2) à la représentation de T^+ dans F ; on trouve un vecteur non nul $\underline{a}^+ \in F$ et un caractère α^+ de T^+ tels que

(7) $$\rho(t^+)\underline{a}^+ = \alpha^+(t^+)\underline{a}^+ \quad ;$$

de même appliquons le lemme 2 à la représentation "contragrédiente" $g \longrightarrow \rho(g^{-1})^*$ dans F^* et au sous-groupe T^- ; on trouve un vecteur non nul $\underline{a}^- \in F^*$ et un caractère α^- de T^- tels que l'on ait

(8) $$\rho(t^-)^*\underline{a}^- = \alpha^-(t^-)\varepsilon^- \quad ;$$

en particulier on aura les relations suivantes :

(9) $$\rho(u^+)\underline{a}^+ = \underline{a}^+ \quad ; \qquad \rho(h)\underline{a}^+ = \alpha^+(h)\underline{a}^+ \quad ; \qquad \rho(u^-)^*\underline{a}^- = \underline{a}^-$$

Considérons maintenant sur G la fonction continue (et même analytique : toute représentation continue d'un groupe de Lie est analytique)

(10) $$\theta(g) = \langle \rho(g)\underline{a}^+\ ,\ a^- \rangle \quad ;$$

vu (9), il vient trivialement

(11) $$\theta(u^-hu^+) = \alpha^+(h)\theta(e) = \alpha^-(h)\theta(e) \quad ;$$

or les éléments u^-hu^+ sont partout denses dans G (lemme 1) ; donc (11) détermine θ à un facteur constant près ; plus précisément, les relations (4) et (6) donnent

(12) $$\theta(g) = \det(g)^{\alpha_n^+} . \prod_{i=1}^{i=n-1} \Delta_i(g)^{\varepsilon_i^+} . |\Delta_i(g)|^{\alpha_i^+ - \varepsilon_i^+}$$

<u>à un facteur constant près</u>.

Or la fonction (10) n'est pas identiquement nulle, sinon $\underline{a}^-$ serait orthogonal aux transformés de $\underline{a}^+$, donc à F puisque ρ est <u>irréductible</u>. Par conséquent nous devons exprimer que la formule (12), valable seulement lorsque les mineurs de g sont tous $\neq 0$, définit une fonction <u>analytique sur</u> G <u>tout entier</u>. On voit aussitôt que, pour ce faire, on doit exprimer que la fonction

$$x \longrightarrow x^{\varepsilon_i^+} . |x|^{\alpha_i^+ - \varepsilon_i^+} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n-1)$$

de la variable réelle $x \neq 0$ est encore analytique en $x = 0$; d'où immédiatement

$$\alpha_i^+ - t_i^+ = \text{entier positif pair}$$

Par suite, le caractère α^+ a nécessairement la forme

(13) $$\boxed{\alpha^+(h) = \det(h)^{\sigma} \prod_{i=1}^{i=n-1} \Delta_i(h)^{n_i}}$$.

où σ est un paramètre complexe (inévitable à cause du centre de $GL_+(n\ ,\ \underline{R})$!) et où les n_i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ sont des entiers positifs.

LEMME 4. - La représentation ρ contient une seule représentation α^+ de dimension 1 de T^+. Les vecteurs $\underline{a}^+$ qui vérifient

$$\rho(t^+)\underline{a}^+ = \alpha^+(t^+)\underline{a}^+$$

forment un sous-espace de dimension 1 de F . Deux représentations irréductibles de $GL_+(n\ ,\ \underline{R})$ qui contiennent la même représentation de dimension 1 du sous-groupe T^+ sont équivalentes.

En effet comme la fonction Θ n'est pas identiquement nulle, la relation (11) exige

$$\alpha^+(h) = \alpha^-(h) \quad ;$$

comme ces deux caractères ont été choisis indépendamment l'un de l'autre, il s'ensuit bien que la représentation ρ contient une seule représentation de dimension 1 de T^+ ("unicité du plus haut poids")

Soient maintenant $\underline{a}_1^+$ et $\underline{a}_2^+$ deux solutions de (7) ; alors les fonctions

$$\langle \rho(g)\underline{a}_1^+\ ,\ \underline{a}^- \rangle \qquad \text{et} \qquad \langle \rho(g)\underline{a}_2^+\ ,\ \underline{a}^- \rangle$$

vérifient toutes deux la relation (11), et sont donc proportionnelles ; donc il y a une combinaison linéaire non triviale $\underline{a}^+$ de $\underline{a}_1^+$ et $\underline{a}_2^+$ pour laquelle on a $\langle \rho(g)\underline{a}^+\ ,\ \underline{a}^- \rangle = 0$; mais les transformés de $\underline{a}^+$ forment un sous-espace de F invariant par ρ , auquel $\underline{a}^- \neq 0$ est orthogonal ; ce sous-espace est donc nul puisque ρ est irréductible, d'où la seconde assertion du lemme.

Si deux représentations irréductibles possèdent le même α^+ , les fonctions Θ correspondantes sont proportionnelles ; mais deux représentations irréductibles ayant un coefficient commun sont équivalentes ; d'où la troisième assertion.

Nous appellerons dorénavant le caractère (13) le plus haut poids de la représentation ρ , et nous l'écrirons $\alpha(h)$ au lieu de $\alpha^+(h)$.

THÉORÈME 1. - Soient σ un nombre complexe et n_i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ des entiers

<u>positifs donnés</u> ; <u>il existe une représentation irréductible et une seule de</u> $GL_+(n, \mathbb{R})$ <u>dont le plus haut poids est</u>

$$\alpha(h) = \det(h)^{\sigma} \prod_{i=1}^{i=n-1} \Delta_i(h)^{n_i} .$$

Considérons sur le groupe G la fonction

$$\theta(g) = \det(g)^{\sigma} \prod \Delta_i(g)^{n_i}$$

et soit F l'espace vectoriel engendré par les fonctions de la forme

$$g \longrightarrow \theta(gg_0) \qquad (g_0 \in G) \quad ;$$

comme $\theta(g)$ est le produit de $\det(g)^{\sigma}$ par un <u>polynome homogène</u> en les éléments de g, il est clair que F est de dimension finie. On a une représentation ρ de G dans F en définissant

$$\rho(g_0) : x(g) \longrightarrow x(gg_0)$$

pour toute fonction $x \in F$. Notons $\underline{a}^+$ l'élément de F qui est défini par la fonction $\theta(g)$ elle-même ; il est clair, par construction même de θ, qu'on aura

$$\rho(t^+)\underline{a}^+ = \alpha(t^+)\underline{a}^+ \quad ;$$

il suffit de vérifier que $\theta(gt^+) = \theta(g)\ \alpha(t^+)$. Il reste donc à vérifier que ρ est irréductible. Or soit $F_0 \subset F$ un sous-espace invariant non nul ; d'après le théorème de Lie, celui-ci contiendra un vecteur non nul $\underline{a}_0$ pour lequel on aura une relation de la forme

$$\rho(t^+)\underline{a}_0 = \alpha_0(t^+)\underline{a}_0 \quad ;$$

comme les transformés de $\underline{a}^+$ engendrent, par construction, l'espace F tout entier, tout revient à prouver que $\underline{a}_0$ est nécessairement proportionnel à $\underline{a}^+$, autrement dit que la seule fonction $\theta_0 \in F$ vérifiant une relation de la forme

$$\theta_0(gt^+) = \theta_0(g)\ \alpha_0(t^+)$$

est θ à un facteur constant près. Or on aura aussi

$$\theta_0(t^-g) = \alpha(t^-)\ \theta_0(g) \quad :$$

cette relation étant vraie pour θ l'est en effet pour <u>toutes</u> les fonctions appartenant à F ; ceci implique, puisque θ_0 n'est pas identiquement nulle, que $\alpha(h) = \alpha_0(h)$; finalement on a

$$\theta_0(u^-hu^+) = \alpha(h)$$

à un facteur constant près, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE (de la démonstration !). - Toute représentation irréductible de dimension finie de $GL_+(n, \underline{R})$ est de la forme

$$g \longrightarrow \det(g)^{\sigma} \cdot \rho(g)$$

où la représentation ρ est polynomiale (i.e. a pour coefficients des polynomes en les coefficients g_{ij} de g).

REMARQUE. - Les méthodes développées dans ce numéro s'étendent évidemment aux représentations holomorphes de $GL(n, \underline{C})$; comme d'ailleurs une telle représentation est entièrement déterminée par sa restriction à $GL_+(n, \underline{R})$ tout revient à chercher à quelle condition une représentation irréductible ρ de $GL_+(n, \underline{R})$ se prolonge en une représentation holomorphe de $GL(n, \underline{C})$; le résultat est évidemment que l'exposant Γ de $\det(g)$ dans le plus haut poids de ρ doit être un entier, et alors le corollaire précédent montre que toute représentation holomorphe de $GL(n, \underline{C})$ est rationnelle (pour la structure algébrique complexe de $GL(n, \underline{C})$).

Remarquons en passant, ce résultat nous sera utile plus tard, que si une représentation holomorphe ρ de $GL(n, \underline{C})$ est polynomiale (ce qui veut dire, en ce qui concerne son plus haut poids, que σ est un entier positif), alors on peut définir $\rho(g)$ pour toute matrice complexe g, inversible ou non, autrement dit l'application holomorphe $g \longrightarrow \rho(g)$ de $GL(n, \underline{C})$ dans l'espace des endomorphismes du vectoriel F de la représentation ρ se prolonge analytiquement à $M(n, \underline{C})$, espace des matrices complexes d'ordre n (le groupe $GL(n, \underline{C})$ est un ouvert de cet espace). Evidemment la relation

$$\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1)\, \rho(g_2)$$

sera encore vraie dans $M(n, \underline{C})$.

Pour $n = 1$ il est bien connu que la fonction z^k est holomorphe à l'origine dès que (et seulement si) k est un entier positif ...

2. Produit scalaire adapté à une représentation.

Soit ρ une représentation irréductible de $GL_+(n, \underline{R})$ dans un espace vectoriel complexe F. Supposons F muni d'une structure d'espace de Hilbert, i.e. d'une forme hermitienne positive non dégénérée que nous noterons $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$; pour tout endomorphisme u de F, on a alors un endomorphisme adjoint u^* (à ne pas confondre avec le transposé de u défini au numéro précédent !!!) défini par la condition

$$\langle u(\underline{a}) , \underline{b} \rangle = \langle \underline{a} , u^*(\underline{b}) \rangle .$$

Nous dirons que le produit scalaire considéré sur F est <u>adapté à</u> ρ si l'on a la relation

$$\rho(g') = \rho(g)^*$$

pour tout $g \in GL_+(n , \underline{R})$. Pour qu'il existe un tel produit scalaire il est évidemment nécessaire que le plus haut poids de ρ soit réel (i.e. que le paramètre σ du théorème 1 soit réel) ; nous allons démontrer que cette condition est aussi suffisante.

Comme on ne modifie évidemment pas le problème en multipliant par une puissance réelle du déterminant, on peut supposer que le plus haut poids de ρ est une fonction <u>polynome</u> sur $GL_+(n , \underline{R})$, auquel cas tous les coefficients de ρ sont des polynomes en les coefficients g_{ij} de la matrice générique $g \in GL_+(n , \underline{R})$. Il s'ensuit immédiatement qu'on peut prolonger ρ en une représentation analytique <u>complexe</u> (et même rationnelle ...) du groupe $GL(n , C)$.

Considérons alors sur $GL(n , \underline{C})$ l'involution

$$g \longrightarrow g^* = \overline{g}'$$

qui prolonge $g \longrightarrow g'$; ses points fixes forment le sous-groupe compact maximal $U(n)$ de $GL(n , \underline{C})$. Comme toute représentation d'un groupe compact est semblable à une représentation unitaire, il existe sur l'espace F un produit scalaire (et du reste un seul si ρ est irréductible) pour lequel on ait la relation

$$\rho(g)^* = \rho(g)^{-1} \qquad \text{pour} \quad g \in U(n) \quad ;$$

alors, les applications <u>holomorphes</u>

$$g \longrightarrow \rho(g) \qquad \text{et} \qquad g \longrightarrow \rho(g^*)^*$$

coïncident sur $U(n)$, donc sur $GL(n , \underline{C})$, et en particulier sur $GL(n , \underline{R})$, ce qui établit le résultat annoncé.

L'utilisation d'un produit scalaire adapté à une représentation ρ est justifiée par les propriétés suivantes. Tout d'abord il est clair que

g <u>unitaire implique</u> $\rho(g)$ <u>unitaire</u>

g <u>hermitienne implique</u> $\rho(g)$ <u>hermitienne</u>.

De plus

$$g \text{ \underline{hermitienne positive implique} } \rho(g) \text{ \underline{hermitienne positive}}$$

pour la raison qu'une matrice hermitienne est $\gg 0$ si et seulement si c'est le carré d'une matrice hermitienne. Faisons à ce sujet la remarque suivante : étant donnée une matrice g hermitienne $\gg 0$, on peut définir pour tout s réel une matrice $g^s \gg 0$ (si g a pour valeurs propres des λ_i, g^s s'obtient en élevant les λ_i à la puissance s) ; cela dit on a toujours

$$\rho(g^s) = \rho(g)^s \qquad \text{pour } g \text{ hermitienne } \gg 0 .$$

En effet on peut se borner au cas où $g = (\lambda_1 , \ldots , \lambda_n)$ est diagonale ; il existe alors une base de F pour laquelle $\rho(g)$ est diagonale aussi ; on aura alors nécessairement une relation

$$\rho(g) = (\alpha_1(g) , \ldots , \alpha_N(g))$$

où les α_i sont des <u>caractères</u> du groupe des matrices diagonales ("poids" de ρ) ; il reste alors à vérifier qu'on a

$$\alpha(g^s) = \alpha(g)^s$$

pour tout caractère α du groupe diagonal, ce qui est trivial.

En particulier on a toujours $\rho(g^{1/2}) = \rho(g)^{1/2}$ pour g hermitienne $\gg 0$. Prenons maintenant une matrice $g \in GL(n , \underline{C})$ quelconque ; on a une décomposition

$$g = u.|g| \quad \text{avec} \quad u \in U(n) , \ |g| \quad \text{hermitienne} \gg 0$$

(il suffit de prendre $|g| = (g'g)^{1/2}$) ; ce qui précède montre aussitôt que

$$|\rho(g)| = \rho(|g|) .$$

3. <u>L'intégrale de Siegel généralisée</u>.

Considérons une représentation <u>irréductible</u> ρ de $GL_+(n , \underline{R})$ dans un espace vectoriel complexe F de dimension finie ; nous supposerons le plus haut poids de ρ réel (ce qui n'est pas une restriction comme on le verra immédiatement) et choisirons sur F un produit scalaire adapté à ρ ; on a alors sur F une norme (2)

---

(2) Le choix sur F de cette norme particulière a pour seul but de simplifier certains calculs ; il va de soi que la nature de l'intégrale (15) est indépendante du choix de la norme sur F, en vertu des théorèmes généraux bien connus (N. BOURBAKI [1], chap. I, paragraphe 3, Corollaire 2 au théorème 1).

$$\|\underline{a}\| = \langle \underline{a} , \underline{a} \rangle^{1/2} .$$

Etant donnés une matrice réelle $s = s'$ et un exposant

(14) $$\sigma \geqslant 1$$

on se propose d'étudier l'intégrale

(15) $$\boxed{I_\sigma(s , \underline{a}) = \int_{GL_+(n,\underline{R})} \|\rho(g)\underline{a}\|^\sigma .\exp(-\pi \operatorname{Tr}(gsg')) \, dg}$$

où dg est la mesure invariante sur $GL_+(n , \underline{R}) = G$.

Voici le résultat que nous allons démontrer [3]

THÉORÈME 2. - Soit

$$\alpha(h) = \prod_{i=1}^{i=n} \Delta_i(h)^{\alpha_i}$$

le plus haut poids de ρ ($\alpha_1 , \ldots , \alpha_{n-1}$ sont donc des entiers positifs et α_n est réel quelconque).

a. Pour que (15) converge pour au moins un vecteur $\underline{a} \neq 0$ il faut que l'on ait $s \gg 0$.

b. Si l'intégrale (15) converge pour un vecteur $\underline{a} \neq 0$ et pour une matrice $s \gg 0$, elle converge pour tout vecteur $\underline{a}$ et pour toute matrice $s \gg 0$;

c. L'intégrale (15) converge si et seulement si l'on a

$$s \gg 0 \qquad \text{et} \qquad \alpha_n > \frac{n-1}{\sigma} .$$

Indiquons dès maintenant la raison de l'hypothèse (14) en démontrant le

LEMME 4. - Pour s et σ donnés, les vecteurs $\underline{a} \in F$ tels que

(16) $$I_\sigma(s , \underline{a}) < + \infty$$

forment un sous-espace vectoriel de F .

Considérons en effet sur G la mesure positive

$$d\mu(g) = \exp(-\pi \operatorname{Tr}(gsg')) \, dg \quad :$$

la relation (16) signifie simplement que l'application continue

---

[3] On verra dans le prochain Exposé que ce théorème reste valable si, dans (15), on se borne à intégrer sur les matrices g dont le déterminant est inférieur à une constante donnée.

$$g \longrightarrow \rho(g)\underline{a}$$

de G dans F est dans l'ensemble

$$L^{\sigma}(G\ ;\ \mu)$$

des fonctions de puissance σ -ième intégrale pour μ (N. BOURBAKI [2]). Or comme $\sigma \gg 1$ cet ensemble est en réalité un espace vectoriel (MINKOWSKI, celui de l'intégration, pas celui des formes quadratiques ...) ; d'où le lemme.

Bien entendu le lemme 4 s'applique à des situations bien plus générales, à savoir à toute intégrale de la forme

$$\int \|\rho(g)\underline{a}\|^{\sigma}\, d\mu(g)\ ,$$

μ étant une mesure positive quelconque sur G .

Pour obtenir le point c. du théorème, nous montrerons que le sous-espace du lemme est invariant par ρ , comme ρ est irréductible, ce sous-espace est 0 ou F , et pour décider entre ces deux alternatives il suffira de tester un vecteur $\underline{a}$ bien choisi (à savoir le vecteur appartenant au plus haut poids de ρ ...)

4. L'assertion b. du théorème.

Montrons d'abord que pour $\underline{a} \neq 0$ donné la convergence de (15) ne dépend pas de la matrice $s \gg 0$. On a en effet des majorations

$$c_0(s)\ \ \mathrm{Tr}(g'g) \leqslant \mathrm{Tr}(g'sg) \leqslant c_1(s)\ \ \mathrm{Tr}(g'g)$$

où $c_0(s)$ et $c_1(s)$ les valeurs propres extrêmes de s (J.DIXMIER [3], p. 104, théorème 7). Il suffit donc d'examiner

(17) $$\int \|\rho(g)\underline{a}\|^{\sigma} \exp(-\pi\lambda^2\ \ \mathrm{Tr}(g'g))\, dg\ .$$

Mais on peut alors effectuer le changement de variable

$$g \longrightarrow \lambda^{-1} g$$

en supposant $\lambda > 0$; ce qui est évidemment permis ; comme ρ est irréductible on aura

$$\rho(\lambda^{-1}\ g) = \lambda^{\beta}\rho(g)\quad ;$$

l'intégrale (17) se ramène donc immédiatement à l'intégrale analogue avec $\lambda = 1$, d'où le résultat.

Il reste à faire varier $\underline{a}$. Soit F_0 le sous-espace des $\underline{a} \in F$ tels que $I_{\sigma}(s\ ,\ \underline{a}) < +\infty$ pour $s \gg 0$; comme on a, par un changement de variable évident, la relation

$$I_\sigma(s\ ,\ \rho(g)\underline{a}) = I_\sigma(g^{-1}sg'^{-1}\ ,\ \underline{a})\ ,$$

on voit que F_o est invariant par ρ ; comme ρ est irréductible, il vient $F_o = 0$ ou F , ce qui achève de démontrer la partie b. de l'énoncé.

5. L'assertion c. du théorème.

Pour décider de la nature des intégrales considérées lorsque $s \gg 0$, on va étudier l'intégrale

$$I_\sigma(1\ ,\ \underline{a}^+) = \int \|\rho(g)\underline{a}^+\|^\sigma \exp(-\pi\ \mathrm{Tr}(g'g))\ dg$$

où $\underline{a}^+$ appartient au plus haut poids de G ; introduisant le sous-groupe résoluble connexe T_o^+ défini au numéro 1 ; on aura donc

$$\rho(t^+)\underline{a}^+ = \alpha(t^+)\underline{a}^+$$

avec

$$\alpha(t^+) = \alpha(hu^+) = \alpha(h)\ .$$

Or considérons dans le G le sous-groupe compact maximal

$$K = G \cap O(n)\ ,$$

formé des rotations de déterminant positif ; la fonction de g figurant sous le signe $\int$ dans l'intégrale $I_\sigma(s\ ,\ \underline{a})$ est invariante par $g \longrightarrow kg$ (à cause du choix du produit scalaire sur F : les opérateurs $\rho(k)$ sont unitaires). D'autre part il est bien connu que

$$G = K.T_o^+\ ,$$

et qu'on a une formule d'intégration

$$\int_G \varphi(g)\ dg = \iint_{K\times T_o^+} \varphi(kg)\ dk\ d_rt$$

où d_rt est la mesure invariante à droite du sous-groupe T_o^+ . Par suite l'intégrale $I_\sigma(1\ ,\ \underline{a}^+)$ se réduit à l'intégrale

(18) $$\int_{T_o^+} \alpha(t)^\sigma \exp(-\pi\ \mathrm{Tr}(t't))\ d_rt\ .$$

Posant comme au numéro 1

$$T_o^+ = U^+H_o$$

on voit par un calcul trivial de mesures de Haar que (18) n'est autre que l'intégrale

(19) $$\iint_{H_o \times U^+} \alpha(h)^{\sigma} \quad \exp(-\pi \operatorname{Tr}(uh^2u')) \, dh \, du \quad .$$

Calculpns d'abord

(20) $$\int_{U^+} \exp(-\pi \operatorname{Tr}(uhu')) \, du \; .$$

Posant $u = 1 + v$ (avec v nilpotente) il vient

$$du = dv = \prod_{i<j} dv_{ij}$$

et

$$\operatorname{Tr}(uh^2u') = \operatorname{Tr}(h^2) + \operatorname{Tr}(vh^2v') \quad ;$$

donc

$$(20) = \exp(-\pi \operatorname{Tr}(h^2)) \int \exp(-\pi \operatorname{Tr}(vh^2v')) \, dv \quad ;$$

comme on a facilement

$$d(vh^{-1}) = \prod_{i=1}^{i=n} \lambda_i^{\,1-i} \, dv \qquad \text{pour} \quad h = (\lambda_1 \, , \, \ldots \, , \, \lambda_n) \; ,$$

il vient

$$(20) = \prod \lambda_i^{\,1-i} . \exp(-\pi \operatorname{Tr}(h^2)) \int \exp(-\pi \operatorname{Tr}(v'v)) \, dv$$
$$= \exp(-\pi \operatorname{Tr}(h^2)) \prod \lambda_i^{\,1-i} \quad ,$$

attendu que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} \, dt = 1 \; .$$

Par conséquent

$$(19) = \int \alpha(h)^{\sigma} \quad \exp(-\pi \operatorname{Tr}(h^2)) . \prod_{i=1}^{i=n} \lambda_i^{\,1-i} \, dh \; ,$$

et comme on a

$$\alpha(h)^{\sigma} = \prod_{i=1}^{i=n} \lambda_i^{\,\sigma(\alpha_i + \ldots + \alpha_n)}$$

$$dh = \prod_{i=1}^{i=n} \lambda_i^{-1} \, d\lambda_i$$

on voit que (19) est égal au produit des n intégrales

$$\int_0^{+\infty} e^{-\pi x^2} . x^{\sigma(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n) - i + 1} \, dx/x \quad ,$$

lesquelles convergent si et seulement si l'on a

$$\sigma(\alpha_i + \dots + \alpha_n) > i - 1$$

pour $1 \leqslant i \leqslant n$; mais comme σ et les α_i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ sont positifs, il suffir d'exprimer la condition relative à $i = n$ pour que les $n - 1$ autres conditions soient automatiquement remplies, et l'on parvient ainsi à la condition

$$\sigma \alpha_n > n - 1$$

annoncée dans le théorème 2.

6. La condition $s \gg 0$.

On va voir que (15) ne peut jamais converger si s n'est pas définie positive.

Soit $k = O(n) \cap G$ le sous-groupe des rotations de déterminant positif. Effectuant dans (4) le changement de variable

$$g \longrightarrow gk$$

on voit que

$$I_\sigma(s , \underline{a}) = I_\sigma(ksk^{-1} , \rho(k)\underline{a}) ;$$

on peut donc supposer s diagonale ; écrivons alors

$$s = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & -s_2 \end{pmatrix}$$

avec $s_1 \geqslant 0$, diagonale d'ordre r et $s_2 \not> 0$, diagonale d'ordre $n - r \geqslant 1$ si s n'est pas > 0.

Considérons dans G le sous-groupe

$$T : \text{ matrices } t = \begin{pmatrix} h_1 & x \\ 0 & h_2 \end{pmatrix}$$

($h_1 \in GL_+(r)$, $h_2 \in GL_+(n - r)$, x quelconque $r \times n - r$) ; comme

$$G = K.T$$

et comme la fonction sous le signe $\int$ est invariante à gauche par K (à cause du choix du produit scalaire), il est clair que

$$I_\sigma(s , \underline{a}) = \int ||\rho(t)\underline{a}||^\sigma \exp(-\pi \operatorname{Tr}(tst')) \, d_r t$$

où $d_r t$ est la mesure invariante à droite sur T. Or on a évidemment une relation de la forme

$$d_r t = \det(h_1)^{n_1} \det(h_2)^{n_2} \, dh_1 \, dh_2 \, dx$$

(dx mesure euclidienne) avec des exposants n_1 et n_2 qui importent peu. De plus

$$\mathrm{Tr}(tst') = \mathrm{Tr}(h_1 s_1 h'_1) - \mathrm{Tr}(x s_2 x') - \mathrm{Tr}(h_2 s_2 h'_2) \,.$$

Enfin, comme ρ est le produit d'une représentation polynomiale par une puissance du déterminant, il est clair que, <u>pour</u> h_1 <u>et</u> h_2 <u>donnés</u>, on a une relation

$$\|\rho(t)\underline{a}\|^{\sigma} = \langle \rho(t)\underline{a} \,,\, \rho(t)\underline{a} \rangle^{\sigma/2} = P(x)^{\sigma/2}$$

où $P(x)$ est un <u>polynome</u> en les x_{ij} , non nul si $\underline{a} \neq 0$.

Appliquant le théorème de Lebesgue-Fubini on voit que, si $I_{\sigma}(s \,,\, \underline{a})$ converge, on aura

$$\int P(x)^{\sigma/2} \exp(+\pi \, \mathrm{Tr}(x s_2 x')) \, dx < +\infty$$

pour <u>presque tout</u> couple h_1 , h_2 ; comme $\sigma/2 \geqslant 0$ et comme $\mathrm{Tr}(x s_2 x')$ est une forme quadratique <u>positive ou nulle</u> en les variables x_{ij} , on aboutit à une contradiction.

REMARQUE. - Il est clair que les raisonnements précédents s'appliquent encore si, au lieu d'intégrer sur G tout entier dans (15), on se borne à intégrer sur la partie de G définie par une relation de la forme

$$\det(g) \in A \,,$$

A étant une partie (<u>mesurable et de mesure non nulle</u>) de $\underline{\mathbb{R}}^*_+$.

APPENDICE.

Méthodes de calcul des mesures invariantes.

Comme on a fait usage dans cet exposé de formules d'intégration dont on aura certainement encore besoin par la suite, on se propose de rappeler ici un certain nombre de théorèmes généraux sur les mesures invariantes dans les groupes et espaces homogènes.

Soit G un groupe localement compact ; il existe sur G une mesure positive $d_r g$ invariante par les translations $g \longrightarrow g g_o$, et une mesure positive $d_\ell g$ invariante par les translations $g \longrightarrow g_o g$; elles sont uniques à des facteurs constants près, et on peut toujours supposer que

(A 1) $$d_\ell g = d_r(g^{-1}) \ .$$

De plus il existe sur G une fonction $\sigma_G(g)$ continue et positive telle que l'on ait les relations suivantes :

(A 2) $$d_\ell g = \sigma_G(g)\, d_r g$$

(A 3) $$\sigma_G(g_1\, g_2) = \sigma_G(g_1)\, \sigma_G(g_2)$$

(A 4) $$d_\ell(g g_o) = \sigma_G(g_o)\, d_\ell g$$

(A 5) $$d_r(g_o g) = \sigma_G(g_o)^{-1}\, d_r g \ .$$

On dit que G est <u>uninodulaire</u> si $d_r g = d_\ell g$, i.e. s'il existe une mesure invariante à droite <u>et</u> à gauche sur G. Exemples : groupes <u>compacts</u>, car toute solution positive de (A 3) est alors égale à 1 ; <u>groupes de Lie semi-simples</u>, car toute solution de (A 3) est égale à 1 sur le sous-groupe des commutateurs de G.

Soient G un groupe localement compact et X un sous-groupe fermé de G. Considérons l'espace homogène $Z = G/X$ (sur lequel G opère <u>à gauche</u>) ; on notera $g \longrightarrow \dot{g}$ l'application canonique de G sur G/X. Supposons G dénombrable à l'infini (i.e. réunion dénombrable de compacts).

Une mesure positive $dm(z)$ sur $Z = G/X$ est dite <u>quasi-invariante</u> si, pour tout $g \in G$, les mesures $dm(z)$ et $dm(gz)$ sont <u>équivalentes</u>, i.e. possèdent les mêmes ensembles de mesure nulle ; il revient au même (LEBESGUE-RADON-NIKODYM) de dire qu'on a une relation

(A 6) $$dm(gz) = \lambda(g\ ,\ z)\, dm(z)$$

où $\lambda(g\ ,\ z)$ est, pour g donné, une fonction positive et localement intégrable de z .

On démontre (DIEUDONNE) qu'<u>il existe toujours une mesure quasi-invariante sur</u> $Z = G/X$, <u>et que deux telles mesures sont équivalentes</u>. De plus, si une partie de Z est de mesure nulle pour $dm(z)$, son image réciproque dans G est de mesure nulle pour $d_\ell g$ (ou $d_r g$) , et inversement. On construit comme suit une mesure $dm(z)$: on remplace la mesure $d_\ell g$ par une mesure <u>bornée</u> $dm(g)$ qui lui soit équivalente (c'est possible si G est dénombrable à l'infini) et on prend pour $dm(z)$ l'image de $dm(g)$ par l'application $G \longrightarrow Z$ (voir la notion d'image d'une mesure dans N. BOURBAKI [2] , Chap. V , paragraphe 6).

Inversement, soit $dm(z)$ une mesure quasi-invariante sur Z ; il existe alors sur G une mesure $dm(g)$ telle que l'on ait, pour φ continue et à support compact sur G ,

$$\text{(A 7)} \qquad \int_G \varphi(g)\, dm(g) = \int_Z dm(\dot{g}) \int_X \varphi(gx)\, d_\ell x$$

($dm(g)$ s'obtient en plaçant sur la fibre de $\dot{g}$ dans G la mesure invariante à à gauche de X , et en intégrant par rapport à $dm(\dot{g})$ la famille de mesures ainsi définie sur G ; cf. N. BOURBAKI [2] , Chap. V , paragraphe 3 , n° 1). Cela dit, <u>la mesure</u> $dm(g)$ <u>est équivalente à la mesure de Haar de</u> G , et la formule (A 7) subsiste pour toute fonction $\varphi(g)$ intégrable pour $dm(g)$ (appliquer le théorème de Fubini généralisé : N. BOURBAKI [2] , Chap. V , paragraphe 3 , théorème 1 , p. 24).

Dans la pratique, on est souvent dans la situation suivante : il existe dans G un sous-groupe fermé Y tel que :

a. $X \cap Y$ <u>se réduit à l'élément neutre de</u> G

b. $G = Y.X$ <u>à un ensemble de mesure nulle près</u>.

L'hypothèse b. permet alors d'identifier G/X à Y (modulo un ensemble de mesure nulle), donc la mesure quasi-invariante $dm(z)$ de G/X à une mesure $dm(y)$ sur le sous-groupe Y ; comme le plongement de Y dans G/X est évidemment compatible avec les opérations de Y sur lui-même et sur G/X , on voit que $dm(y)$ possède forcément la propriété suivante : les translations $y \longrightarrow y_o y$ trnasforment $dm(y)$ en des mesures équivalentes. Or <u>cette propriété caractérise les mesures équivalentes</u> à $d_\ell y$. Appliquant (A 7) on voit donc qu'il existe sur Y et sur G des fonctions positives et localement intégrables $\gamma(g)$ et $\beta(y)$ telles que l'on ait

$$\text{(A 8)} \qquad \int_G \varphi(g)\, \gamma(g)\, d_\ell g = \iint_{X\times Y} \varphi(yx)\, \beta(y)\, d_\ell x\, d_\ell y$$

pour φ intégrable sur G par rapport à $dm(g) = \chi(g)\, d_\ell g$.

Reprenons l'espace homogène $Z = G/X$ sans supposer l'existence du sous-groupe Y "supplémentaire" de X . On dit qu'une mesure $dm(z)$ sur Z est relativement invariante si, au lieu de (A 6), on a une relation de la forme

(A 9) $$dm(gz) = \alpha(g)\, dm(z) ,$$

i.e. si $dm(z)$ se reproduit à un facteur constant près $\alpha(g)$ par $z \longrightarrow gz$; si $\alpha(g) = 1$ pour tout g on dira naturellement que $dm(z)$ est invariante.

Pour qu'il existe sur G/X une mesure relativement invariante, il faut et il suffit que l'homomorphisme

(A 10) $$x \longrightarrow \sigma_X(x) = d_\ell x / d_r x$$

de X dans le groupe multiplicatif R_+^* puisse se prolonger à G . Plus précisément, étant donné un homomorphisme $\alpha(g)$ de G dans R_+^* , l'équation (A 9) admet une solution $dm(z)$ non nulle si et seulement si l'on a

(A 11) $$\alpha(x) = \sigma_X(x)/\sigma_G(x)$$

et alors (A 9) admet une seule solution (à un facteur constant près), donnée par la formule

(A 12) $$\int dm(\dot g) \int \varphi(gx)\, d_\ell x = \int \varphi(g)\, \alpha(g)\, d_\ell g .$$

Il est naturellement toujours possible de résoudre (A 11) si le sous-groupe X est unimodulaire : dans ce cas il y a donc toujours une mesure relativement invariante $dm(z)$ sur G/X , et même une mesure qui se transforme suivant la formule

(A 13) $$dm(gz) = \sigma_G(g)^{-1}\, dm(z) ,$$

attendu que $\alpha(g) \equiv \sigma_G(g)^{-1}$ est une solution de (A 11) ; étant donné que

(A 14) $$\sigma_G(g)^{-1}\, d_\ell g = d_r g$$

on voit que dans ce cas la formule (A 12) s'écrit

(A 15) $$\int dm(\dot g) \int \varphi(gx)\, dx = \int \varphi(g)\, d_r g .$$

De même, si l'on a

(A 16) $$\sigma_G(x) = \sigma_X(x) ,$$

et dans ce cas seulement, il existe sur G/X une mesure invariante, donnée par la formule

(A 17) $$\int dm(\dot{g}) \int \varphi(gx)\, d_\ell x = \int \varphi(g)\, d_\ell g \ .$$

Cette situation s'applique notamment au <u>cas où</u> G <u>et</u> X <u>sont unimodulaires</u>.

Supposons maintenant qu'il existe un sous-groupe fermé Y vérifiant les conditions a. et b. énoncées plus haut, et soit $dm(z)$ une solution de (A 9). Le plongement de Y dans Z permet d'identifier $dm(z)$ à une mesure $dm(y)$ sur Y, et en écrivant la relation (A 9) pour $g = y_o \in Y$, il vient

(A 18) $$dm(y_o y) = \alpha(y_o)\, dm(y) \quad ;$$

on a donc nécessairement

(A 19) $$dm(y) = \alpha(y)\, d_\ell y$$

à un facteur constant près, il suffit de constater que la mesure $\alpha(y)^{-1}\, dm(y)$ est invariante à gauche, et alors la formule (A 12) s'écrit

(A 20) $$\int \varphi(g)\, \alpha(g)\, d_\ell g = \iint \varphi(yx)\, \alpha(y)\, d_\ell x\, d_\ell y \ .$$

On va en déduire le résultat suivant :

<u>soient</u> G <u>un groupe localement compact</u>, X <u>et</u> Y <u>deux sous-groupes fermés de</u> G ; <u>satisfaisant les hypothèses suivantes</u>

a. $X \cap Y$ <u>est compact</u> ;

b. $G = Y.X$ <u>plus un ensemble de mesure nulle</u> ;

c. X <u>est unimodulaire</u> ;

<u>alors, en normalisant convenablement les mesures de Haar, on a la relation</u>

(A 21) $$\int \varphi(g)\, d_r g = \iint \varphi(yx)\, \delta_G(y)^{-1}\, d_\ell y\, dx \quad ;$$

<u>si de plus le sous-groupe</u> Y <u>est invariant dans</u> G_o, <u>on a les relations</u>

(A 22) $$\delta_G(y) = \delta_Y(y) \quad ; \quad \delta_G(x) = d_r(x^{-1}yx)/d_r y$$

<u>et la formule</u>

(A 23) $$\int \varphi(g)\, d_r g = \iint \varphi(yx)\, d_r y\, dx$$

Ces résultats s'obtiennent comme suit à partir des précédents. Posons $K = X \cap Y$, sous-groupe compact de G par hypothèse. Puisque X est unimodulaire la formule (A 15) donne

(A 24) $$\int \varphi(g)\, d_r g = \int_{G/X} dm(\dot{g}) \int \varphi(gx)\, dx \ .$$

Or

$$G/X = Y/K \ \text{ plus un ensemble de mesure nulle} \ ;$$

on peut donc identifier la mesure $dm(\dot{g})$ sur G/X à une mesure $dm(\dot{y})$ sur Y/K ; et comme (A 13) indique comment G transforme $dm(\dot{g})$, on aura (faire $g = y$) la relation

$$dm(y_o\dot{y}) = \sigma_G(y_o)^{-1}\, dm(\dot{y}) \quad ,$$

autrement dit m est une mesure relativement invariante dans Y/K ; appliquant la formule (A 12) à Y , K et Y/K , il vient :

(A 25) $$\int \psi(y)\ \sigma_G(y)^{-1}\ d_\ell y = \int dm(\dot{y}) \int \psi(yk)\ dk \quad ;$$

d'autre par l'identification de $dm(\dot{g})$ et de $dm(\dot{y})$ transforme (A 24) en

(A 26) $$\int \varphi(g)\ d_r g = \int dm(\dot{y}) \int \varphi(yx)\ dx \quad ;$$

comme X contient le sous-groupe compact K , il est clair que

$$\int \varphi(yx)\ dx = \iint \varphi(ykx)\ dk\ dx$$

si dk est choisie de masse totale 1 ; donc (A 26) s'écrit

$$\begin{aligned}\int \varphi(g)\ d_r g &= \int dm(\dot{y}) \iint \varphi(ykx)\ dk\ dx \\ &= \int dx \int dm(\dot{y}) \int \varphi(ykx)\ dk \\ &= \int dx \int \varphi(yx)\ \sigma_G(y)^{-1}\ d_\ell y\end{aligned}$$

d'après (A 25) appliquée à la fonction $y \longrightarrow \varphi(yx)$; d'où la formule (A 21). Les relations (A 22) et (A 23) s'obtiennent facilement en examinant le comportement des deux membres de (A 21) par $g \longrightarrow xg$ et $g \longrightarrow gy$.

Les formules (A 21), (A 23) couvrent pratiquement toutes les situations qu'on rencontre dans la théorie des espaces homogènes. Dans les questions plus techniques on a parfois besoin de deux autres formules, dont les démonstrations sont infiniment plus compliquées que celles des formules précédentes.

Soit G un groupe de Lie semi-simple ayant un centre fini. Soit K un sous-groupe compact maximal de G . Désignons par $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ les algèbres de Lie réelles de G et K . On sait (Papa CARTAN-IWASAWA-MOSTOW) qu'il existe alors un antiautomorphisme involutif

$$X \longrightarrow X'$$

de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ telle que

$$X \in \mathfrak{k} \Longleftrightarrow X' = -X \quad ;$$

désignant par $\mathfrak{p}$ le sous-espace vectoriel (ce n'est ps une sous-algèbre) de $\mathfrak{g}$ défini par l'équation

$$X' = + X \ ,$$

on a alors une décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$$

en somme directe. Il est de plus trivial que

$$[\mathfrak{k}\,,\,\mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k} \quad ; \quad [\mathfrak{k}\,,\,\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p} \quad ; \quad [\mathfrak{p}\,,\,\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$$

On peut démontrer que l'application

$$(k\ ,\ X) \longrightarrow k.\exp(X)$$

de $K \times \mathfrak{p}$ dans G est un isomorphisme de la variété analytique $K \times \mathfrak{p}$ sur la variété analytique G (intuitivement, les $\exp(X)$, $X \in \mathfrak{p}$, sont des éléments "symétriques positifs" de G relativement à l'involution $g \longrightarrow g'$ qui induit $X \longrightarrow X'$). Considérons maintenant dans le sous-espace $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de dimension maximum ; $\mathfrak{h}$ est évidemment abélienne, car $[\mathfrak{h}\ ,\ \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{k}$, et l'application $X \longrightarrow \exp(X)$ identifie $\mathfrak{h}$ à un sous-groupe abélien fermé et connexe H de G . On a alors le résultat fondamental que voici :
le sous-groupe H est entièrement déterminé modulo

$$H \longrightarrow kHk^{-1}$$

tout $g \in G$ s'écrit d'une façon et d'une seule sous la forme

$$g = k_1 h k_2 \qquad\qquad (k_1\ ,\ k_2 \in K\ ,\ \ h \in H) \quad ;$$

il existe sur H une fonction $\Delta(h)$ telle que l'on ait

$$\text{(A 27)} \qquad \int \varphi(g)\ dg = \iiint \varphi(k_1 h k_2)\ \ \Delta(h)\ dk_1\ dh\ dk_2 \quad ;$$

enfin la fonction $\Delta(h)$ s'obtient comme suit :

$$\text{(A 28)} \qquad \Delta(h) = \prod |\alpha(h) - \alpha(h)^{-1}|^{1/2} \quad ,$$

le produit étant étendu à tous les caractères α de H , autres que l'unité pour lesquels il existe un élément X_α non nul de la complexification de $\mathfrak{g}$ tel que l'on ait

$$hX_\alpha h^{-1} = \alpha(h)X_\alpha \ ;$$

ou encore : pour $h \in H$ et $X \in \mathfrak{g}$ posons

$$Ad(h)X = h.X.h^{-1} \quad ;$$

soient $\mathfrak{n}$ le sous-espace des $X \in \mathfrak{g}$ invariants par les opérateurs $Ad(h)$; alors

$$\Delta(h) = |\det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{n}}(\mathrm{Ad}(h) - \mathrm{Ad}(h)^{-1})|^{1/2}$$

(noter que $\mathrm{Ad}(h)$ opère de façon naturelle dans l'espace quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$).
Ces résultats sont démontrés dans HARISH-CHANDRA [5], p. 614-626). Dans le cas du groupe $SL(n, \underline{C})$ le résultat est dû à GELFAND et NAÏMARK [4], ce livre contient les traductions de mémoires remontant à 1950 ; Gelfand et Naïmark ont toujours affirmé que leurs méthodes fonctionnaient pour tous les groupes semi-simples complexes ou réels, mais ne l'ont jamais démontré, ce qui n'est pas surprenant quand on sait que les groupes réels se comportent de façon beaucoup plus compliquée que les groupes complexes ...)

Explicitons (A 27) et (A 28) pour le groupe

$$G = SL(n, \underline{R}) \quad ;$$

ici $K = SO(n)$, matrices orthogonales, H est le groupe des matrices diagonales $\gg 0$; si l'on pose

$$h = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

on trouve, calcul trivial, la formule

$$\Delta(h) = \prod_{i<j} |\lambda_i^2 - \lambda_j^2| \tag{A 29}$$

Il ne serait pas très surprenant qu'on ait besoin de cette formule dans la suite de ces exposés, quand bien même les spécialistes de la théorie des fonctions modulaires ne l'auraient jamais utilisée ...

Voici maintenant la seconde formule à laquelle nous avons fait allusion. Soit G un groupe semi-simple réel ayant un centre fini ; si K est un sous-groupe compact maximal de G et si T est un sous-groupe résoluble connexe maximal de G on sait d'une part que

$$G = K.T$$

(IWASAWA-MOSTOW), la formule (A 21) s'applique ici, et d'autre part que, si G est complexe, auquel cas T est aussi complexe, on a

$$G = \bigcup k.T.k^{-1} \quad .$$

("toute matrice complexe non dégénérée peut, dans une base orthonormale convenable, se mettre sous la forme triangulaire"). Soit d'autre part U le sous-groupe des commutateurs de T ("matrice unipotentes") ; il existe un sous-groupe abélien complexe H de T tel que

$$T = U.H$$

avec unicité ("matrices diagonales") et de plus presque tout élément de T est de la forme uhu^{-1} , avec un nombre fini de possibilités pour h et pour u ("une matrice dont les valeurs propres sont distinctes est équivalente à une matrice diagonale"). Il s'ensuit

$$G = \bigcup kuHu^{-1}k^{-1} \text{ plus un ensemble de mesure nulle.}$$

Cela dit on a une formule

$$\text{(A 30)} \qquad \int \varphi(g)\, dg = \iiint \varphi(kuhu^{-1}k^{-1})\, D(h)\, dk\, du\, dh$$

et le facteur $D(h)$ s'obtient comme suit : soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie (forcément complexe) de G ; disons qu'un caractère $\alpha(h)$ du sous-groupe H est une racine de $\mathfrak{g}$ par rapport à H s'il existe un $X_\alpha \in \mathfrak{g}$ non nul tel que

$$h.X_\alpha.h^{-1} = Ad(h)X_\alpha = \alpha(h)X_\alpha$$

et si α est distinct du caractère unité de H (noter que $\alpha(h)$ est forcément fonction analytique complexe de h) ; cela dit on a

$$\text{(A 31)} \qquad D(h) = \prod_\alpha |\alpha(h) - 1|^2 .$$

Voir la démonstration dans HARISH-CHANDRA [6] .

Il existe certainement une formule analogue à (A 30) pour les groupes semi-simples réels (le cas du groupe $SL(2, \underline{R})$ peut se traiter directement), mais la situation est beaucoup plus compliquée à cause du fait qu'il y a alors plusieurs types tout à fait différents de classes d'éléments conjugués dans G , même si l'on néglige les ensembles de mesure nulle. Le résultat est sûrement le suivant : tout d'abord on sait (HARISH-CHANDRA [7]) qu'il existe dans G un nombre fini de sous-groupes abéliens H_i $(1 \leq i \leq r)$ tels que tout $g \in G$ soit conjugué d'un élément d'un H_i bien déterminé ; de plus, en ôtant au besoin de G un ensemble de mesure nulle, on peut supposer que les H_i sont des sous-groupe de Cartan, donc abéliens connexes maximaux, de G ; cela dit, la généralisation cherchée de (A 30) est nécessairement

$$\text{(A 32)} \qquad \int \varphi(g)\, dg = \sum_{i=1}^{i=r} \int_{G/H_i} d\dot{g} \int_{H_i} \varphi(gh_ig^{-1})\, D_i(h_i)\, dh_i \quad ,$$

où $d\dot{g}$ est la mesure invariante sur l'espace homogène G/H_i . L'existence de cette formule est claire, vu les théorèmes généraux sur la "décomposition des mesures" ; mais le calcul explicite des jacobiens $D_i(h_i)$ n'a pas encore été fait, bien que ce calcul ne soit sans doute guère plus difficile que dans le cas complexe.

Bien entendu seuls interviennenet effectivenent les H_i pour lesquels $\bigcup gH_ig^{-1}$ est de nesure >0 dans G .

Il est pratiquenent certain que la fornule (A 32) devrait intervenir dans toute généralisation inaginable de la célèbre "fornule des traces" de Selberg ; c'est pourquoi il ne senble pas absurde de faire allusion à (A 32) à propos de fonctions nodulaires ...

BILIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Livre V : Espaces vectoriels topologiques, Chapitres I et II. - Paris, Hermann , 1953 (Act. scient. et ind. n° 1189).

[2] BOURBAKI (Nicolas). - Livre VI : Intégration, Chapitres I à IV. - Paris, Hermann, 1952 (Act. scient. et ind, n° 1175, Eléments de Mathématique n° 13). Livre VI : Intégration, Chapitre V. - Paris, Hermann, 1957 (Act. scient. et ind. n° 1244, Eléments de Mathénatique n° 21).

[3] DIXMIER (Jacques). - Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien. - Paris, Gauthier-Villars, 1957 (Cahiers scientifiques n° 25).

[4] GELFAND (I.M.) und NEUMARK (M.A.). - Unitäre Darstellungen der klassischen Gruppen. - Berlin, Akadenie-Verlag, 1957 (Mathenatisohe Lehrbücher und Monographien, 2. Abteilung, Band 6).

[5] HARISH-CHANDRA. - Representations of senisinple Lie groups VI , Amer. J. of Math., t. 78, 1956, p. 564-628.

[6] HARISH-CHANDRA. - The Plancherel fornula for complex senisinple Lie groups, Trans. Amer. nath. Soc., t. 76, 1954, p. 485-528.

[7] HARISH-CHANDRA. - The characters of senisinple Lie groups, Trans. Amer. math. Soc., t. 83, 1956, p. 98-163.