SÉMINAIRE HENRI CARTAN

A. BLANCHARD
H. CARTAN

Rectifications à l'exposé 1 du séminaire 1953/54

Séminaire Henri Cartan, tome 10, n° 1 (1957-1958), exp. n° 10 bis, p. 39-44
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1957-1958__10_1_A12_0>

RECTIFICATIONS
à l'Exposé 1 du Séminaire 1953/54

Dans mon Séminaire consacré à la Théorie des fonctions automorphes et des espaces analytiques (année 1953/54, exposé 1), j'ai formulé des théorèmes concernant l'existence de séries de Poincaré qui admettent des développements limités donnés en des points donnés (théorèmes 2 et 2 bis, 3 et 3 bis); ces théorèmes ont été utilisés à plusieurs reprises dans la littérature, mais leur démonstration est incorrecte, comme me l'a signalé récemment R. GODEMENT. Les énoncés des théorèmes sont néanmoins corrects ; je me propose d'en donner ici une démonstration, d'ailleurs valable pour un cas un peu plus général que dans l'exposé cité.

X désigne un domaine <u>borné</u> (connexe) de l'espace numérique complexe $\underset{\sim}{C}^n$, et G un groupe discret d'automorphismes (analytiques complexes) de X . Soit $J_g(x)$ un <u>facteur d'automorphie</u> : pour chaque $g \in G$, $J_g(x)$ est une fonction holomorphe et non nulle de $x \in X$, et on a

$$(1) \qquad J_{gg'}(x) = J_g(g'.x)\ J_{g'}(x) \qquad \text{pour } g , g' \in G \text{ et } x \in X.$$

Plus généralement, soit F un espace vectoriel complexe de dimension finie ; on considère un facteur d'automorphie $\rho_g(x)$, qui pour chaque $g \in G$, est une fonction holomorphe de $x \in X$ à valeurs dans le groupe $GL(F)$ des automorphismes (linéaires complexes) de F , et satisfait à

$$(2) \qquad \rho_{gg'}(x) = \rho_g(g'.x)\ \rho_{g'}(x) ,$$

où, dans le second membre, le produit désigne la composition des automorphismes de F . Une fonction Φ holomorphe (resp. méromorphe) dans X , à valeurs dans F , est une <u>forme automorphe</u> (relativement au groupe G et au facteur d'automorphie ρ) si on a

$$(3) \qquad \Phi(g.x) = \rho_g(x).\Phi(x) \quad \text{identiquement, pour tout } g \in G .$$

Dans ce qui suit, nous supposerons qu'il existe un entier $m_o > 0$ tel que les deux séries

$$\sum_{g \in G} (J_g(x))^{m_o} \quad \text{et} \quad \sum_{g \in G} (J_g(x))^{m_o}\ \rho_g(x)^{-1}$$

convergent normalement sur tout compact de X . Alors, pour tout entier $m \geqslant m_o$, les "séries de Poincaré"

$$L(h\ ;\ m) = \sum_{g \in G} (J_g(x))^m\, h(g.x)$$

(h holomorphe dans X, à valeurs scalaires, et bornée)

$$L(f\ ;\ \rho,\ m) = \sum_{g \in G} (J_g(x))^m\, \rho_g(x)^{-1}.f(g.x)$$

(f holomorphe dans X, à valeurs dans F, et bornée) sont des fonctions $\Upsilon(x)$ et $\Phi(x)$, holomorphes dans X, qui satisfont à

$$\Upsilon(g.x) = (J_g(x))^{-m}\, \Upsilon(x)\ , \tag{4}$$

$$\Phi(g.x) = (J_g(x))^{-m}\, \rho_g(x).\Phi(x)\ . \tag{5}$$

Donc $L(f\ ;\ \rho,\ m)$ est une forme automorphe (holomorphe) relativement au facteur d'automorphie $(J_g(x))^{-m}\, \rho_g(x)$, et le quotient $L(f\ ;\ \rho\ ,\ m)/L(h\ ;\ m)$ est une forme automorphe (méromorphe) relativement au facteur d'automorphie ρ (si le dénominateur n'est pas identiquement nul).

Pour chaque point $a \in X$, notons A_a l'anneau des germes de fonctions holomorphes (scalaires) au point a, et $A_a(F)$ l'espace vectoriel des germes de fonctions holomorphes à valeurs dans F. Pour tout entier $p \geqslant 0$, soit I_a^p l'idéal de A_a (resp. $I_a^p(F)$ le sous-espace vectoriel de $A_a(F)$) formé des germes de fonctions qui s'annulent au point a ainsi que leurs dérivées d'ordres $\leqslant p$. Soit D_a^p l'anneau quotient A_a/I_a^p, et $D_a^p(F)$ l'espace vectoriel quotient $A_a(F)/I_a^p(F)$, qui est un module sur D_a^p. Pour chaque h holomorphe au voisinage de a, on notera $\zeta_a^p(h)$ l'image canonique de h dans D_a^p ; de même si f est holomorphe à valeurs dans F, on écrira $\zeta_a^p(f) \in D_a^p(F)$; $\zeta_a^p(f)$ est le <u>développement limité d'ordre</u> p de la fonction f ; il s'identifie à un polynôme de degré p en $x - a$.

Soit $G(a)$ le groupe d'isotropie du point a (sous-groupe des $g \in G$ tels que $g.a = a$) ; il est <u>fini</u> ; on notera $k(a)$ son ordre. On notera Δ_a^p le sous-espace de $D_a^p(F)$, formé des germes de fonctions Φ qui satisfont à (3) modulo $I_a^p(F)$, pour tout $g \in G(a)$. Pour chaque entier m, on notera $\Delta_a^p(m)$ le sous-espace de $D_a^p(F)$, formé des germes de fonctions Φ qui satisfont à (5) modulo $I_a^p(F)$, pour tout $g \in G(a)$. Il est clair que si Φ est une forme automorphe relativement au facteur d'automorphie ρ, et si Φ est holomorphe au point a, $\zeta_a^p(\Phi)$ appartient à Δ_a^p ; de même, si Φ est une forme automorphe satisfaisant à (5), $\zeta_a^p(\Phi)$ appartient à $\Delta_a^p(m)$.

<u>Dans tout ce qui suit, on se donne un ensemble fini de points</u> $a_i \in X$, <u>tel que, pour</u> $i \neq j$, a_i <u>et</u> a_j <u>ne soient pas congrus suivant</u> G. On se donne un entier $p \geqslant 0$ une fois pour toutes.

LEMME 1. - *Soit* h *une fonction holomorphe* (*scalaire*) *bornée dans* X , *telle que* :

$h(a_i) = 1$ *en tout point* a_i ;

$h(c) = 0$ *en tout point* c *distinct des* a_i *et de la forme* $g.a_i$ (g *étant un élément de* G *tel que* $|J_g(a_i)| \geqslant 1$). (Comme ces points c sont en nombre fini, il existe une telle h ; on peut même prendre pour h un polynôme). *Alors, pour tout entier* $m > 0$ *assez grand et multiple des ordres* $k(a_i)$, *la fonction holomorphe* $L(h\,;\,m)$ *est* $\neq 0$ *aux points* a_i .

DÉMONSTRATION. - Posons $L(h\,;\,m) = \Phi_m$; on a

$$\Phi_m(a_i) = \sum_{g \in G(a_i)} (J_g(a_i))^m\, h(g.a_i) + \sum_{g} (J_g(a_i))^m\, h(g.a_i) ,$$

la seconde somme étant étendue aux $g \in G$ tels que $|J_g(a_i)| < 1$. La première somme est égale à $k(a_i)$, et la seconde somme tend vers 0 quand m tend vers $+\infty$.

LEMME 2. - *Pour tout nombre* u *tel que* $0 < u < 1$, *il existe une partie finie* $H \subset G$ *et, pour chaque point* a_i , *un voisinage* V_i *de* a_i , *jouissant de la propriété suivante* : *pour* $x \in V_i$ *et* $g \notin H$, *on a* $|J_g(x)| \leq u$.

Cela résulte aussitôt du fait que la série $\sum_{g \in G} (J_g(x))^{m_0}$ converge normalement au voisinage de chacun des points a_i .

Fixons désormais u (par exemple : $u = \frac{1}{2}$), d'où H .

THÉORÈME 1. - *Soit* h *une fonction holomorphe* (*scalaire*) *bornée dans* X , *telle que* :

$\delta^p_{a_i}(h) = 1$ *pour tout point* a_i ;

$\delta^p_c(h) = 0$ *pour tout point* c *distinct des* a_i *et de la forme* $g.a_i$, *avec* $g \in H$. *Soient donnés d'autre part, pour chaque* a_i , *un élément* $\alpha_i \in \Delta^p_{a_i}$, *et soit* f *une fonction holomorphe* (*à valeurs dans* F), *bornée dans* X , *et telle que* :

$\delta^p_{a_i}(f) = \alpha_i$, $\delta^p_c(f) = 0$ *aux points* c *ci-dessus*. *Alors, pour chaque point* a_i , *on a*

(6)
$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ m \equiv 0\,(k)}} \delta^p_{a_i} \frac{L(f\,;\;\;,\,m)}{L(h\,;\,m)} = \alpha_i ,$$

où k désigne le plus petit commun multiple des ordres $k(a_i)$.

DÉMONSTRATION. - Observons d'abord qu'il existe toujours une h et une f satisfaisant aux conditions de l'énoncé, par exemple des polynômes convenables. D'autre part, le premier membre de (6) a un sens pour m assez grand, puisque la fonction $L(h\ ;\ m)$ est $\neq 0$ aux points a_i, d'après le lemme 1. Fixons maintenant le point a_i considéré, et posons

$$L'(f\ ;\ \rho\ ,\ m) = \sum_{g\in G(a_i)} (J_g(x))^m\ \rho_g(x)^{-1}.f(g.x)\ ;$$
$$L'(h\ ;\ m) = \sum_{g\in G(a_i)} (J_g(x))^m\ h(g.x)\ ,$$
$$L''(f\ ;\ \rho\ ,\ m) = \sum_{g\notin H} (J_g(x))^m\ \rho_g(x)^{-1}.f(g.x)\ ,$$
$$L''(h\ ;\ m) = \sum_{g\notin H} (J_g(x))^m\ h(g.x)\ .$$

Puisque $\delta^p_c(f) = 0$, $\delta^p_c(h) = 0$ pour les points c définis dans l'énoncé, on a

$$\delta^p_{a_i}\ L(f\ ;\ \rho\ ,\ m) = \delta^p_{a_i}\ L'(f\ ;\ \rho\ ,\ m) + \delta^p_{a_i}\ L''(f\ ;\ \rho\ ,\ m)$$
$$\delta^p_{a_i}\ L(h\ ;\ m) = \delta^p_{a_i}\ L'(h\ ;\ m) + \delta^p_{a_i}\ L''(h\ ;\ m)\ .$$

De plus

$$\delta^p_{a_i}\ L'(f\ ;\ \rho\ ,\ m) = \sum_{g\in G(a_i)} (\delta^p_{a_i}\ J_g(x))^m\ \alpha_i = (\delta^p_{a_i}\ L'(h\ ;\ m))\ \alpha_i$$

puisque, par hypothèse, α_i appartient à $\Delta^p_{a_i}$. D'autre part, on a

$$\delta^p_{a_i}\ J_g(x) = \varepsilon_g + P_g(x - a_i) \quad \text{pour} \quad g \in G(a_i)\ ,$$

où ε_g est une constante, racine $k(a_i)$-ième de l'unité, et P_g est un polynôme de degré p sans terme constant. Puisque m est un multiple de $k(a_i)$, on a

$$(\delta^p_{a_i}\ J_g(x))^m = (1 + Q_g(x - a_i))^m \quad \text{pour} \quad g \in G(a_i)\ ,$$

où Q_g désigne un polynôme de degré p sans terme constant.

On a donc

$$(7)\quad \delta^p_{a_i}\ \frac{L(f;\rho\ ,m)}{L(h;m)} - \alpha_i = \delta^p_{a_i}\left(\frac{1}{L(h;m)}\right).[\ \delta^p_{a_i}\ L''(f;\rho\ ,m) - (\delta^p_{a_i}\ L''(h,m))\ \alpha_i\ ]$$

et pour prouver (6) il reste à montrer que le second membre de (7) tend vers 0 quand $m \longrightarrow +\infty$ (en restant multiple de k).

Dans le voisinage V_i de a_i, on a $|J_g(x)| \leq u$ pour $g \notin H$, donc la fonction holomorphe $L''(f\ ;\ \rho\ ,\ m)$ est, dans V_i, majorée par

$$u^{m-mo} \sum_{g\notin H} |J_g(x))^{mo}\ \rho_g(x)^{-1}.f(g.x)| \leq M.u^m\ ,$$

où M ne dépend pas de m. Résultat analogue pour la fonction $L''(h\ ;\ m)$. En appliquant les inégalités de Cauchy aux développements limités de ces fonctions, on voit que $\delta^p_{a_i}\ L''(f\ ;\ \rho\ ,\ m)$ et $\delta^p_{a_i}\ L''(h\ ;\ m)$, considérés comme polynômes-fonctions en $x - a_i$, sont, dans un voisinage fixe de a_i , majorés par $N.u^m$, où N est indépendant de m .

Il reste, dans (7) , à majorer $\delta^p_{a_i}\left(\frac{1}{L(h\ ;\ m)}\right)$, qui est un polynôme en $x - a_i$. On a d'abord

$$\delta^p_{a_i} L(h\ ;\ m) = \overline{\sum_{g \in G(a_i)}} (1 + Q_g)^m + \delta^p_{a_i} L''(h\ ;\ m)$$
$$= R_0 + R_1 + \quad \ldots \quad + R_p ,$$

où chaque R_j est un polynôme homogène de degré j en $x - a_i$, qui dépend de m . Quand $m \to +\infty$, R_0 tend vers $k(a_i)$, tandis que, pour $1 \leqslant j \leqslant p$, on a

$|R_j| \leqslant K.m^j$ au voisinage de a_i (K désignant un nombre fixe).

En calculant l'inverse de $\delta^p_{a_i} L(h\ ;\ m)$ dans l'anneau $D^p_{a_i}$, on trouve

$$\delta^p_{a_i}\left(\frac{1}{L(h\ ;\ m)}\right) = \frac{1}{R_0}(1 + S_1 + \quad \ldots \quad + S_p) ,$$

où chaque S_j $(1 \leqslant j \leqslant p)$ est un polynôme homogène de degré p , majoré dans un voisinage fixe de a_i par $K_1.m^j$ (K_1 : constante indépendante de m). On voit finalement que le second membre de (7) est majoré par

$$N_1.m^p\ u^m \quad (N_1 \text{ indépendant de } m) ,$$

et ceci établit la relation (6) ; le théorème 1 est démontré.

CONSÉQUENCES du théorème 1. - Prenons des systèmes (α_i) en nombre fini, formant une base de l'espace vectoriel $\prod_i \Delta^p_{a_i}$. Pour chaque élément (α^t_i) de cette base, choisissons un polynôme f^t comme il est dit dans le théorème 1 . Alors, pour chaque i et chaque t , on a

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ m \equiv 0(k)}} \delta^p_{a_i} \frac{L(f^t\ ;\ \rho\ ,\ m)}{L(h\ ;\ m)} = \alpha^t_i .$$

Donc, pour tout multiple m assez grand de k , l'application

$$f \longrightarrow \left(\delta^p_{a_i} \frac{L(f\ ;\ \rho\ ,\ m)}{L(h\ ;\ m)}\right)$$

envoie les f^t sur une <u>base</u> de l'espace vectoriel $\prod_i \Delta^p_{a_i}$.

Ainsi :

THÉORÈME 2. - <u>Les points</u> a_i <u>et l'entier</u> p <u>étant donnés comme ci-dessus, soit</u> h <u>une fonction holomorphe comme dans le théorème</u> 1 . <u>Il existe un entier</u> $m(p\ ,\ a_i)$ <u>jouissant de la propriété suivante : pour tout entier</u> m <u>multiple des ordres</u> $k(a_i)$ <u>et</u> $\geqslant m(p\ ,\ a_i)$, <u>et pour tout système d'éléments</u> $\alpha_i \in \Delta^p_{a_i}$, <u>il existe un polynôme</u> f <u>tel que</u>

(8) $$\delta^p_{a_i} \frac{L(f\ ;\ \rho\ ,\ m)}{L(h\ ;\ m)} = \alpha_i \quad \text{pour tout } i\ .$$

En particulier, il existe une forme automorphe (méromorphe) relativement au facteur d'automorphie ρ , qui soit holomorphe en chacun des points a_i et y admette des développements limités d'ordre p , arbitrairement choisis dans les $\Delta^p_{a_i}$.

THÉORÈME 3. - Les points a_i et l'entier p étant donnés comme ci-dessus, soit m un multiple des ordres $k(a_i)$ qui soit $\geqslant m(p\ ,\ a_i)$. Alors, pour tout système d'éléments $\beta_i \in \Delta^p_{a_i}(m)$, il existe un polynôme f tel que

(9) $$\delta^p_{a_i} L(f\ ;\ \rho\ ,\ m) = \beta_i \quad \text{pour tout } i\ .$$

En effet, posons $\alpha_i = \beta_i / \delta^p_{a_i} L(h\ ;\ m)$. On a $\alpha_i \in \Delta^p_{a_i}$, donc, d'après le théorème 2 , il existe un polynôme f satisfaisant à (8) , et de là on déduit (9) .

Pour finir, soit q un entier quelconque, et considérons le facteur d'automorphie $\rho_g(x) = (J_g(x))^{-q}$. Pour ce facteur d'automorphie, le théorème 2 ci-dessus redonne le "théorème 3 bis" de l'exposé cité au début ; le théorème 3 ci-dessus redonne le "théorème 2 bis" de l'exposé cité.