André Weil

Réduction des formes quadratiques

Séminaire Henri Cartan, tome 10, n° 1 (1957-1958), exp. n° 1, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1957-1958__10_1_A1_0>

4 novembre 1957

RÉDUCTION DES FORMES QUADRATIQUES,

d'après MINKOWSKI et SIEGEL

par André WEIL

La théorie s'insère dans le schéma suivant, dont on rencontrera d'autres exemples par la suite. Soit G un groupe de Lie semi-simple ; soit Γ un sous-groupe discret de G ; classiquement, on se propose de trouver, pour Γ dans G, un "domaine fondamental", c'est-à-dire un système de représentants dans G pour G/Γ possédant des propriétés sympathiques (par exemple, d'être réunion de variétés plongées dans G). Si K est un sous-groupe compact de G, G opèrera sur l'espace homogène $H = G/K$ (notation : on fera opérer G à droite sur H ; H est donc l'ensemble des classes à gauche, Kx, suivant K dans G) ; il est immédiat que, si Γ est discret dans G, Γ, en tant que sous-groupe de G, opère sur H d'une manière "proprement discontinue" (ce qui veut dire : quelle que soit la partie compacte X de H, les $\gamma \in \Gamma$ tels que $X \cap X\gamma \neq \emptyset$ sont en nombre fini). En fait, on prend toujours pour K un sous-groupe compact maximal de G ; il résulte de la théorie des groupes semi-simples que K est défini par là d'une manière unique, à un automorphisme intérieur près de G ; autrement dit, H est défini d'une manière unique à un isomorphisme près. Sans restreindre essentiellement la généralité des problèmes qu'on se propose de traiter, on peut supposer que G n'admet pas de sous-groupe compact invariant ; $H = G/K$ est alors, au sens de CARTAN, l'"espace riemannien symétrique" associé à G.

Du point de vue théorique, il est commode de prendre G semi-simple <u>au sens strict</u> (non seulement au sens infinitésimal, mais au sens global), c'est-à-dire de centre réduit à l'élément neutre (et non pas seulement de centre discret). Du point de vue des calculs explicites, il est souvent commode de calculer avec des matrices, ce qui conduit à écrire des groupes, infinitésimalement simples ou semi-simples, ayant un centre discret (par exemple le groupe linéaire spécial sur $\mathbb{R}$, $SL(\mathbb{R},n)$, dont le centre, si n est pair, est $\pm 1_n$, où 1_n est la matrice unité). D'où maints abus de langage, dont on s'excuse d'avance.

Dans la théorie de la réduction des formes quadratiques au sens classique, on part du groupe $G_0 = PL_+(\mathbb{R},n)$ (partie connexe du groupe projectif réel à n variables"homogènes" = quotient du groupe linéaire $L_+(\mathbb{R},n)$ à n variables, de déterminant >0 , par son centre = quotient du groupe linéaire spécial $SL(\mathbb{R},n)$, à n variables, de déterminant 1, par son centre), et du groupe discret Γ_o , image dans G_o du groupe multiplicatif Γ des matrices de déterminant ± 1 à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Un sous-groupe compact maximal de G_o est l'image K_o dans G_o du groupe orthogonal spécial $SO(\mathbb{R},n)$ (matrices orthogonales de déterminant 1).

Soit P l'espace des formes quadratiques positives non dégénérées à n variables :

$$F(x) = {}^t x.A.x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j \quad , \quad {}^t A = A \; .$$

(un vecteur x , en notation matricielle, sera toujours conçu comme matrice à n lignes et 1 colonne). On écrira $A \gg 0$ pour exprimer que la matrice symétrique A est celle d'une forme positive non dégénérée. Le groupe $L(\mathbb{R},n)$ opère sur P par la loi $(A,X) \longrightarrow {}^t X.A.X$, où $A \in P$ et X est un élément de $L(\mathbb{R},n)$ écrit comme matrice. Toute forme de P s'écrivant comme somme de n carrés (de formes linéaires en les x_i) , le groupe opère transitivement dans P ; l'élément 1_n de P (c'est-à-dire la forme "standard" $\sum x_i^2$) étant invariant par le groupe orthogonal $O(\mathbb{R},n)$, P s'identifie à l'espace homogène $L(\mathbb{R},n)/O(\mathbb{R},n)$.

Dans l'espace vectoriel (de dimension $n(n+1)/2$) de toutes les formes quadratiques dans $\mathbb{R}^n$ (ou, ces formes étant exprimées au moyen de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, dans l'espace des matrices symétriques à n lignes et n colonnes), P est défini par les inégalités $P(x) > 0$ $(x \neq 0)$ et forme donc un cône convexe ; on vérifie immédiatement que ce cône est ouvert ; sa frontière est l'ensemble des formes positives dégénérées. Par passage au quotient par la relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont les rayons ("demi-droites") issus de 0 , P détermine une partie convexe P_o d'un espace projectif de dimension $n(n+1)/2 - 1$. Par passage au quotient, le groupe projectif $G_o = PL(\mathbb{R},n)$ opère dans P_o ; il résulte de ce qui précède qu'il y opère transitivement, et que P_o s'identifie à G_o/K_o , espace "riemannien symétrique" associé à G_o . La théorie de MINKOWSKI conduit à la détermination, dans P_o , d'un domaine fondamental pour le groupe discret Γ_o , qui est un polyèdre convexe (plus exactement, la réunion de l'intérieur d'un polyèdre convexe et d'une partie convenable de sa frontière).

Soit d'abord $n = 2$ ("formes binaires") ; on écrit

$$F(x) = ax^2 + 2bxy + cy^2 \quad ;$$

P est le cône déterminé par $a > 0$, $ac - b^2 > 0$ (intérieur de l'une des nappes d'un cône du second degré dans $\underset{\sim}{R}^3$) ; P_o est, dans le plan projectif, l'intérieur de la conique $ac - b^2 = 0$. Comme $X \longrightarrow {}^tX.A.X$ est une représentation du groupe linéaire dans l'espace des formes symétriques A , il s'ensuit, par passage au quotient, que les opérations de G_o dans P_o sont des homographies ou automorphismes du plan projectif ambiant, conservant la conique frontière de P_o ; P_o étant pris comme "modèle cayleyien" de la géométrie plane hyperbolique, G induit donc, sur P_o , un sous-groupe du groupe des automorphismes de cette géométrie ; on vérifie sans peine que c'est même exactement la partie connexe de ce dernier groupe (c'est-à-dire le "groupe des déplacements non-euclidiens"). La correspondance entre le "modèle cayleyien" et le demi-plan de Poincaré s'obtient comme suit : à toute forme $F \in P$ on fait correspondre, d'une part le point f qu'elle détermine dans P_o , d'autre part celle des racines de l'équation $az^2 + 2bz + c = 0$ dont la partie imaginaire est > 0 ; la correspondance $f \rightleftarrows z$ est une correspondance biunivoque entre P_o et le demi-plan supérieur de la variable z ; les opérations de G_o dans ce demi-plan sont évidemment celles du groupe homographique réel de déterminant > 0 (groupe des déplacements non-euclidiens dans le modèle de Poincaré).

Pour déterminer un point de P , on peut, au lieu de se donner une forme quadratique dans $\underset{\sim}{R}^n$, se donner une forme quadratique F , positive non dégénérée, dans un espace vectoriel E de dimension n sur $\underset{\sim}{R}$, et une base $(e_1 , \dots , e_n)$ de cet espace. Si $\langle x,y \rangle$ est le produit scalaire dans E , associé à F de la manière habituelle, les données en question déterminent la forme quadratique dans $\underset{\sim}{R}^n$ donnée par

$$F\left(\sum_1^n x_i\, e_i\right) = \sum_{i,j} \langle e_i , e_j \rangle\, x_i\, x_j \ .$$

Posons $A = \|a_{ij}\|$, $a_{ij} = \langle e_i , e_j \rangle$; soit $X = \|x_{ij}\|$ un élément du groupe linéaire $L(\underset{\sim}{R},n)$; par définition, la transformée de A par X est $A' = {}^tX.A.X$, ce qui s'écrit aussi

$$A' = \|a'_{ij}\| \quad \text{avec} \quad a'_{ij} = \langle e'_i , e'_j \rangle \ , \ e'_i = \sum_{k=1}^n x_{ki}\, e_k$$

Dire que X est à coefficients entiers de déterminant ± 1 équivaut à dire que les "lattices" (sous-groupes discrets de rang n de l'espace E) engendrés par $(e_1 , \dots , e_n)$ et par $(e'_1 , \dots , e'_n)$ coïncident. L'ensemble formé par A et tous ses transformés par le groupe Γ est donc l'ensemble des matrices $A' = \langle e'_i , e'_j \rangle$ lorsqu'on fait parcourir à $(e'_1 , \dots , e'_n)$ l'ensemble de tous les systèmes de n générateurs du lattice engendré par $e_1, \ldots, e_n$. Supposons qu'on ait choisi, dans P_o, un système de représentants M_o pour la relation d'équivalence déterminée par les opérations du groupe Γ_o sur P_o ; convenons momentanément de dire que la matrice A d'une forme quadratique dans $\mathbb{R}^n$ est "réduite" si le point qu'elle détermine dans P_o appartient à M_o, et aussi qu'une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de l'espace E est "réduite" pour une forme quadratique F dans E si la matrice A des $\langle e_i, e_j \rangle$ est réduite. Il résulte de ce qui précède qu'étant donnés une forme F et un lattice Λ dans E, il y a au moins un système de générateurs de Λ qui est une base réduite pour F, et que deux tels systèmes déterminent nécessairement la même matrice A, donc ne diffèrent l'un de l'autre que par une transformation du groupe orthogonal de F. Choisir un système de représentants M_o revient donc "à peu près" à énoncer une loi qui, à tout couple formé d'une forme quadratique F et d'un lattice Λ, permette d'associer, avec le moins d'ambiguïté possible, un système de générateurs de Λ. On va, d'après MINKOWSKI, formuler une telle loi.

Soit d'abord $n = 2$; on prendra pour e_1 un vecteur $\neq 0$ du lattice Λ dont la "longueur" $F(e_1)^{1/2}$ soit la plus petite possible, puis pour e_2 un vecteur dont la longueur soit la plus petite possible parmi ceux qui ne sont pas de la forme te_1 $(t \in \mathbb{R})$. Il est clair qu'il n'y a qu'un nombre fini de vecteurs e_1 satisfaisant à la 1e condition, et qu'il y en a au moins deux ; des considérations géométriques élémentaires (et évidentes) font voir qu'il y en a exactement deux, sauf dans les cas suivants : (a) lattice de Gauss (points à coordonnées entières dans le plan muni de la forme $x^2 + y^2$) ; (b) lattice hexagonal (engendré par les vecteurs $(1,0)$ et $(1/2, \sqrt{3}/2)$ dans le plan muni de $x^2 + y^2$). Il s'ensuit que, dans tous les cas, les divers choix possibles de e_1 se déduisent les uns des autres par une rotation laissant Λ invariant (rotation d'angle π dans le cas général, d'angle $m\pi/2$, resp. $m\pi/3$, avec m entier, dans les cas (a), resp. (b)). Quant au second vecteur e_2, on constate non moins aisément qu'il est déterminé d'une manière unique au signe près (une fois qu'on a choisi e_1) sauf dans le cas d'un lattice engendré par deux vecteurs $(1,0)$ et $(1/2, y)$, avec $|y| \geqslant \sqrt{3}/2$, dans le plan muni de $x^2 + y^2$. On lèvera l'indétermination de signe, autant que possible, en convenant de prendre e_2 tel que $\langle e_1, e_2 \rangle \geqslant 0$; il se trouve que, lorsque cette règle laisse subsister une ambiguïté, le lattice Λ admet la droite Oe_1 pour axe de symétrie, et les choix possibles de e_2 sont symétriques l'un de l'autre par rapport à cet axe.

Une base (e_1, e_2) du plan muni d'une forme quadratique F sera dite <u>réduite</u>

si elle possède les propriétés énoncées ci-dessus, par rapport au lattice qu'elle engendre et à la forme F. Une forme quadratique $F = ax^2 + 2bxy + cy^2$ dans $\underset{\sim}{R}^2$ sera dite <u>réduite</u> si la base canonique de $\underset{\sim}{R}^2$, formée des vecteurs $(1,0)$ et $(0,1)$, est réduite par rapport à cette forme. Si on écrit les inégalités

$$F((1,0)) \leq F((0,1)) \leq F((\pm 1,1))$$

on obtient immédiatement les conditions $a \leq c$, $|2b| \leq a$, qui sont donc nécessaires pour que F soit réduite (avec bien entendu $a > 0$ puisque F doit être positive non dégénérée). La condition subsidiaire imposée à e_2 s'écrit ici $b \geq 0$. Donc :

$$0 < a \leq c \ , \ 0 \leq 2b \leq a \ .$$

Réciproquement, ces inégalités entraînent, d'abord que F est positive non dégénérée (c'est clair), puis que F est réduite (c'est facile à vérifier). Elles déterminent, dans P_0, c'est-à-dire dans l'intérieur de la conique $ac - b^2 = 0$, un triangle M_0, ayant un sommet sur la conique. Puisque, étant donnés un lattice et une forme, la règle ci-dessus permet toujours de construire au moins une base réduite, il s'ensuit que M_0 contient un système complet de représentants pour le groupe Γ_0 opérant dans P_0. Du fait que, pour F et Λ donnés, les divers choix possibles de la base réduite se déduisent tous les uns des autres par une rotation ou une symétrie conservant Λ, on conclut que M_0 constitue même un tel système de représentants. Il s'ensuit que P_0 est réunion de M_0 et de tous ses transformés par Γ_0 ("pavage" du plan non euclidien par les transformés du domaine fondamental). Naturellement, ces transformés ne sont pas deux à deux sans point commun : cela tient justement aux cas d'ambiguïté possible dans le choix d'une base réduite, ou, ce qui revient au même, au fait que Γ_0 n'opère pas sur P_0 "sans point fixe". L'analyse détaillée du pavage en question est classique, n'offre pas de difficulté, et est sans intérêt pour ce qui suit. On notera que si, au lieu de partir du groupe Γ des matrices entières de déterminant ± 1, on était parti du sous-groupe Γ^+ de Γ formé des matrices de déterminant 1, on aurait été conduit naturellement à un domaine fondamental deux fois plus grand, correspondant à la notion d'"équivalence propre" des formes quadratiques (au lieu de l'équivalence "propre ou impropre" qui a servi ci-dessus) ; pour l'équivalence propre, une forme sera dite réduite si elle satisfait à $0 < a \leq c$, $|2b| \leq a$; ce sont les conditions classiques de Gauss, correspondant, dans le demi-plan de Poincaré, au domaine fondamental classique pour le groupe modulaire (déterminé par $|z| \geq 1$, $|R(z)| \leq 1/2$).

Passons au cas général. Dans un espace vectoriel E de dimension n sur $\underset{\sim}{R}$, une base $(e_1, \ldots, e_n)$, engendrant un lattice Λ, sera dite <u>réduite</u>

par rapport à une forme quadratique F (positive non dégénérée) si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

(i). Pour chaque i, soit E_i l'ensemble des vecteurs $e \in \Lambda$ tels que $(e_1, \dots, e_{i-1}, e)$ fasse partie d'un système de n générateurs pour Λ ; e_i est alors un vecteur de longueur minimum parmi ceux de E_i.

(ii). On a $\langle e_i , e_{i+1} \rangle \geqslant 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

Comme ci-dessus, la condition (ii) sert à se débarrasser, dans la mesure du possible, de l'ambiguïté de signe inhérente au choix des e_i quand F et Λ sont donnés. Si on s'était laissé guider par le cas $n = 2$, on aurait, dans (i), pris pour E_i l'ensemble des vecteurs de Λ qui ne sont pas dans l'espace vectoriel engendré par $e_1, \dots, e_{i-1}$; avec cette condition plus forte, il n'aurait pas été vrai que tout lattice possède une base réduite par rapport à une forme F donnée, d'où nécessité de modifier assez fortement l'énoncé des résultats ultérieurs (il est à noter que, dans les généralisations de la théorie, par exemple aux corps de nombres algébriques, on ne peut éviter ces énoncés d'aspect plus compliqué). On notera que, pour que $e \in E_i$, il faut et il suffit que l'image de e dans le quotient Λ / Λ_{i-1} de Λ par le lattice engendré par $e_1, \dots, e_{i-1}$ soit un élément "primitif" de ce quotient (c'est-à-dire non divisible par un entier > 1). Il revient au même de dire que E_i est l'ensemble des vecteurs $\sum_j x_j e_j$ où $x_1, \dots, x_n$ sont des entiers tels que le plus grand commun diviseur $(x_i, \dots, x_n)$ de $x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$ est égal à 1. Par suite, pour qu'une forme quadratique positive non dégénérée $F(x) = \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j$ soit réduite (ce qui veut dire que la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est réduite par rapport à la forme), il faut et il suffit qu'elle satisfasse aux conditions :

(i). $F(x_1, \dots, x_n) \geqslant a_{ii}$ pour tout système d'entiers $(x_1, \dots, x_n)$ tels que $(x_i, \dots, x_n) = 1$;

(ii). $a_{i,i+1} \geqslant 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

Il est clair d'ailleurs que la condition (i), jointe à $a_{11} > 0$ (resp. $a_{11} \geqslant 0$) suffit à entraîner que F est positive non dégénérée (resp. positive).

Si on remarque qu'avec les notations ci-dessus on a $e_j \in E_i$ et $e_j \pm e_i \in E_j$ chaque fois que $i < j$, on en conclut que (i) entraîne les inégalités :

(I). $a_{ii} \leqslant a_{jj}$ $(i < j)$ et

(II). $|2a_{ij}| \leqslant a_{ii}$ $(i < j)$.

De plus, un théorème fondamental, dû à Minkowski, affirme qu'à tout n correspond un $C_n > 0$ tel que (i) entraîne aussi l'inégalité :

$$\text{(III).}\quad a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn} \leq C_n \det(A)\ ,\quad A = \|a_{ij}\|\ .$$

Soit M la partie de P définie par les conditions (i) et (ii) ; soit M_o son image dans P_o. L'ensemble M étant défini par une infinité d'inégalités linéaires et homogènes par rapport aux a_{ij}, il est évident que c'est un ensemble convexe "positivement homogène". Comme il est évident que tout lattice Λ possède au moins une base réduite par rapport à une forme donnée, M_o contient un système de représentants de P_o par rapport au groupe Γ_o. On peut donner à ce sujet des énoncés beaucoup plus précis (voir plus loin), mais ils ont peu d'importance du point de vue des applications. Les résultats vraiment importants sont liés à l'introduction de deux familles d'ouverts dans P (resp. P_o) qu'on va définir maintenant.

Pour chaque $t > 1$, soit $S(t)$ la partie de P définie par les inégalités :

$$\text{(A)}\qquad \begin{cases} a_{ii} < t\, a_{i+1,i+1} & (1 \leq i \leq n-1) \\ |2a_{ij}| < t\, a_{ii} & (1 \leq i < j \leq n) \\ a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn} < C_n\, t^n \det(a_{ij}) & \end{cases}$$

Le théorème de Minkowski montre que $M \subset S(t)$ pour $t > 1$ (c'est principalement sous cette forme qu'on a à l'utiliser). Il est clair que les $S(t)$ forment une famille, croissante avec t, de parties ouvertes de P, dont P est la réunion. On notera $S_o(t)$ l'image de $S(t)$ dans P_o.

D'autre part, la réduction de la forme quadratique F à une somme de carrés par la méthode des algébristes babyloniens (méthode connue également, dans la littérature, sous les noms de "méthode de Jacobi" et "méthode d'orthogonalisation de Schmidt", à moins qu'il ne convienne plutôt de l'attribuer à quelque savant russe...) permet, d'une manière et d'une seule, d'écrire :

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} d_i\, \Big(x_i + \sum_{j=i+1}^{n} t_{ij}\, x_j\Big)^2 \end{aligned}$$

ou encore, en termes matriciels, $A = {}^tT.D.T.$, où D est la matrice diagonale ayant $d_1, \ldots, d_n$ pour coefficients diagonaux (et 0 partout ailleurs), et T la matrice triangulaire (au sens strict, c'est-à-dire ayant 1 partout dans la diagonale principale) dont les coefficients sont les t_{ij} pour $i < j$, et les δ_{ij} (1 si $i=j$, 0 sinon) pour $j \leq i$. Par récurrence~~, on démontre~~ aisément que les d_i , t_{ij} sont des fonctions rationnelles des a_{ij} , à dénominateurs $\neq 0$ dans P .

Cela posé, soit $S'(u)$, pour tout $u > 1$, l'ensemble des points de P de la forme $A = {}^tT.D.T$, où D est une matrice diagonale, à coefficients diagonaux $d_1 , \ldots , d_n$, et T une matrice triangulaire au sens strict, à coefficients t_{ij} pour $i < j$, satisfaisant aux inégalités :

(B) $0 < d_i < u\, d_{i+1}$ $(1 \leq i \leq n-1)$; $|t_{ij}| < u$ $(1 \leq i < j \leq n)$.

D'après ce qu'on vient de dire, il est clair que les $S'(u)$ forment, eux aussi, une famille croissante d'ouverts de P , dont la réunion est P . Des calculs triviaux permettent de vérifier que tout $S(t)$ est contenu dans un $S'(u)$, et réciproquement. Il s'ensuit évidemment que M est contenu dans $S'(u)$ pour u assez grand. On notera $S'_o(u)$ l'image de $S'(u)$ dans P_o .

On doit à SIEGEL le très important résultat suivant (pour l'énoncer commodément, on conviendra, pour toute partie S de P , et toute matrice inversible X , de noter S^X le transformé de S par X , i.e. l'ensemble des ${}^tX.A.X$ pour $A \in S$) :

Quels que soient $t > 1$ et m entier $\neq 0$, l'ensemble des matrices X à coefficients entiers, de déterminant m , telles que $S(t) \cap S(t)^X \neq \emptyset$, est fini.

Il s'ensuit naturellement qu'on peut en dire autant pour $S'(u)$. Comme $M \in S(t)$, on en conclut en particulier, en prenant $m = \pm 1$, que, pour tout $t > 1$, $S(t)$ est contenu dans la réunion de M et d'un nombre fini de transformés de M par des éléments du groupe Γ .

Enfin, on peut vérifier, par exemple par calcul explicite, que, dans P_o considéré comme espace riemannien symétrique G_o/K_o , chacun des ensembles (non compacts) $S_o(t)$ est de volume fini, pour le volume "naturel" défini dans l'espace P_o (volume qui est naturellement invariant par G_o , et que cette condition détermine d'une manière unique à un facteur près). Compte tenu de ce qui précède, cela équivaut naturellement à dire que M_o est de volume fini, ou encore que l'espace homogène G_o/Γ_o est de volume total fini. La détermination du volume de ce dernier espace (l'élément de volume invariant dans G_o étant choisi explicitement une fois pour toutes) est due à MINKOWSKI.

Pour mémoire, on ajoute ce qui suit, dont l'intérêt est d'ordre historique et esthétique mais dont en réalité on ne semble guère avoir à faire usage. En premier lieu, l'ensemble convexe M, défini par les inégalités (i) et (ii) jointes à l'inégalité $a_{11} > 0$, est en réalité une <u>pyramide convexe</u> ; autrement dit, il suffit pour le définir d'un <u>nombre fini</u> d'inégalités prises parmi celles qu'on vient de mentionner. On en a vu (sans démonstration, mais la démonstration dans ce cas est facile) un exemple, pour $n = 2$; pour $n = 3$ et $n = 4$, on connaît un système explicite d'inégalités définissant M ; rien de tel n'est connu pour n quelconque. De plus, M est l'adhérence, dans P, de son intérieur. Enfin, non seulement P est réunion de M et de tous ses transformés M^X par les éléments X du groupe Γ (ou, plus précisément, par les transformés de M par un système de représentants, dans Γ, des classes suivant le centre $\{\pm 1_n\}$ de Γ : car ce centre opère trivialement sur P), mais encore ces transformés forment une triangulation ou un "pavage" de P, au sens suivant : leurs intérieurs sont disjoints ; l'intersection de deux quelconques d'entre eux est une pyramide convexe de dimension plus petite : tout compact n'a de points communs qu'avec un nombre fini de ces transformés.

BIBLIOGRAPHIE

On trouvera des démonstrations complètes des résultats ci-dessus dans :

SIEGEL (Carl Ludwig). - Einheiten quadratischer Formen, Abh. math. Sem. Hamburg Univ., t. 13, 1940, p. 209-239.

ainsi que dans ses cours multigraphiés à Göttingen et au Tata Institute. Il y a lieu aussi de consulter :

MINKOWSKI (Hermann). - Geometrie der Zahlen. - Leipzig und Berlin, B.G. Teubner, 1910 ; New York, Chelsea, 1953.

MINKOWSKI (Hermann). - Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz, J. für reine und angew. Math., t. 129, 1905, p. 220-274 ; Gesammelte Abhandlungen, Band 2, Berlin, B.G. Teubner, 1911, p. 53-100.

WEYL (Hermann). - Theory of reduction for arithmetical equivalence, I., Trans. Amer. math. Soc., t. 48, 1940, p. 126-164 ; II., Trans. Amer. math. Soc., t. 51, 1942, p. 203-231.

WEYL (Hermann). - Fundamental domains for lattice groups in division algebras, Comment. Math. Helvet., t. 17, 1944/45, p. 283-306 ; et Selecta Hermann Weyl, Basel und Stuttgart, Birkhäuser, 1956, p. 521-553.