Séminaire Henri Cartan

Roger Godement

Série de Poincaré et spitzenformen

Séminaire Henri Cartan, tome 10, nº 1 (1957-1958), exp. nº 10, p. 1-38
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1957-1958__10_1_A11_0>

SÉRIE DE POINCARÉ ET SPITZENFORMEN

par Roger GODEMENT.

Le but principal de cet exposé est d'établir, dans le cas du groupe de Siegel $Sp(n\ ,\ \underline{Z})$ [1], les relations existant entre la théorie classique des "séries de Poincaré" (Séminaire H. CARTAN, 1953/54, Exposé 1), valable pour tout groupe d'automorphismes d'un domaine borné, et celle des Spitzenformen ; ces relations sont à l'origine d'une part des théorèmes d'existence pour les Spitzenformen (et pas seulement des théorèmes d'existence pour les formes modulaires !), d'autre part de la formule des traces de Selberg. L'outil essentiel pour étudier ces questions est la théorie des fonctions holomorphes intégrables dans le demi-plan de Siegel, à laquelle le début de cet exposé (n° 1 à 4) est consacré - il s'agit de compléter les résultats obtenus dans l'Exposé 6.

Première Partie
Etude des espaces $\mathcal{H}^p(\rho)$ dans le demi-plan.

Cette première partie n'a aucun rapport avec la théorie des fonctions automorphes (voir cependant la seconde partie de l'Exposé ...) ; on se propose de compléter les résultats obtenus dans l'Exposé 6.

1. - Passage du demi-plan au groupe symplectique.

Ce numéro a pour but de montrer comment les fonctions définies sur le demi-plan de Siegel, et sur lesquelles le groupe symplectique opère par l'intermédiaire des facteurs d'automorphie $\rho(cz + d)$, peuvent se ramener à des fonctions définies sur le groupe symplectique lui-même de façon à supprimer les facteurs d'automorphie des formules de transformation. Il va de soi qu'on aurait pu adopter ce point de vue dès le début ; mais peut-être le lecteur n'aurait-il pas été alors convaincu de son utilité ...

Soit

$$G = Sp(n\ ,\ \underline{R})$$

---

[1] Dans les exposés de R. GODEMENT, les lettres soulignées d'un trait rectiligne ont la même signification que les lettres soulignées d'un trait ondulé dans les exposés de ce Séminaire : elles apparaîtraient en caractères gras en typographie.

le groupe symplectique, qui opère sur le demi-plan de Siegel

$$S_n : z = z' , \quad \mathrm{Im}(z) \gg 0 .$$

Le stabilisateur dans G du point $z = i$ de S_n est le sous-groupe compact maximal

$$K : \text{matrices } W = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \text{ avec } w = u + iv \in U(n)$$

de G, isomorphe (par $W \longrightarrow w = u + iv$) au groupe unitaire à n variables, et l'application

$$(1.1) \qquad M \longrightarrow z = Mi = (ai + b)(ci + d)^{-1}$$

définit par passage au quotient un isomorphisme canonique de l'espace homogène G/K sur S_n ; par la suite, pour des raisons de commodité, nous utiliserons au lieu de (1.1) l'application

$$(1.2) \qquad M \longrightarrow M^{-1}i ,$$

qui induit un isomorphisme $S_n \approx K \backslash G$.

Soit ρ une représentation holomorphe de $GL(n , \underline{C})$ dans un espace vectoriel complexe E_ρ de dimension finie ; comme $GL(n , \underline{C})$ est canoniquement isomorphe au groupe de Lie déduit de $U(n)$ par complexification, la représentation ρ définit par restriction une représentation (que nous noterons encore ρ) du groupe $U(n)$, donc du groupe K , à savoir

$$(1.3) \qquad W \longrightarrow \rho(u + iv) ;$$

inversement toute représentation de dimension finie de K s'étend d'une façon et d'une seule en une représentation holomorphe de $GL(n , \underline{C})$, et une représentation de K est irréductible si et seulement si son extension à $GL(n , \underline{C})$ l'est.

Etant donnée une telle représentation ρ , on a vu dans les exposés précédents que l'expression

$$(1.4) \qquad J_\rho(M , z) = \rho(cz + d)$$

est un <u>facteur d'automorphie</u> sur S_n , i.e. vérifie

$$(1.5) \qquad J_\rho(M_1M_2 , z) = J_\rho(M_1 , M_2z)J_\rho(M_2 , z) ;$$

on a de plus la relation

$$(1.6) \qquad J_\rho(W , i) = \rho(W) \quad \text{pour } W \in K .$$

Cela dit, soit une application (non nécessairement holomorphe)

$$f(z) : S_n \longrightarrow E_\rho \quad ;$$

nous lui associerons sur le groupe G la fonction

(1.7) $$\boxed{f(M) = J_\rho(M^{-1}, i)^{-1} f(M^{-1}i)} \quad ;$$

en tenant compte de (1.5) et (1.6) on trouve par des calculs triviaux que (1.7) définit une <u>bijection</u> de l'ensemble des applications $S_n \to F_\rho$ sur l'ensemble des applications $G \to F_\rho$ qui vérifient l'identité

(1.8) $$\boxed{f(WM) = \rho(W)f(M)} \qquad (W \in K\ ,\ M \in G)\ .$$

De plus, la représentation L_ρ de G dans l'espace des applications $S_n \to F_\rho$, définie dans l'Exposé 6 par la formule

(1.9) $$L_\rho(M)^{-1} : f(z) \longrightarrow J_\rho(M\ ,\ z)^{-1} f(Mz)\ ,$$

se transforme en une représentation de G dans l'espace des solutions de (1.8) ; on vérifie immédiatement que celle-ci n'est autre que la représentation évidente par les translations à droite :

(1.10) $$\boxed{L_\rho(M_o) : f(M) \longrightarrow f(MM_o)}$$

Comme on le voit, les formules sont nettement plus simples sur G que sur S_n et de plus se réduisent à des constructions tout à fait habituelles en théorie des représentations de groupes.

Interprétons maintenant les normes

$$\| f \|_p = \left\{ \int_{S_n} \| \rho(y^{\frac{1}{2}}) f(z) \|^p dz \right\}^{1/p}$$

que l'on a définies dans l'Exposé 6 . Tout d'abord, la relation

$$z = M^{-1}i \quad \text{implique} \quad y = (ci + d)^{*-1}(ci + d)^{-1} \quad \text{si} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\ ;$$

on en déduit que $(ci + d)^{-1} = k.y^{\frac{1}{2}}$ où k est une matrice <u>orthogonale</u>, donc que

$$J_\rho(M^{-1}\ ,\ i)^{-1} = \rho(ci + d)^{-1} = \rho(k)\rho(y^{\frac{1}{2}})\ ;$$

or si l'on a sur F_ρ un produit scalaire <u>adapté</u> à la représentation de $GL(n\ ,\ \underline{\mathbb{C}})$ (Exposé 5, n° 2), alors $\rho(W)$ est unitaire pour $W \in K$ et inversement ; en particulier $\rho(k)$ est unitaire, et par suite il vient trivialement la relation

(1.11) $$\| \rho(y^{\frac{1}{2}}) f(z) \| = \| f(M) \| \qquad \text{pour} \quad z = M^{-1}i\ .$$

Or l'identification de S_n à $K\backslash G$ transforme évidement la mesure invariante dz de S_n en la mesure de Haar dM de G , convenablement normalisée (ceci n'est pas particulier au groupe symplectique ...) ; par suite on trouve la formule

(1.12) $$\boxed{\|f\|_p = \left\{\int_G \|f(M)\|^p dM\right\}^{1/p}} \ ;$$

comme la fonction $\|f(M)\|$ est invariante à gauche par K d'après (1.8) on pourrait évidemment se borner dans (1.12) à intégrer sur $K\backslash G$; ce qui ne changerait rien au résultat. Quoi qu'il en soit on retrouve une fois de plus des objets connus en théorie des groupes topologiques, à savoir les espaces L^p. Bien entendu la formule (1.12) suppose p fini ; pour p infini il faut prendre

(1.13) $$\|f\|_\infty = \operatorname*{vrai\ max}_{M \in G} \|f(M)\|$$

(l'expression "vrai max" signifiant qu'on néglige les ensembles de mesure nulle). Enfin la dualité entre L^p et L^q, pour $1/p + 1/q = 1$, est données par la formule

(1.14) $$\langle f , g\rangle = \int_G \langle f(M) , g(M)\rangle \, dM .$$

Dans ce qui suit nous poserons toujours

$\mathfrak{M}(\rho)$ = espace des solutions <u>mesurables</u> de (1.8) ;
$\mathfrak{L}^p(\rho)$ = espace des $f \in \mathfrak{M}(\rho)$ telles que $\|f\|_p < +\infty$;

on ne fera pas de distinction entre deux fonctions égales presque partout sur G, de sorte que $\mathfrak{L}^p(\rho)$ est un espace de Banach, et qu'on a une représentation linéaire continue $M \longrightarrow L_\rho(M)$ de G dans $\mathfrak{L}^p(\rho)$, les opérateurs $L_\rho(M)$ étant de plus <u>isométriques</u> en vertu de l'invariance de la mesure de Haar. [En ce qui concerne la <u>continuité</u> de la représentation L_ρ il faut faire attention au cas $p = +\infty$; si p est <u>fini</u> on peut affirmer, et c'est trivial, ce que pour toute $f \in \mathfrak{L}^p(\rho)$ l'application

$$M \longrightarrow L_\rho(M)f$$

de G dans $\mathfrak{L}^p(\rho)$ est continue pour la topologie <u>forte</u> de $\mathfrak{L}^p(\rho)$; si par contre $p = +\infty$, cette application n'est continue que pour la topologie <u>faible</u> de $\mathfrak{L}^\infty(\rho)$, essentiellement parce qu'il n'y a pas dans $\mathfrak{L}^\infty(\rho)$ suffisamment de fonctions <u>uniformément</u> continues sur G ; rappelons que la topologie <u>faible</u> de $\mathfrak{L}^p(\rho)$ est obtenue en identifiant $\mathfrak{L}^p(\rho)$ au dual de l'espace de Banach $\mathfrak{L}^q(\rho)$.].

REMARQUE (2). - Les définitions qui précédent qui précèdent sont valables pour tout groupe localement compact G et tout sous-groupe compact K de G ; mais

---

(2) La lecture de cette longue Remarque est "inutile" pour la compréhension du reste de l'Exposé, ce qui veut seulement dire qu'on n'en fera pas usage par la suite.

ici nous avons sur l'espace $K\backslash G$ une structure analytique complexe ; nous dirons alors qu'une fonction $f \in \mathcal{M}(\rho)$ est holomorphe si elle provient d'une application holomorphe

$$f(z) : S_n \longrightarrow E_\rho \quad ;$$

on peut (HARISH-CHANDRA) caractériser directement ces fonctions par l'artifice suivant.

Soit $\mathfrak{g}_0$ l'algèbre de Lie du groupe symplectique G et soit $\mathfrak{g}$ la complexification de $\mathfrak{g}_0$, i.e. l'algèbre de Lie du groupe symplectique complexe si l'on veut. Chaque $X \in \mathfrak{g}$ définit comme l'on sait un endomorphisme

$$\mathrm{Ad}(X) : Y \longrightarrow [X , Y]$$

de l'espace vectoriel complexe $\mathfrak{g}$; d'autre part chaque $X \in \mathfrak{g}$ définit aussi sur le groupe G un opérateur différentiel

$$f \longrightarrow Xf$$

commutent aux translations à droite, et d'ordre 1 ; cf. C. CHEVALLEY, Theory of Lie groups. Enfin, chaque $M \in G$ définit aussi un endomorphisme

$$\mathrm{Ad}(M) : X \longrightarrow MXM^{-1}$$

de $\mathfrak{g}$. Cela dit, considérons l'espace homogène $S_n = K\backslash G$; soient $\mathfrak{k}_0$ la sous-algèbre de $\mathfrak{g}_0$ correspondant au sous-groupe compact K de G, et $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ la complexification de $\mathfrak{k}_0$; il est clair que l'espace vectoriel tangent en $z = i$ à S_n (considéré comme variété analytique réelle) s'identifie canoniquement à $\mathfrak{g}_0/\mathfrak{k}_0$; si de plus on fait opérer de façon évidente le groupe K dans cet espace vectoriel tangent, on retrouve, modulo l'identification qu'on vient de définir, la représentation adjointe de K dans $\mathfrak{g}_0/\mathfrak{k}_0$. Ceci dit, puisque $K\backslash G$ admet une structure complexe, il en est ainsi de $\mathfrak{g}_0/\mathfrak{k}_0$, et on vérifie trivialement que le centre de K (qui est ici de dimension 1) définit sur $\mathfrak{g}_0/\mathfrak{k}_0$ la multiplication par les scalaires complexes de module 1 ; en particulier il y a un élément W_0 du centre de K qui définit dans $\mathfrak{g}_0/\mathfrak{k}_0$ la multiplication par le scalaire i. Considérons alors l'endomorphisme $\mathrm{Ad}(W_0)$ de $\mathfrak{g}$; on constate (ou on démontre dans le cas général) que l'opérateur $\mathrm{Ad}(W_0)$ n'admet dans $\mathfrak{g}$ que les trois valeurs propres

$$0 \; , \; i \; , \; -i \; ;$$

la valeur propre 0 définit le sous-espace $\mathfrak{k}$ de $\mathfrak{g}$; les valeurs propres i et $-i$ définissent respectivement des sous-algèbres abéliennes $\mathfrak{p}^+$ et $\mathfrak{p}^-$ de

$\mathfrak{g}$, qui sont invariantes par $\mathfrak{k}$; enfin

(1.15) $$\mathfrak{g} = \mathfrak{p}^- \oplus \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}^+ \quad \text{(somme directe).}$$

Cela dit, une fonction $f \in \mathcal{M}(\rho)$ est holomorphe si et seulement si elle vérifie les équations différentielles

(1.16) $$Xf = 0 \quad \text{pour tout} \quad X \in \mathfrak{p}^+$$

Bien entendu ces relations ne sont autres que les conditions de Cauchy dans l'interprétation $f(z)$! Indiquons encore (HARISH-CHANDRA) que $\mathfrak{p}^-$ correspond à la réalisation de $K\backslash G$ comme domaine borné dans un espace $\underline{C}^N$.

Montrons en passant comment on déduit de là des équations différentielles d'ordre supérieur pour les fonctions holomorphes (on se propose de justifier la Remarque 2, p. 12, de l'Exposé 8). Soit $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante universelle de $\mathfrak{g}$ (i.e. l'algèbre des opérateurs différentiels d'ordre quelconque invariants à droite sur G) ; on se propose de prouver que si $Z \in U(\mathfrak{g})$ appartient au centre de $U(\mathfrak{g})$ - cette condition est même trop restrictive comme on le verra - on a

(1.17) $$Zf = \lambda(Z).f$$

où $\lambda(Z)$ est un scalaire indépendant de f ; on suppose bien entendu que f vérifie (1.16). Pour cela prenons dans le centre de $\mathfrak{k}_0$ un élément H_0 tel que

(1.18) $$\mathrm{Ad}(H_0) = \begin{cases} +i & \text{sur } \mathfrak{p}^+ \\ 0 & \text{sur } \mathfrak{k} \\ -i & \text{sur } \mathfrak{p}^- \end{cases}$$

- un tel élément existe et est unique. Désignons par

$$X_1 , \ldots , X_r \quad \text{une base de } \mathfrak{p}^+$$

$$Y_1 , \ldots , Y_r \quad \text{la base imaginaire conjuguée de } \mathfrak{p}^-$$

(le fait que $\mathfrak{p}^+$ et $\mathfrak{p}^-$ sont imaginaire conjuguées est évident d'après (1.18) et $H_0 \in \mathfrak{g}_0$). Etant donné un système

$$m = (m_1 , \ldots , m_r)$$

d'entiers $\geqslant 0$ on posera

$$X^m = X_1^{m_1} \ldots X_r^{m_r} \quad ; \quad Y^m = Y_1^{m_1} \ldots Y_r^{m_r} \quad .$$

Enfin on note $U(\mathfrak{k})$ la sous-algèbre de $U(\mathfrak{g})$ engendrée par $\mathfrak{k}$.

Cela dit il est clair (BIRKHOFF-WITT) que tout élément $Z \in U(\mathfrak{g})$ s'écrit d'une façon unique sous la forme

$$Z = \sum_{m,n} Y^n K_{m,n} X^m$$

avec des $K_{m,n} \in U(\mathfrak{k})$ presque tous nuls. Supposons maintenant que Z <u>commute au centre de</u> $\mathfrak{k}$, i.e. à H_0 ; tenant compte de la formule évidente

$$[H_0 , X^m] = |m| i . X^m \qquad \text{où} \qquad |m| = m_1 + \dots + m_r$$

et de la formule analogue pour les Y^n, il vient – puisque H_0 commute aux $K_{m,n}$ – la relation

$$0 = [H_0 , Z] = \sum (|m| - |n|) i . Y^n K_{m,n} X^m \ ;$$

donc

$$K_{m,n} \neq 0 \qquad \text{implique} \qquad |m| = |n| \ ;$$

autrement dit

$$Z \in U(\mathfrak{k}) + U(\mathfrak{g}) . \mathfrak{p}^+ \quad \text{ou encore} \quad Z \equiv K_{0,0} \bmod U(\mathfrak{g}) \mathfrak{p}^+ \ ;$$

comme les éléments de $\mathfrak{p}^+$ annulent f il en est de même de ceux de $U(\mathfrak{g}) \mathfrak{p}^+$; donc

(1.19) $$Zf = K_{0,0} f \ .$$

Faisons maintenant l'hypothèse (qui sera sûrement vérifiée si Z appartient au centre de $U(\mathfrak{g})$) que Z <u>commute à</u> $U(\mathfrak{k})$. En utilisant le fait que $\mathfrak{p}^+$ et $\mathfrak{p}^-$ sont invariantes par $\mathfrak{k}$, on vérifie aussitôt par le même genre d'argument que $K_{0,0}$ <u>appartient au centre de</u> $U(\mathfrak{k})$; identifions alors $K_{0,0}$ à une distribution μ sur le groupe G, de support concentré à l'origine ; comme on identifie Z, et plus généralement tout élément de $U(\mathfrak{g})$, à un opérateur commutant aux translations <u>à droite</u>, la formule (1.19) donne

$$Zf(M) = K_{0,0} f(M) = \int_G f(N^{-1}M) d\mu(N)$$

mais comme $K_{0,0} \in U(\mathfrak{k})$, la distribution μ sur G est en fait une distribution sur K de sorte qu'on trouve

$$Zf(M) = \int_K f(W^{-1}M) d\mu(W) \ ;$$

tenant compte de la relation

$$f(W^{-1}M) = \rho(W)^{-1} f(M) \ ,$$

il vient donc

$$Zf(M) = \int_K \rho(W)^{-1} f(M) d\mu(W) = \rho(\mu) f(M)$$

où

$$\rho(\mu) = \int_K \rho(W)^{-1} d\mu(W)$$

est un endomorphisme de E_ρ ; mais comme $K_{0,0}$ appartient au centre de $U(\mathfrak{k})$ cet endomorphisme commute à la représentation ρ de K, donc se réduit à un scalaire si ρ est irréductible, et ce sclaire ("caractère infinitésimal" de ρ) ne dépend que de ρ ; d'où immédiatement la relation (1.17) sous l'hypothèse que $Z \in U(\mathfrak{g})$ commute à $U(\mathfrak{k})$.

2. - Les espaces $\mathcal{H}^p(\rho)$.

Dans ce qui suit nous poserons

$$\mathcal{H}(\rho) = \text{ensemble des fonctions } f \in \mathcal{M}(\rho) \text{ holomorphes ;}$$
$$\mathcal{H}^p(\rho) = \mathcal{H}(\rho) \cap \mathcal{L}^p(\rho) \quad .$$

Donc $\mathcal{H}^p(\rho)$ s'identifie canoniquement à l'espace désigné par la même notation dans l'Exposé 6 - la seule différence étant qu'on identifie maintenant les fonctions holomorphes $f(z) : S_n \longrightarrow E_\rho$ à certaines fonctions sur le groupe G .

Supposons ρ irréductible, de plus haut poids

$$\prod_{i=1}^{i=n} \Delta_i(h)^{\alpha_i} \quad ;$$

les paramètres $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ sont des entiers positifs tandis que α_n est un entier de signe quelconque (ou même un nombre réel arbitraire si l'on veut bien admettre des représentations "multiformes" de K). Le théorème 4 de l'Exposé 6 s'écrit alors sous la forme

(2.1) $$\mathcal{H}^2(\rho) \neq 0 \Leftrightarrow \alpha_n > n \ .$$

THÉORÈME 1. - Pour que l'espace $\mathcal{H}^p(\rho)$ ne soit pas réduit à 0 , il suffit que l'on ait

$$\alpha_n > 2n/p \ .$$

La démonstration de ce théorème va s'effectuer en plusieurs étapes.

A. - Interprétons d'abord sur le groupe G la fonction-noyau de $\mathcal{H}^2(\rho)$. On a vu (Exposé 6, n° 7) que dans le demi-plan de Siegel celle-ci est donnée par la formule

$$K_\rho(z_1 , z_2) = c(\rho) K'_\rho(z_1 , z_2)$$

où

$$K'_{\rho}(z_1\ ,\ z_2) = \rho\left(\frac{z_1 - \bar{z}_2}{2i}\right)^{-1}$$

et où $c(\rho)$ est une constante > 0 . Cela signifie que pour toute fonction $f(z) \in \mathcal{H}^2(\rho)$ on a la relation

$$f(z_1) = c(\rho) \int_{S_n} K'_{\rho}(z_1\ ,\ z_2)\rho(y_2)f(z_2)dz_2 \quad . \tag{2.3}$$

Définissons maintenant <u>sur le groupe</u> G une fonction à valeurs dans l'espace des endomorphismes de F_{ρ} par la relation

$$K'_{\rho}(M) = J_{\rho}(M^{-1}\ ,\ i)^{-1}K'_{\rho}(M^{-1}i\ ,\ i)\ ; \tag{2.4}$$

on vérifie immédiatement que l'on a les relations

$$K'_{\rho}(WM) = \rho(W)K'_{\rho}(M) \tag{2.5}$$

$$K'_{\rho}(M^{-1}) = K'_{\rho}(M)^{*} \tag{2.6}$$

et que K'_{ρ} est <u>holomorphe</u> i.e. est combinaisons linéaires, à coefficients dans F_{ρ} de fonctions appartenant à $\mathcal{H}(\rho)$. Enfin, en tenant compte de l'équation fonctionnelle (Exposé 6, formule (32)) de la fonction noyau on trouve par des calculs faciles que - modulo l'identification des fonctions $f(z)$ à des fonctions $f(M)$ - la relation (2.3) prend la forme

$$f(M_1) = c(\rho) \int K'_{\rho}(M_1 M_2^{-1})f(M_2)dM_2 \tag{2.7}$$

et est valable pour toute $f \in \mathcal{H}^2(\rho)$. On retrouve ici, comme il était prévisible, un <u>produit de composition</u> sur le groupe G .

B. - La formule (2.4), si on la compare avec (1.7), montre que $K'_{\rho}(M)$ est la fonction sur G qui, d'après les conventions du n° 1, correspond à la fonction $K'_{\rho}(z\ ,\ i)$ définie et holomorphe dans S_n . Si $\mathcal{H}^2(\rho)$ n'est pas nul on a donc, en tenant compte de l'interprétation (1.12) des normes $\|f\|_p$ définies dans l'exposé 6, la relation

$$\int_G \| K'_{\rho}(M)\|^2 dM < +\infty\ ; \tag{2.8}$$

inversement, cette relation implique $\mathcal{H}^2(\rho) \neq 0$, pour la raison triviale que K'_{ρ} étant toujours holomorphe, appartient alors à $\mathcal{H}^2(\rho)$. Donc la relation (2.1) s'écrit encore sousla forme

$$\int \|K'_{\rho}(M)\|^2 dM < +\infty \Leftrightarrow \alpha_n > n\ . \tag{2.9}$$

Pour établir le théorème 1 il <u>suffira</u> évidemment de prouver que

(2.10) $$\alpha_n > 2n/p \Rightarrow \int \| K'_\rho(M)\|^p dM < +\infty \ ;$$
cela démontrera même plus que le théorème 1.

C. - Examinons d'abord le cas $p = +\infty$; on doit prouver que

(2.11) $$\alpha_n > 0 \Rightarrow \sup_{M\in G} \| K'_\rho(M)\| < +\infty \ .$$

Or posons
$$M^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ ;$$
alors (2.4) donne

(2.12) $$K'_\rho(M) = \rho(ci+d)^{-1}\rho\left(\frac{M^{-1}i+i}{2i}\right)^{-1} = \rho\left[\frac{M^{-1}i+i}{2i}(ci+d)\right]^{-1} .$$

Posant

(2.13) $$z = M^{-1}i = x+iy \quad ; \quad \zeta = (z-i)(z+i)^{-1} ,$$

on sait que quand M varie dans G <u>la variable ζ décrit le domaine borné</u>

(2.14) $$\zeta = \zeta' \quad ; \quad \zeta\zeta^* \ll 1$$

<u>équivalent au demi-plan de Siegel</u> ; de plus (2.13) donne
$$y = (ci+d)^{*-1}(ci+d)^{-1} = (1-\zeta)^{*-1}(1-\zeta\bar{\zeta})(1-\zeta)^{-1}$$
d'où
$$(ci+d)^{-1} = k.y^{\frac{1}{2}} = k_1.(1-\zeta\bar{\zeta})^{\frac{1}{2}}(1-\zeta)^{-1}$$
avec k et k_1 orthogonales ; compte tenu enfin de la relation
$$\frac{z+i}{2i} = (1-\zeta)^{-1}$$
il vient d'après (2.12) la formule
$$K'_\rho(M) = \rho(k_2)\rho(1-\zeta\bar{\zeta})^{\frac{1}{2}}$$
avec k_2 orthogonale ; par suite

(2.15) $$\|K'_\rho(M)\| = \|\rho(1-\zeta\bar{\zeta})^{\frac{1}{2}}\| \ .$$

Cela dit supposons $\alpha_n \geqslant 0$; alors $\rho(g)$ est le produit d'une fonction <u>polynomiale</u> de g par une puissance <u>positive</u> de $\det(g)$, et comme
$$(1-\zeta\bar{\zeta})^{\frac{1}{2}}$$
décrit, en vertu de (2.14), un ensemble <u>borné</u> de matrices, la formule (2.15) prouve que la fonction $K'_\rho(M)$ est bornée sur G ; d'où (2.10) pour p infini.

D. - Pour p fini posons

$$\rho(g) = \det(g)^{\alpha_n}\pi(g)$$

où la représentation π est polynomiale ; introduisant la représentation

$$\sigma(g) = \det(g) \ ,$$

il est clair d'après (2.12) que

$$||K'_\rho(M)||^p = ||K'_\pi(M)||^p . |K'_\sigma(M)|^{p\alpha_n} \ ; \tag{2.16}$$

nous venons de voir que la fonction $K'_\pi(M)$ est bornée sur G ; d'autre part il est clair que (2.9) s'écrit encore sous la forme

$$\int |K'_\sigma(M)|^s dM < +\infty \Leftrightarrow s > 2n \ ;$$

ceci et (2.16) achèvent la démonstration de (2.10), et donc du théorème 1.

REMARQUE 1. - Il est facile d'interpréter les espaces $\mathcal{H}^p(\rho)$ quand on se place sans le modèle borné (2.14) ; le résultat est le suivant : $\mathcal{H}^p(\rho)$ est formé des fonctions holomorphes $f(\zeta)$, à valeurs dans F_ρ, et pour lesquelles

$$\int ||\rho(1 - \zeta\bar{\zeta})^{\frac{1}{2}} f(\zeta)||^p \det(1 - \zeta\bar{\zeta})^{-n-1} d\zeta < +\infty$$

($d\zeta$ est la mesure euclidienne ; $\det(1 - \zeta\bar{\zeta})^{-n-1} d\zeta$ est la mesure invariante par G) ; et le groupe G opère sur ces fonctions par

$$f(\zeta) \to \rho(\bar{\beta}\zeta + \bar{\alpha})^{-1} f(M\zeta) \quad \text{si} \quad M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

On passe de l'interprétation "demi-plan généralisé" à l'interprétation "cercle-unité généralisé" par la formule

$$f(z) \to \rho\left(\frac{z+i}{2i}\right)^{-1} f(z) \quad \text{où} \quad z = i\frac{1+\zeta}{1-\zeta} \quad .$$

Il suit de là que la fonction-noyau $K_\rho(\zeta_1, \zeta_2)$ - dans l'interprétation du cercle- unité généralisé - vérifie

$$K_\rho(\zeta, 0) = c(\rho) \ ,$$

en sorte que $\mathcal{H}^2(\rho)$ contient les constantes et donc toute fonction holomorphe de ζ qui est bornée dans le cercle-unité (par exemple tout polynôme). L'existence de $\mathcal{H}^2(\rho)$ pour $\alpha_n > n$ s'exprime encore par la relation

$$\int ||\rho(1 - \zeta\bar{\zeta})^{\frac{1}{2}}||^2 \det(1 - \zeta\bar{\zeta})^{-n-1} d\zeta < +\infty \Leftrightarrow \alpha_n > n \ .$$

Ne pas oublier que l'exposant α_n n'est pas nécessairement entier ; à titre de cas particulier on trouve que

$$\int \det(1 - \zeta\bar{\zeta})^s d\zeta < +\infty \Leftrightarrow s > -1 \ .$$

Il est clair que nous avons démontré en même temps que le théorème 1 le résultat suivant :

THÉORÈME 2. - Supposons $\alpha_n > 2n$. Alors la fonction-noyau de $\mathcal{H}^2(\rho)$ appartient à $\mathcal{H}^p(\rho)$ pour tout nombre $p \geqslant 1$. De plus, si l'on interprète $\mathcal{H}^p(\rho)$ comme un espace de fonctions holomorphes dans le cercle-unité généralisé, alors $\mathcal{H}^p(\rho)$ contient toute fonction $f(\zeta)$ holomorphe et bornée dans celui-ci.

Nous allons maintenant déduire de là le résultat suivant :

THÉORÈME 3. - Supposons $\alpha_n > 2n$. Alors la relation

$$f(M_1) = \int K_\rho(M_1 M_2^{-1}) f(M_2) dM_2 = K_\rho * f(M_1) \tag{2.17}$$

est vraie pour toute fonction $f \in \mathcal{H}^p(\rho)$ et tout $p \geqslant 1$.

En vertu du théorème 2 la fonction $K_\rho(M)$ est dans $\mathcal{H}^q(\rho)$, $1/q + 1/p = 1$; le second membre de (2.17) est donc absolument convergent, de sorte que la relation (2.17) a un sens pour toute $f \in \mathcal{H}^p(\rho)$. Elle est, de plus, vraie pour $f \in \mathcal{H}^2(\rho)$, par définition de la fonction noyau. La démonstration de (2.17) se réduit alors à établir les deux assertions que voici :

i. l'intersection $\mathcal{H}^2(\rho) \cap \mathcal{H}^p(\rho)$ est partout dense dans l'espace $\mathcal{H}^p(\rho)$;

ii. $f \longrightarrow K_\rho * f$ est une application linéaire continue de $\mathcal{L}^p(\rho)$ dans $\mathcal{L}^p(\rho)$.

Il est sous-entendu que pour p fini, on munit $\mathcal{L}^p(\rho)$ de sa topologie forte et pour $p = +\infty$ de sa topologie faible.

Démontrons d'abord l'assertion ii . Comme la fonction $K_\rho(M)$ est intégrable sur G (vu l'hypothèse $\alpha_n > 2n$) on a pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^p(\rho)$, holomorphe ou non, l'inégalité

$$\| K_\rho * f \|_p \leq \| K_\rho \|_1 \cdot \| f \|_p$$

(A. WEIL, l'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Paris 1939
Ceci prouve ii pour p fini. Pour p infini, il faut prouver que pour toute fonction $g \in \mathcal{L}^1(\rho)$ l'expression

$$\langle K_\rho * f , g \rangle = \int \langle K_\rho * f(M) , g(M) \rangle \, dM$$

est une fonction faiblement continue de $f \in \mathcal{L}^\infty(\rho)$; cela résulte de l'identité

$$\langle K_\rho * f , g \rangle = \langle f , K_\rho * g \rangle$$

et du fait que $g \in \mathcal{L}^1(\rho)$ implique $K_\rho * g \in \mathcal{L}^1(\rho)$.

On va maintenant prouver l'assertion i.

Plaçons-nous pour cela dans le cercle-unité généralisé et considérons le centre du groupe K, formé des matrices

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{avec } |\omega| = 1 .$$

Celui-ci est compact et abélien ; par conséquent la représentation L_ρ de G dans $\mathcal{H}^p(\rho)$, restreinte au sous-groupe en question, est somme directe topologique de représentations de dimension 1 ; cela veut dire que $\mathcal{H}^p(\rho)$ est engendré topologiquement par les fonctions $f \in \mathcal{H}^p(\rho)$ qui vérifient une relation de la forme

$$f(\omega^2 \zeta) = \omega^q f(\zeta) \quad \text{pour } |\omega| = 1 ;$$

mais il est clair que les solutions de cette équation ne sont autres que les polynômes homogènes par rapport à ζ ; comme ceux-ci appartiennent à $\mathcal{H}^p(\rho)$ et à $\mathcal{H}^2(\rho)$ en vertu du théorème 2, l'assertion i est établie, et avec elle le théorème 3.

REMARQUE 2. - Parmi les $f \in \mathcal{H}^p(\rho)$, les polynômes sont évidemment caractérisés par le fait suivant : le sous-espace de $\mathcal{H}^p(\rho)$ engendré par les $L_\rho(W)f$, $W \in K$ est de dimension finie. Vu la théorie des représentations infinies des groupes semi-simples, il n'est donc pas surprenant qu'ils jouent un rôle important. Insistons encore une fois sur le fait que ces polynômes sont partout denses dans $\mathcal{H}^p(\rho)$ - propriété générale des représentations (infinies) d'un groupe compact : une telle représentation est somme directe topologique de représentations de dimension finie.

COROLLAIRE 1. - *Supposons $\alpha_n > 2n$, et soient p et q deux exposants conjugués. Alors l'espace $\mathcal{L}^p(\rho)$ est somme directe algébrique de $\mathcal{H}^p(\rho)$ et du mouvement orthogonal à $\mathcal{H}^q(\rho)$. De plus $\mathcal{H}^q(\rho)$ s'identifie au dual de $\mathcal{H}^p(\rho)$.*

Considérons en effet dans $\mathcal{L}^p(\rho)$ l'opérateur

$$f \to K_\rho * f \quad ;$$

comme la fonction K_ρ est intégrable, il est continu ; comme $K_\rho * K_\rho = K_\rho$, cet opérateur est de carré égal à 1 ; d'après le théorème 3, il se réduit à l'identité sur $\mathcal{H}^p(\rho)$; enfin il applique $\mathcal{L}^p(\rho)$ dans $\mathcal{H}^p(\rho)$ puisque $K_\rho(M)$ est fonction holomorphe de M. Autrement dit cet opérateur définit une projection de $\mathcal{L}^p(\rho)$ sur $\mathcal{H}^p(\rho)$, ce qui prouve que

$$\mathcal{L}^p(\rho) = \mathcal{H}^p(\rho) + \mathcal{N}^p(\rho) ,$$

où $\mathcal{N}^p(\rho)$ est le noyau de $f \longrightarrow K_\rho * f$. Or on a évidemment

$$\langle K_\rho * f , g \rangle = \langle f , K_\rho * g \rangle$$

pour $f \in \mathcal{L}^p(\rho)$, $g \in \mathcal{L}^q(\rho)$; donc la relation $f \in \mathcal{N}^p(\rho)$ signifie que f est orthogonal à l'image de $\mathcal{L}^q(\rho)$ par $g \longrightarrow K_\rho * g$, i.e. à $\mathcal{H}^q(\rho)$ d'après ce qu'on vient de voir ; ceci démontre la première assertion de l'énoncé. Soit maintenant $f \longrightarrow u(f)$ une forme linéaire continue sur $\mathcal{H}^p(\rho)$; d'après le théorème de Hahn-Banach, elle se prolonge à $\mathcal{L}^p(\rho)$, donc est de la forme

$$u(f) = \langle f , g \rangle$$

pour une fonctions $g \in \mathcal{L}^q(\rho)$; comme

$$\langle f , g \rangle = \langle f , K_\rho * g \rangle \qquad \text{pour } f \in \mathcal{H}^p(\rho)$$

on peut supposer $g \in \mathcal{H}^q(\rho)$, ce qui prouve la seconde assertion.

COROLLAIRE 2. - <u>Pour</u> $\alpha_n > 2n$, <u>l'espace</u> $\mathcal{H}^p(\rho)$ <u>est fonction croissante de</u> p .

Pour établir que l'on a

$$\mathcal{H}^{p'}(\rho) \subset \mathcal{H}^{p''}(\rho) \qquad \text{pour } p' < p''$$

il suffit évidemment de prouver que

$$\mathcal{H}^p(\rho) \subset \mathcal{H}^\infty(\rho)$$

pour tout p ; or soit q l'exposant conjugué de p ; pour $f \in \mathcal{H}^p(\rho)$ on a, vu les inégalités classiques concernant les produits de composition, la relation

$$\|f\|_\infty \leqslant \|K_\rho\|_q \cdot \|f\|_p$$

en raison de (2.17) ; d'où le résultat.

3. <u>La transformation de Fourier dans</u> $\mathcal{H}^1(\rho)$.

On suppose $\alpha_n > 2n$.

D'après le Corollaire précédent, on a $\mathcal{H}^1(\rho) \subset \mathcal{H}^2(\rho)$ et par conséquent on peut appliquer aux fonctions de $\mathcal{H}^1(\rho)$ la transformation de Fourier définie pour $\mathcal{H}^2(\rho)$ dans l'Exposé 6 ; dans l'interprétation "demi-plan de Siegel" celle-ci est donnée, rappelons-le, par la formule

$$\hat{f}(s) = \int f(z)\exp(-2\pi i \operatorname{Tr}(sz))dx \qquad (z = x + iy) , \tag{3.1}$$

qui n'a d'ailleurs de sens, a priori, qu'au point de vue L^2 . Nous allons définir $\hat{f}(s)$ par une autre intégrale, absolument convergente celle-là.

Il est tout d'abord évident que pour $\alpha_n > 2n$ (et même pour $\alpha_n \geqslant 0$) l'espace $\mathcal{H}^{\infty}(\rho)$ contient toutes les fonctions

$$\chi_{s;\underline{a}}(z) = \exp(2\pi i \mathrm{Tr}(sz))\underline{a} \qquad (s = s' \gg 0 \; ; \; \underline{a} \in F_\rho)$$

- il suffit pour le voir de vérifier que l'expression

$$\|\rho(y^{\frac{1}{2}})\| \exp(-2\pi \mathrm{Tr}(sy))$$

est bornée en y, ce qui résulte de $s \gg 0$ et du fait que $\|\rho(y^{\frac{1}{2}})\|$ est à croissance polynomiale au plus. On peut donc, pour $f \in \mathcal{H}^1(\rho)$, calculer le produit scalaire

$$\langle f , \chi_{s;\underline{a}} \rangle = \iint \langle f(z) , \rho(y)\underline{a} \rangle \exp(-2\pi i \mathrm{Tr}(s\bar{z}))d\mu$$

$$= \int_{y \gg 0} \exp(-4\pi \mathrm{Tr}(sy))\det(y)^{-n-1}dy \int \langle f(z) , \rho(y)\underline{a} \rangle \exp(-2\pi i \mathrm{Tr}(sz))dx$$

et en utilisant la fonction

$$H_\rho(s) = \int \rho(y)\exp(-\pi \mathrm{Tr}(sy))\det(y)^{-n-1}dy$$

de l'Exposé 6, il vient visiblement

$$(3.2) \qquad \langle f , \chi_{s;\underline{a}} \rangle = \langle \hat{f}(s), H_\rho(4s)\underline{a} \rangle \quad \text{pour } s \gg 0 \; ;$$

comme on sait (Exposé 6, Lemme 3) que $\hat{f}(s) = 0$ presque partout en dehors de l'ouvert $s \gg 0$, la relation (3.2) suffit évidemment à déterminer $\hat{f}(s)$.

Remarquons maintenant que la relation

$$\iint \|\rho(y^{\frac{1}{2}})f(z)\| \det(y)^{-n-1}dxdy < +\infty$$

prouve, modulo Lebesgue-Fubini, que l'on a

$$(3.3) \qquad \int \| f(x+iy)\| dx < +\infty \quad \text{pour presque tout } y \; ;$$

tenant compte de (3.1), on en conclut que <u>la transformée de Fourier d'une</u> $f \in \mathcal{H}^1(\rho)$ <u>est une fonction partout continue de</u> s (il serait plus correct de dire que $\hat{f}$ est égale presque partout à une fonction partout continue de s, laquelle est d'ailleurs parfaitement déterminée puisqu'une fonction <u>continue</u> ne peut être nulle <u>presque partout</u> sans être nulle <u>identiquement</u>). Par la suite nous réserverons évidemment la notation $\hat{f}(s)$ à <u>la</u> fonction <u>continue</u> déduite de $f \in \mathcal{H}^1(\rho)$ par transformation de Fourier.

La formule (3.2) conduit à une importance <u>majoration de</u> $\hat{f}(s)$. Il est clair en effet qu'on en tire

$$|\langle \hat{f}(s) , H_\rho(4s)\underline{a} \rangle| \leqslant \|f\|_1 \cdot \|\chi_{s;\underline{a}}\|_\infty \, .$$

Or

$$\|\chi_{s;\underline{a}}\|_\infty = \sup_y \|\rho(y^{\frac{1}{2}})\underline{a}\| \exp(-2\pi \mathrm{Tr}(sy))$$

$$= \sup_g \|\rho(g)\underline{a}\| \cdot \exp(-2\pi \mathrm{Tr}(gsg')) \qquad (g \in GL_+(n, \underline{R}))$$

$$= \sup_g \|\rho(gs^{-\frac{1}{2}})\underline{a}\| \cdot \exp(-2\pi \mathrm{Tr}(gg'))$$

$$\leq \gamma \cdot \|\rho(s^{-\frac{1}{2}})\underline{a}\| \quad \text{avec} \quad \gamma = \sup \|\rho(g)\| \exp(-2\pi \mathrm{Tr}(gg')) .$$

Donc

$$|\langle \hat{f}(s) , H_\rho(4s)\underline{a} \rangle| \leq \gamma \|f\|_1 \cdot \|\rho(s^{-\frac{1}{2}})\underline{a}\| \tag{3.4}$$

ou encore

$$|\langle \hat{f}(s) , \underline{a} \rangle| \leq \gamma \cdot \|f\|_1 \cdot \|\rho(s^{-\frac{1}{2}})H_\rho(4s)^{-1}\underline{a}\| \ ;$$

tenant compte de la formule

$$H_\rho(s) = \det(s)^{(n+1)/2}\rho(s^{-\frac{1}{2}})H(\rho)\rho(s^{-\frac{1}{2}})$$

de l'Exposé 6, théorème 3, on trouve finalement

$$\boxed{\|\hat{f}(s)\| \leq \gamma(\rho) \cdot \|f\|_1 \cdot \det(s)^{-(n+1)/2} \cdot \|\rho(s^{\frac{1}{2}})\|} \qquad (s \gg 0) \tag{3.5}$$

avec une constante $\gamma(\rho)$ indépendante de f ; on obtient aussi, en remplaçant $\underline{a}$ par $\rho(s^{-1/2})\underline{a}$, l'inégalité

$$\boxed{\|\rho(s^{-\frac{1}{2}})\hat{f}(s)\| \leq \gamma(\rho) \cdot \|f\|_1 \cdot \det(s)^{-(n+1)/2}} \ . \tag{3.5 bis}$$

Nous allons déduire de là ,le résultat que voici :

THÉORÈME 4. - Supposons $\alpha_n > 2n$ et soit une fonction $f \in \mathcal{H}^1(\rho)$. On a alors l'identité

$$\sum_{\substack{n=n' \\ n \text{ entière}}} f(z+n) = \sum_{\substack{s=s' \gg 0 \\ s \text{ demi-entière}}} \hat{f}(s)\exp(2\pi i \mathrm{Tr}(sz)) ,$$

et les deux séries convergent normalement sur toute partie compacte du demi-plan de Siegel.

Soit A un compact ; comme $f(z)$ est holomorphe il suffit, pour prouver que le premier membre converge normalement sur A , d'établir que

$$\sum_n \int_A \|\rho(y^{\frac{1}{2}})f(z+n)\|\,dz < +\infty ,$$

ce qui résulte trivialement du fait que $f \in \mathcal{H}^1(\rho)$. Quant à la série du second membre son terme général est, d'après (3.5), majoré par un polynôme en $s^{1/2}$ multiplié par $\exp(-2\pi \mathrm{Tr}(sy))$; vu $y \gg 0$ il y a bien convergence uniforme sur tout compact, et même d'ailleurs dans tout demi-plan $y \gg c$ $(c \gg 0)$

Pour véirifier que les deux membres sont égaux il suffit évidemment d'appliquer la formule sommatoire de Poisson à la fonction

$$x \longrightarrow f(x+iy)$$

définie sur le groupe des $x = x'$, par rapport au sous-groupe discret des x entières. Pour ce faire il faut prendre quelques précautions, et vérifier que les hypothèses qui sont à la base de la dite formule sont bien vérifiées, à savoir :

a. on a $\int \|f(x+iy)\|\,dx < +\infty$: ceci est vrai pour presque tout y comme on l'a vu ;

b. la fonction $\sum f(x+iy+n)$ est continue : c'est clair ;

c. la série de Fourier de cette fonction est absolument convergente : c'est clair aussi ;

ceci fait, la formule de Poisson donne l'identité cherchée pour presque tout y - mais comme les deux membres sont des fonctions holomorphes de z, le résultat vaut sans exception. Il est peut-être utile de préciser encore que si la sommation est étendue aux $s \gg 0$, c'est parce que $\hat{f}(s)$ est identiquement nulle en dehors de l'ouvert $s \gg 0$; on sait en effet que c'est vrai presque partout ; mais comme $\hat{f}$ est continue, on en déduit déjà que $\hat{f}$ est identiquement nulle en dehors de l'ensemble fermé $s \geq 0$, donc aussi - par continuité - sur l'ensemble des $s \geq 0$ non définies. Ceci termine la démonstration.

COROLLAIRE. - On a l'identité

$$c(\rho)\sum_{n=n'} \rho\left(\frac{z+n}{2i}\right)^{-1} = \sum_{s \gg 0} H_\rho(4s)^{-1}\exp(2\pi i \mathrm{Tr}(sz))$$

pour $\alpha_n > 2n$.

Il suffit d'appliquer le théorème à la fonction-noyau

$$f(z) = c(\rho)\rho[(z-\bar{z}_0)/2i]^{-1}$$

en tenant compte du calcul de sa transformée de Fourier, effectué dans l'Exposé 6, n° 8.

On montrera dans un Appendice au présent exposé que le Corollaire ci-dessus est en fait valable pour $\alpha_n > n$. Pour ρ de dimension 1, il est dû à C.L. SIEGEL (Über die Analytische Theorie der quadratischen Formen, Ann. of Math., 36(1935) p. 527-606 ; cf. Hilfssatz 38). La démonstration de Siegel consiste à appliquer la formule de Poisson à la fonction $s \longrightarrow \hat{f}(s)\exp(2\pi i \mathrm{Tr}(sz))$ au lieu de l'appliquer à $f(z)$.

Seconde partie.

Applications aux fonctions automorphes.

On désigne par Γ un sous-groupe discret de $Sp(n, \underline{R}) = G$ et par ρ une représentation irréductible de K (sous-groupe compact maximal de G correspondant au point i du demi-plan de Siegel) dans un espace vectoriel complexe F_ρ de dimension finie ; on supposera choisi sur F_ρ un produit scalaire tel que la représentation ρ soit <u>unitaire</u>. On désigne d'autre part par μ un <u>multiplicateur</u> de Γ , i.e. une représentation unitaire de Γ dans un espace vectoriel de dimension finie F_μ (muni d'un produit scalaire), tel que le noyau de μ soit d'indice fini dans Γ - hypothèse d'ailleurs inutile dans certains cas que le lecteur trouvera facilement tout seul. On posera

$$F = \mathrm{Hom}(F_\mu , F_\rho) .$$

Sur le groupe G , on aura à considérer l'espace

$$\mathcal{H}(\mu ; \rho)$$

formé des applications

$$f : G \longrightarrow F$$

qui vérifient les deux conditions que voici :

i. $f(WM) = \rho(W)f(M)$ pour $W \in K$, $M \in G$;

ii. pour tout $\underline{a} \in F_\mu$, l'application $M \longrightarrow f(M)\underline{a}$ de G dans F_ρ est "holomorphe" au sens expliqué au n° 1, <u>Remarque</u>, i.e. appartient à l'espace $\mathcal{H}(\rho)$.

Il est clair qu'en prenant une base de F_μ , on pourrait écricre $\mathcal{H}(\mu ; \rho)$ sous la forme d'une somme directe d'un certain nombre fini d'exemplaires de $\mathcal{H}(\rho)$. Dans l'interprétation "demi-plan de Siegel", $\mathcal{H}(\mu ; \rho)$ d'identifie aux fonctions holomrophes (au sens habiteul) à valeurs dans F .

Le multiplicateur μ de Γ permet de faire opérer le groupe Γ sur $\mathcal{H}(\mu ; \rho)$ en posant

$$L_{\mu;\rho}(M_0) : f(M) \longrightarrow f(MM_0)\mu(M_0)^{-1} \qquad \text{pour } M_0 ,$$

d'où une représentation linéaire de Γ dans l'espace vectoriel $\mathcal{H}(\mu ; \rho)$.
Nous poserons

$$\mathcal{H}_\Gamma(\mu ; \rho) = \text{invariants de } \Gamma \text{ dans } \mathcal{H}(\mu ; \rho) ,$$

de sorte que $\mathcal{H}_\Gamma(\mu ; \rho)$ est l'ensemble des $f \in \mathcal{H}(\mu ; \rho)$ vérifiant

$$f(MM_0) = f(M)\mu(M_0) \qquad \text{pour } M \in G , M_0 \in \Gamma .$$

Dans l'interprétation "demi-plan de Siegel" il est clair - vu le n° 1 - que l'on retrouve les formes autonorphes d'espèce (μ , ρ) pour Γ.

Pour $1 \leqslant p \leq +\infty$ on posera de même

$$\mathcal{H}^p(\mu ; \rho) = \text{ensemble des } f \in \mathcal{H}(\mu ; \rho) \text{ telles que}$$

$$\int_G ||f(M)||^p dM < +\infty$$

$$\mathcal{H}^p_\Gamma(\mu ; \rho) = \text{ensemble des } f \in \mathcal{H}_\Gamma(\mu ; \rho) \text{ telles que}$$

$$\int_{G/\Gamma} ||f(M)||^p dM < +\infty$$

ce qui correspond, modulo les "changements de variables" du n° 1, aux définitions des Exposés précédents. Le "facteur d'automorphie" $\rho(cz + d)$ a disparu - mais c'est justement ce à quoi on voulait arriver ; il n'y a donc pas lieu de s'en étonner.

Dans le cas du groupe $\Gamma = Sp(n , \underline{Z})$ on introduira aussi l'espace

$$\mathcal{S}_\Gamma(\mu ; \rho) \subset \mathcal{H}_\Gamma(\mu ; \rho)$$

des Spitzenformen ; rappelons l'énoncé du lemme de Satake déjà utilisé (mais non démontré) dans l'Exposé précédent :

$$\text{on a } \mathcal{H}^p_\Gamma(\mu ; \rho) = \mathcal{S}_\Gamma(\mu ; \rho) \qquad \text{si } p.\alpha_n > 2n ,$$

où α_n est le paramètre habituel figurant dans le plus haut poids de ρ.

Bien entendu on appliquera aux espaces $\mathcal{H}(\mu ; \rho)$ les résultats de la première partie ; ceux-ci ont été démontrés dans l'hypothèse où μ est la représentation unité, mais le passage au cas général est trivial au sens strict du mot.

4. Séries de Poincaré.

THÉORÈME 5. - (Γ arbitraire) - Pour toute fonction $f \in \mathcal{H}^1(\mu ; \rho)$ la série

$$f^\Gamma(M) = \sum_{M_0 \in \Gamma} f(MM_0^{-1})\mu(M_0)$$

<u>converge normalement sur tout compact, appartient à</u> $\mathcal{H}^1_\Gamma(\mu ; \rho)$, <u>et l'application linéaire</u> $f \to f^\Gamma$ <u>de</u> $\mathcal{H}^1(\mu ; \rho)$ <u>dans</u> $\mathcal{H}^1_\Gamma(\mu ; \rho)$ <u>est continue</u>.

On a en effet trivialement

$$\int_{G/\Gamma} \| f^\Gamma(M)\| \, dM \leq \int_{G/\Gamma} \sum_{M_0} \| f(MM_0)\| \, dM = \int_G \| f(M)\| \, dM < + \infty$$

et comme il s'agit de fonctions holomorphes la convergence dans $\mathcal{L}^1(G/\Gamma)$ implique la convergence normale sur tout compact,

C.Q.F.D.

Comme l'application $f \to f^\Gamma$ est continue, il est clair que si $\mathcal{H}^1_\Gamma(\mu ; \rho)$ est de dimension <u>finie</u>, on n'obtient rien de moins en se limitant à des fonctions f qui sont <u>partout denses</u> dans $\mathcal{H}^1(\mu ; \rho)$ par exemple (n° 2 <u>Remarque</u> 2) à celles qui, dans la réalisation "cercle-unité"généralisé" de G/K , se représentent par des fonctions polynômes ; les séries f^Γ particulières qu'on obtient ainsi seront appelées par la suite les <u>séries de Poincaré</u> ; dans le cercle-unité $\zeta\bar{\zeta} \gg 1$, elles ne sont autres évidemment que les fonctions

$$p^\Gamma(\zeta) = \sum_{M\in\Gamma} J_\rho(M , \zeta)^{-1} p(M\zeta) \mu(M)^{-1}$$

où $p(\zeta)$ est une fonction <u>polynomiale</u> à valeurs dans $F = \mathrm{Hom}(F_\mu , F_\rho)$. Dans le cas où les facteurs d'automorphie sont les puissances du jacobien $dM\zeta/d\zeta$ on retrouve ainsi les "séries de Poincaré" du Séminaire H. Cartan 1953/54, Exposé 1 ; d'où la terminologie adoptée. Le fait que ces séries sont intégrables modulo Γ prouve, dans le cas du groupe modulaire et des groupes commensurables, que ce sont des <u>Spitzenformen</u> (appliquer le lemme de Satake :

$$\mathcal{H}^1_\Gamma(\mu ; \rho) = \mathcal{S}_\Gamma(\mu ; \rho) \quad \text{pour} \quad \alpha_n > 2n \; ;$$

voir aussi une démonstration directe plus loin), résultat qui ne figure pas, à la connaissance du rédacteur tout au moins, dans la littérature spéciale.

La situation est d'ailleurs encore meilleure qu'on ne pourrait le croire :

THÉORÈME 6. - (Γ commensurable à $Sp(n , \underline{Z})$, ou bien G/Γ compact) - <u>Pour</u> $\alpha_n > 2n$, <u>toute Spitzenform est une série de Poincaré et réciproquement</u>.

Considérons $\mathcal{S}_\Gamma(\mu ; \rho)$ comme un espace de Hilbert (de dimension finie). Si les séries de Poincaré f^Γ formaient un sous-espace distinct de $\mathcal{S}_\Gamma(\mu ; \rho)$, il existerait une $g \in \mathcal{S}_\Gamma(\mu ; \rho)$ non nulle orthogonale aux f^Γ ; or

$$\langle f^{\Gamma}, g\rangle_{\Gamma} = \int_{G/\Gamma} \langle f^{\Gamma}(M), g(M)\rangle\, dM = \int_{G/\Gamma} \sum \langle f(MM_0)\mu(M_0)^{-1}, g(M)\rangle dM$$

$$= \int_{G/\Gamma} \sum \langle f(MM_0), g(M)\mu(M_0)\rangle\, dM$$

$$= \int_{G/\Gamma} \sum \langle f(MM_0), g(MM_0)\rangle\, dM = \int_{G} \langle f(M), g(M)\rangle\, dM ;$$

donc la fonction $g \in \mathcal{S}_{\Gamma}(\mu ; \rho) \subset \mathcal{H}^{\infty}(\mu ; \rho)$ serait orthogonale à des $f \in \mathcal{H}^1(\mu ; \rho)$ qui sont partout denses dans $\mathcal{H}^1(\mu ; \rho)$; comme $\mathcal{H}^{\infty}(\mu ; \rho)$ est le dual de $\mathcal{H}^1(\mu ; \rho)$ d'après le Corollaire 1 du Théorème 3, cela est impossible et le théorème est démontré.

REMARQUE. - On a démontré plus haut que les séries de Poincaré sont des Spitzenformen en utilisant le lemme de Satake. En fait, on peut démontrer que pour tout sous-groupe discret Γ de $Sp(n, R)$, les séries de Poincaré relatives à Γ sont dans $\mathcal{H}^{\infty}_{\Gamma}(\mu ; \rho)$, i.e. sont bornées sur G - ce qui, dans le cas des groupes commensurables au groupe modulaire, redonne le fait que ce sont des Spitzenformen (utiliser le théorème 2 de l'Exposé 7).

Voici la démonstration du fait que $f^{\Gamma} \in \mathcal{H}^{\infty}_{\Gamma}(\mu ; \rho)$; comme on la constatera, elle repose sur quelques résultats non triviaux de HARISH-CHANDRA concernant les représentations irréductibles (de dimension infinie) des groupes semi-simples.

Tout d'abord on a $\mathcal{H}^1(\mu ; \rho) \subset \mathcal{H}^{\infty}(\mu ; \rho)$ d'après le Corollaire 1 du Théorème 3 ; par suite la série

$$f^{\Gamma}(M) = \sum f(MM_0)\mu(M_0)^{-1} = \sum L_{\mu;\rho}(M_0)f(M)$$

est formée de fonctions qui appartiennent toutes à $\mathcal{H}^{\infty}(\mu ; \rho)$.

Comme on veut montrer que $f^{\Gamma} \in \mathcal{H}^{\infty}_{\Gamma}(\mu ; \rho) \subset \mathcal{H}^{\infty}(\mu ; \rho)$, il suffit évidemment d'établir que la série précédente converge au sens de la topologie faible de $\mathcal{H}^{\infty}(\mu ; \rho)$ considéré comme dual de l'espace de Banach $\mathcal{H}^1(\mu ; \rho)$. Plus précisément, supposons démontré que la série numérique

$$\sum_{M_0 \in \Gamma} \langle g, L_{\mu,\rho}(M_0)f\rangle \tag{4.1}$$

converge absolument quel que soit $g \in \mathcal{H}^1(\mu ; \rho)$; les sommes partielles de cette série sont alors bornées, ce qui veut dire que l'ensemble des sommes partielles de la série $\sum L_{\mu,\rho}(M_0)f$ d'éléments de $\mathcal{H}^{\infty}(\mu ; \rho)$ est faiblement borné ;

mais dans le dual d'un espace de Banach, tout ensemble faiblement borné est fortement borné ; donc il existe une constante finie c telle que toute somme finie de fonctions $L_{\mu,\rho}(M_0)f$ soit contenue dans la boule de rayon c du Banach $\mathcal{H}^\infty(\mu;\rho)$; mais alors il est clair que pour toute $g \in \mathcal{H}^1(\mu;\rho)$ on obtient à la limite l'inégalité

$$\left| \sum_{M_0 \in \Gamma} \langle g , L_{\mu,\rho}(M_0)f \rangle \right| \leqslant c.\|g\|_1 ,$$

ce qui prouve l'existence d'une $f' \in \mathcal{H}^\infty(\mu;\rho)$ telle que

$$\sum_{M_0 \in \Gamma} \langle g , L_{\mu,\rho}(M_0)f \rangle = \langle g , f' \rangle$$

pour toute $g \in \mathcal{H}^1(\mu;\rho)$; comme de plus $\mathcal{L}^1(\mu;\rho)$ est somme directe algébrique de $\mathcal{H}^1(\mu;\rho)$ et du sous-espace orthogonal à $\mathcal{H}^\infty(\mu;\rho)$ d'après le Corollaire 1 du Théorème 3, la relation ci-dessus sera encore vraie pour $g \in \mathcal{L}^1(\mu;\rho)$; prenant g continue et à support compact, on aura

$$\begin{aligned}\int \langle g(M) , f'(M) \rangle \, dM = \langle g , f' \rangle &= \sum \langle g , L_{\mu,\rho}(M_0)f \rangle \\ &= \sum \int \langle g(M) , f(MM_0)\mu(M_0)^{-1} \rangle \, dM \\ &= \int \langle g(M) , f^\Gamma(M) \rangle \, dM\end{aligned}$$

- il est trivial de permuter le $\sum$ et le signe $\int$ puisque g est continue à support compact - d'où l'on conclut que

$$f'(M) = f^\Gamma(M)$$

presque partout, et en fait partout puisqu'il s'agit de fonctions holomorphes et donc continues ; d'où $f^\Gamma \in \mathcal{H}^\infty(\mu;\rho)$.

<u>Tout revient donc bien à prouver la convergence absolue de la série</u> (4.1). <u>Montrons maintenant qu'on peut se ramener au cas d'un multiplicateur</u> μ <u>trivial</u>. On a en effet

$$\begin{aligned}\langle g , L_{\mu,\rho}(M_0)f \rangle &= \int_G \langle g(M) , f(MM_0)\mu(M_0)^{-1} \rangle \, dM \\ &= \int_G \langle g(M)\mu(M_0) , f(MM_0) \rangle \, dM \\ &= \langle g_{M_0} , L_\rho(M_0)f \rangle\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$g_{M_0}(M) = g(M)\mu(M_0)$$

$$L_\rho(M_0) : f(M) \longrightarrow f(MM_0) .$$

Soit Γ_μ le noyau de μ ; c'est un sous-groupe invariant et d'indice fini de Γ de sorte qu'on peut écrire

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^{i=N} \Gamma_\mu . M_i \qquad \text{avec des } M_i \in \Gamma ;$$

la série (4.1) s'écrit alors

$$\sum_{i=1}^{i=N} \sum_{M' \in \Gamma_\mu} < g_{M_i} , L_\rho(M'M_i) f >$$

$$= \sum \sum < L_\rho(M_i)^{-1} g_{M_i} , L_\rho(M_i^{-1} M' M_i) f > ;$$

posant $g_i = L_\rho(M_i)^{-1} g_{M_i}$ on voit que (4.1) se décompose en les N séries

$$\sum_{M' \in \Gamma_\mu} < g_i , L_\rho(M') f >$$

ce qui démontre évidemment notre assertion.

Puisque nous avons éliminé le multiplicateur μ des séries considérées nous pouvons ramener évidemment au cas des espaces $\mathcal{H}^1(\rho)$ et $\mathcal{H}^\infty(\rho)$, et tout revient à prouver que la série

$$\sum_{M_0 \in \Gamma} \int_G < g(M) , f(MM_0) > dM$$

converge absolument pour $g \in \mathcal{H}^1(\rho)$ dans l'hypothèse où f^Γ est une série de Poincaré (i.e. si f correspond dans le "cercle-unité généralisé" à une fonction <u>polynôme</u>). Considérons la fonction

$$h(M') = \int_G < g(M) , f(MM') > dM = < g , L_\rho(M') f >$$

sur G ; comme produit de composition (ou presque!) de deux fonctions intégrables, elle est intégrable sur G ; d'ailleurs

$$\int \| h(M') \| dM' \leq \iint \| g(M) \| . \| f(MM') \| dM dM' = \| f \|_1 . \| g \|_1 < + \infty .$$

Par suite <u>la série</u>

(4.2) $$\sum_{M_0 \in \Gamma} h(M_0 M')$$

<u>converge au sens de l'espace</u> $\mathcal{L}^1(\Gamma \backslash G)$ comme le montre la démonstration du Théorème 5. Si nous montrons que les termes de cette série vérifient tous une

même équation différentielle elliptique, il s'ensuivra que la série en question converge partout, en particulier pour $M' = e$, élément neutre, et tout sera démontré.

Or soit K le sous-groupe compact maximal de G, stabilisateur de 0 dans le cercle-unité généralisé. L'hypothèse que f définit une série de Poincaré signifie purement et simplement (n° 2, Remarque 2) que [3] les éléments $L_\rho(W)f$, $W \in K$, de $\mathcal{H}^1(\rho)$ restent dans un sous-espace de dimension finie de $\mathcal{H}^1(\rho)$. Il résulte alors immédiatement de la théorie de HARISH-CHANDRA (cf. aussi GODEMENT, [4]), démonstration du Lemme 17, p. 539) que l'on peut trouver sur le groupe G un opérateur différentiel elliptique X possédant les propriétés suivantes :

i. X commute aux translations $M \longrightarrow M'MW$ ($M' \in G$, $W \in K$) ;

ii. toute fonction de la forme

$$h(M) = \langle L_\rho(M)f , g \rangle \quad \text{avec} \quad g \in \mathcal{H}^\infty(\rho)$$

vérifie l'équation $Xh = 0$.

Noter que X n'est pas forcément du second ordre.

Cela dit, puisque X commute aux translations à gauche et puisque $\mathcal{H}^1(\rho) \subset \mathcal{H}^\infty(\rho)$ il est clair que la série (4.2) est formée de solutions de $X\overline{h} = 0$, et ceci termine la démonstration.

Enonçons les résultats obtenus [5] :

THÉORÈME 5 bis. - Soient ρ une représentation irréductible de $GL(n, \underline{C})$, Γ un sous-groupe discret de $G = Sp(n, \underline{R})$, μ un multiplicateur de Γ et f une fonction appartenant à l'espace $\mathcal{H}^1(\mu ; \rho)$. Supposons qu'il existe un sous-groupe compact maximal K de G tel que les fonctions $M \longrightarrow f(MW)$, $W \in K$, engendrent un espace vectoriel de dimension finie. Enfin supposons $\alpha_n > 2n$.

Alors la fonction

$$f^\Gamma(M) = \sum_{M_0 \in \Gamma} f(MM_0)\mu(M_0)^{-1}$$

est bornée sur G, les sommes partielles de la série précédente sont uniformément

---

(3) Ici intervient le fait que les polynômes sont à la fois intégrables et bornés sur le groupe G.

(4) GODEMENT (Roger). - A theory of spherical functions, I., Trans. Amer. math. Soc., t. 73, 1952, p. 496-556.

(5) Il va de soi que ces résultats et leurs démonstrations s'étendent à tous les espaces symétriques complexes.

bornées sur G, et la série converge faiblement dans l'espace $\mathcal{H}^{\infty}(\mu\,;\,\rho)$.

En particulier, pour tout sous-groupe Γ de G, les séries de Poincaré relatives à Γ sont à la fois bornées sur G et intégrables modulo Γ.

Notons enfin que, modulo le théorème 5 bis, on peut donner du théorème 6 l'énoncé plus général que voici :

THÉORÈME 6 bis. - Soient Γ un sous-groupe discret de $Sp(n\,,\,\underline{R})$ et μ un multiplicateur de Γ. Soit ρ une représentation de $GL(n\,,\,\underline{C})$ telle que $\alpha_n > 2n$. Supposons l'espace homogène G/Γ de mesure finie, et l'espace vectoriel $\mathcal{H}_\Gamma^{\infty}(\mu\,;\,\rho)$ de dimension finie. Alors celui-ci est identique à l'ensemble des séries de Poincaré d'espèce $(\mu\,;\,\rho)$ de Γ.

En effet l'hypothèse que G/Γ est de volume fini permet de munir $\mathcal{H}_\Gamma^{\infty}(\mu\,;\,\rho)$ du produit scalaire habituel, et l'hypothèse que $\mathcal{H}_\Gamma^{\infty}(\mu\,;\,\rho)$ est de dimension finie (i.e. complet pour sa structure pré-hilbertienne) permet d'appliquer le théorème de Hahn-Banach ; on raisonne alors comme dans la démonstration du théorème 6.

5. Fonction-noyau modulo Γ.

Dans ce numéro on désigne par Γ un sous-groupe discret de G sur lequel on fait la seule hypothèse que voici : l'espace G/Γ est de volume fini. On choisit une représentation ρ de $GL(n\,,\,\underline{C})$ avec

$$\alpha_n > 2n$$

On ne tiendra pas compte, pour simplifier les formules, des multiplicateurs de G ; on laisse au lecteur le soin d'étendre les résultats au cas d'un multiplicateur non trivial.

Comme G/Γ est de mesure finie, l'espace $\mathcal{H}_\Gamma^{\infty}(\rho)$ des formes automorphes d'espèces ρ pour Γ, qui sont bornées sur G, est contenu dans l'espace $\mathcal{H}_\Gamma^{2}(\rho)$; nous nous proposons de calculer, à l'aide d'une série, la fonction-noyau de $\mathcal{H}_\Gamma^{\infty}(\rho)$ - plus précisément de l'adhérence de $\mathcal{H}_\Gamma^{\infty}(\rho)$ dans $\mathcal{H}_\Gamma^{2}(\rho)$, puisqu'on n'a défini (Exposé 8, numéro 2) de fonction-noyau que pour les sous-espaces fermés de $\mathcal{H}_\Gamma^{2}(\rho)$. Nous noterons

$$K_\rho^\Gamma(M_1\,,\,M_2)$$

cette fonction-noyau. Elle est donc caractérisée par les propriétés suivantes :

(FN 1). : pour $M_2 \in G$ et $\underline{a} \in F_\rho$ donnés, la fonction

$$M \longrightarrow K_\rho^\Gamma(M\,,\,M_2)\underline{a} \in F_\rho$$

appartient à l'adhérence de $\mathcal{H}_\Gamma^\infty(\rho)$ dans $\mathcal{H}_\Gamma^2(\rho)$;

(FN 2) : on a la propriété de symétrie hermitienne

$$K_\rho^\Gamma(M_1 , M_2)^* = K_\rho^\Gamma(M_2 , M_1) ;$$

(FN 3) : pour toute $f \in \mathcal{H}_\Gamma^\infty(\rho)$ on a la relation

$$f(M_1) = \int_{G/\Gamma} K_\rho^\Gamma(M_1 , M_2)f(M_2)dM_2 .$$

THÉORÈME 7 (G/Γ de volume fini). - Pour $\alpha_n > 2n$, la fonction-noyau de $\mathcal{H}_\Gamma^\infty(\rho)$ est donnée par le développement en série

$$K_\rho^\Gamma(M_1 , M_2) = \sum_{M \in \Gamma} K_\rho(M_1 M M_2^{-1})$$

où $K_\rho(M)$ est la fonction-noyau de l'espace $\mathcal{H}^2(\rho)$.

Soit une fonction

$$f \in \mathcal{H}_\Gamma^\infty(\rho) \subset \mathcal{H}^\infty(\rho) \quad ;$$

comme $\alpha_n > 2n$ le théorème 3 s'applique, d'où la relation

$$f(M_1) = \int_G K_\rho(M_1 M_2^{-1})f(M_2)dM_2 \quad ;$$

mais comme $K_\rho(M)$ est intégrable sur G et f invariante à droite par Γ , la relation précédente s'écrit encore

$$f(M_1) = \int_{G/\Gamma} \sum_{M \in \Gamma} K_\rho(M_1 M M_2^{-1})f(M_2)dM_2 .$$

Tout revient donc à prouver que la série

$$K_\rho^\Gamma(M_1 , M_2) = \sum_{M \in \Gamma} K_\rho(M_1 M M_2^{-1})$$

vérifie les conditions (FN 1), (FN 2) et (FN 3) .

Tout d'abord la série converge normalement sur tout compact à cause du théorème 5, et représente évidemment une forme automorphe par rapport à M_1 ; pour établir (FN 1) il suffit donc de montrer que $K_\rho^\Gamma(M_1 , M_2)$ est bornée en M_1 pour M_2 donné - mais cela résulte du théorème 5 bis (cf. aussi une démonstration plus simple dans la Remarque suivante) et de la relation

$$K_\rho(MW) = K_\rho(M)\rho(W)$$

valable pour $M \in G$, $W \in K$, sous-groupe compact maximal évident de G .

La vérification de (FN 2) est triviale modulo $K_\rho(M)^* = K_\rho(M^{-1})$. Celle de (FN 3) a déjà été faite. Le théorème est donc démontré.

REMARQUE. - Pour démontrer que

$$\sup_{M_1 \in G} \Big\| \sum_{M \in \Gamma} K_\rho(M_1 M M_2^{-1}) \Big\| < + \infty$$

il n'est pas nécessaire de passer par toute la démonstration du théorème 5 bis ; la première partie de cette démonstration suffit. Pour $\underline{a} \in F_\rho$ et $M_2 \in G$ donnés, considérons en effet, dans $\mathcal{H}^\infty(\rho)$, la fonction

$$f(M) = K_\rho(MM_2^{-1})\underline{a} \quad ;$$

il s'agit de démontrer que la somme de la série

$$f^\Gamma = \sum_{M \in \Gamma} L_\rho(M_0) f$$

est dans $\mathcal{H}^\infty(\rho)$; comme on a l'a vu alors il suffit de vérifier que

$$\sum_{M_0 \in \Gamma} \langle g \,,\, L_\rho(M_0) f \rangle \tag{5.1}$$

converge pour toute fonction $g \in \mathcal{H}^1(\rho)$; mais ici on peut calculer explicitement le produit scalaire

$$\begin{aligned}\langle g \,,\, L_\rho(M_0) f \rangle &= \int_G \langle g(M) \,,\, K_\rho(MM_0M_2^{-1})\underline{a} \rangle \, dM \\ &= \int_G \langle K_\rho(M_2 M_0^{-1} M^{-1}) g(M) \,,\, \underline{a} \rangle \, dM = \langle g(M_2 M_0^{-1}) \,,\, \underline{a} \rangle\end{aligned}$$

en vertu du théorème 3 ; la convergence de (5.1) résulte donc du théorème 5 appliqué à g.

6. La formule des traces de Selberg.

Conservons les hypothèses du théorème 7, et supposons en outre l'espace $\mathcal{H}_\Gamma^\infty(\rho)$ de dimension finie - cas de G/Γ compact, ou de Γ commensurable au groupe modulaire de Siegel. Soit $\mathcal{L}_\Gamma^2(\rho)$ l'espace des fonctions (holomorphes ou non) à valeurs dans F_ρ et vérifiant les conditions suivantes :

$$f(WMM_0) = \rho(W) f(M) \qquad (W \in K \,,\, M \in G \,,\, M_0 \in \Gamma)$$

$$\int_{G/\Gamma} \| f(M) \|^2 dM < + \infty \; ;$$

alors $\mathcal{H}^\infty(\rho)$ est un sous-espace de dimension finie de $\mathcal{L}_\Gamma^2(\rho)$. Considérons maintenant dans $\mathcal{L}_\Gamma^2(\rho)$ l'opérateur intégral

$$K_\rho^\Gamma : f(M_1) \longrightarrow \int_{G/\Gamma} K_\rho^\Gamma(M_1 \,,\, M_2) f(M_2) dM_2 \quad ;$$

nous allons montrer que ce n'est autre que l'opérateur de <u>projection orthogonale de</u> $\mathcal{L}^2_\Gamma(\rho)$ <u>sur</u> $\mathcal{H}^\infty_\Gamma(\rho)$.

Tout d'abord la démonstration du théorème 1 de l'exposé 8, appliquée en prenant $\mathcal{F}_\rho = \mathcal{H}^\infty_\Gamma(\rho)$, montre que

$$\sup_{M \in G} \| K^\Gamma_\rho(M , M)\| < + \infty \quad ;$$

mais comme la symétrie hermitienne positive du noyau K^Γ_ρ implique (CAUCHY-SCHWARZ) l'inégalité

$$\| K^\Gamma_\rho(M_1 , M_2)\|^2 \leq \| K^\Gamma_\rho(M_1 , M_1)\| \| K^\Gamma_\rho(M_2 , M_2)\|$$

on obtient déjà l'inégalité

(6.1) $$\sup_{M_1 , M_2} \| K^\Gamma_\rho(M_1 , M_2)\| < + \infty \quad ;$$

comme G/Γ est de volume fini, il s'ensuit que l'opérateur K^Γ_ρ est <u>continu</u> dans $\mathcal{L}^2_\Gamma(\rho)$.

Il est d'autre part évident, puisque la fonction

$$M \longrightarrow K^\Gamma_\rho(M_1 , M)^* \underline{a} = K^\Gamma_\rho(M , M_1)\underline{a}$$

est dans $\mathcal{H}^\infty_\Gamma(\rho)$ pour $M_1 \in G$ et $\underline{a} \in F_\rho$ fixés, que l'opérateur K^Γ_ρ est nul sur le sous-espace de $\mathcal{L}^2_\Gamma(\rho)$ orthogonal à $\mathcal{H}^\infty_\Gamma(\rho)$. Comme il est d'autre part égal à 1 sur $\mathcal{H}^\infty_\Gamma(\rho)$, notre assertion est démontrée.

On déduit évidemment de là que

(6.2) $$\dim \mathcal{H}^\infty_\Gamma(\rho) = \mathrm{Tr}(K^\Gamma_\rho) ,$$

la trace figurant au second membre étant définie comme suit : on prend une base orthonormale (f_i) de $\mathcal{L}^2_\Gamma(\rho)$ et on pose

(6.3) $$\mathrm{Tr}(K^\Gamma_\rho) = \sum \langle K^\Gamma_\rho f_i , f_i \rangle \quad .$$

Montrons qu'on a en fait la relation

(6.4) $$\mathrm{Tr}(K^\Gamma_\rho) = \int_{G/\Gamma} \mathrm{Tr}(K^\Gamma_\rho(M , M))dM .$$

Pour cela prenons une base orthogonale (f_i) "adaptée" au sous-espace $\mathcal{H}^\infty_\Gamma(\rho)$: les N premiers éléments $f_1 , \ldots , f_N$ de cette base forment une base de $\mathcal{H}^\infty_\Gamma(\rho)$. Il est clair alors que

$$\mathrm{Tr}(K_\rho^\Gamma) = \sum_{i=1}^{i=N} \langle K_\rho^\Gamma f_i , f_i \rangle = \sum_{i=1}^{i=N} \langle f_i , f_i \rangle$$
$$= \int_{G/\Gamma} \sum_{i=1}^{i=N} \langle f_i(M) , f_i(M) \rangle \, dM \quad .$$

Or il est bien connu, et de plus à peu près trivial, que la fonction noyau se calcule à l'aide d'une base orthonormale $(f_i)_{1 \leq i \leq N}$ de $\mathcal{H}_\Gamma^\infty(\rho)$ à l'aide de la relation

$$K_\rho^\Gamma(M_1 , M_2)\underline{a} = \sum_{i=1}^{i=N} f_i(M_1) . \langle \underline{a} , f_i(M_2) \rangle \quad ;$$

il suit immédiatement de là que

$$\sum_{i=1}^{i=N} \langle f_i(M) , f_i(M) \rangle = \mathrm{Tr}(K_\rho^\Gamma(M , M)) \quad ,$$

ce qui établit (6.4).

En conséquence et compte tenu du théorème 7, nous avons la <u>formule des traces de Selberg</u> :

THÉORÈME 8 (G/Γ de volume fini, $\alpha_n > 2n$). - <u>Pour que</u> $\mathcal{H}_\Gamma^\infty(\rho)$ <u>soit de dimension finie il faut et il suffit que</u>

$$\sup_{M \in G} \left\| \sum_{M_0 \in \Gamma} K_\rho(M M_0 M^{-1}) \right\| < + \infty$$

<u>on a alors la relation</u>

(6.5) $$\dim \mathcal{H}_\Gamma^\infty(\rho) = \int_{G/\Gamma} \sum_{M_0 \in \Gamma} \mathrm{Tr}(K_\rho(M M_0 M^{-1}))dM \quad .$$

La nécessité de la condition énoncée est évidente vu (6.1) ; le fait qu'elle soit suffisante ne l'est pas moins, car alors K_ρ^Γ est un opérateur du type de Hilbert-Schmidt dans $\mathcal{L}_\Gamma^2(\rho)$ - cf. exposé 8, numéro 2.

En fait la véritable "formule des traces" de Selberg s'obtient en faisant subir au second membre de (6.5) un certain nombre de modifications dont les unes sont triviales, et les autres pas. Comme cette question mériterait un et peut-être plusieurs exposés, nous ne tenterons pas d'en discuter ici.

7. <u>Série de Fourier de la fonction-noyau</u>.

Dans ce numéro on supposera que $\Gamma = Sp(n , \underline{Z})$; on laisse au lecteur, à titre d'exercice, le soin d'étendre les résultats aux groupes commensurables au groupe modulaire, et de tenir compte de multiplicateurs non triviaux le cas échéant. On considère une représentation ρ pour laquelle $\alpha_n > 2n$.

On a montré (Exposé 9, Remarque 2, p. 10-11) que dans l'interprétation "demi-plan de Siegel" la fonction noyau $K_\rho^\Gamma(z_1 , z_2)$ de l'espace des Spitzenformen d'espèce ρ est donnée par la formule

$$(7.1) \qquad K_\rho^\Gamma(z_1 , z_2) = \sum_{s \gg 0} H_\rho(4s)^{-1} \exp(2\pi i Tr(sz_1)) E_s(z_2)^*$$

où figurent les séries d'Eisenstein

$$E_s(z) = \sum_{\Gamma_\infty . M} J_\rho(M , z)^{-1} \exp(2\pi i Tr(s.Mz))$$

associées aux matrices $s \gg 0$ demi-entières, et où Γ_∞ est le sous-groupe des translations entières de $\Gamma = Sp(n , \underline{Z})$. On avait aussi posé le problème de prouver directement que (7.1) est une forme modulaire par rapport à la variable z_1.

Nous pouvons maintenant, grâce au théorème 4 et à son corollaire, expliquer la formule (7.1). Partons en effet de la fonction-noyau

$$K_\rho(z_1 , z_2) = c(\rho).\rho[(z_1 - \bar{z}_2)/2i]^{-1}$$

du demi-plan de Siegel. D'après le théorème 7 (traduit dans le langage "demi-plan de Siegel") on a la formule

$$\begin{aligned} K_\rho^\Gamma(z_1 , z_2) &= \sum_{M \in \Gamma} J_\rho(M , z_1)^{-1} K_\rho(Mz_1 , z_2) \\ &= \sum_{\Gamma_\infty . M} J_\rho(M , z_1)^{-1} \sum_{M_\infty} K_\rho(M_\infty M z_1 , z_2) \end{aligned}$$

où M_∞ décrit le sous-groupe Γ_∞. Or

$$\sum_{M_\infty} K_\rho(M_\infty M z_1 , z_2) = c(\rho) \sum_{n=n'} \rho\left(\frac{Mz_1 - \bar{z}_2 + n}{2i}\right)^{-1}$$

et en appliquant le corollaire du théorème 4 il vient

$$\sum_{M_\infty} K_\rho(M_\infty M z_1 , z_2) = \sum_{s \gg 0} H_\rho(4s)^{-1} \exp(2\pi i Tr[s(Mz_1 - \bar{z}_2)])$$

on trouve donc

$$(7.2) \qquad K_\rho^\Gamma(z_1 , z_2) = \sum_{\Gamma_\infty . M} \sum_{s \gg 0} J_\rho(M , z_1)^{-1} H_\rho(4s)^{-1} \exp(2\pi i Tr[s(Mz_1 - \bar{z}_2)]) .$$

En supposant qu'on puisse permuter les deux signes $\sum$, cette formule s'écrit encore sous la forme

$$K^{\Gamma}_{\rho}(z_1 , z_2) = \sum_{s\gg 0} E_s(z_1)H_{\rho}(4s)^{-1}\exp(-2\pi i\mathrm{Tr}(s\bar{z}_2))$$

ce qui met en évidence le comportement "modulaire" du premier membre par rapport à la variable z_1.

Il reste à justifier l'inversion des $\sum$, ce que nous allons faire dans un cadre beaucoup plus général. Partons d'une fonction

$$f \in \mathcal{H}^1(\rho)$$

et formons la série

$$\begin{aligned} f^{\Gamma}(z) &= \sum_{M\in\Gamma} J_{\rho}(M , z)^{-1}f(Mz) \\ &= \sum_{\Gamma_{\infty}\cdot M} J_{\rho}(M , z)^{-1} \sum_{M_{\omega}} f(M_{\infty}Mz) \quad ; \end{aligned}$$

appliquant le théorème 4, il vient

$$f^{\Gamma}(z) = \sum_{\Gamma_{\infty}\cdot M} \sum_{s\gg 0} J_{\rho}(M , z)^{-1}\exp(2\pi i\mathrm{Tr}(s.Mz))\hat{f}(s) \quad ; \tag{7.3}$$

on obtient donc <u>formellement</u> la relation

$$f^{\Gamma}(z) = \sum_{s\gg 0} E_s(z)\hat{f}(s) \tag{7.4}$$

à condition ici encore de justifier l'inversion des $\sum$ dans (7.3) ; il suffit pour cela de prouver que la série double (7.3) converge absolument et puisqu'il s'agit de fonctions holomorphes, il suffit de prouver qu'elle converge au sens de $L^1(G/\Gamma)$. Autrement dit tout revient à prouver que

$$\sum_{\Gamma_{\infty}\cdot M} \sum_{s\gg 0} \int_{z \bmod \Gamma} \|\rho(y^{\frac{1}{2}})J_{\rho}(M , z)^{-1}\exp(2\pi i\mathrm{Tr}(s.Mz))\hat{f}(s)\| \, dz$$

est fini. Comme il s'agit d'une série à termes positifs on peut permuter les $\sum$ (même si,la série est divergente!), et les calculs utilisés pour démontrer la convergence des séries d'Einstein conduisent alors immédiatement à la série

$$\begin{aligned} &\sum_{s\gg 0} \int_{z \bmod \Gamma_{\infty}} \|\rho(y^{\frac{1}{2}})\hat{f}(s)\| \exp(-2\pi\mathrm{Tr}(sy))dz \\ &\qquad = \sum_{s\gg 0} \int_{y\gg 0} \|\rho(y^{\frac{1}{2}})\hat{f}(s)\| \exp(-2\pi\mathrm{Tr}(sy))\det(y)^{-n-1}dy \ . \end{aligned}$$

Or le changement de variable $y \to s^{-\frac{1}{2}} y s^{-\frac{1}{2}}$ montre que le terme général est égal à

$$\det(s)^{(n+1)/2} \int_{y \gg 0} \|\rho(y^{\frac{1}{2}})\rho(s^{-\frac{1}{2}})\hat{f}(s)\| \exp(-2\pi \operatorname{Tr}(y)) \det(y)^{-n-1} dy$$

et par suite que la série considérée est majorée par la série

$$\sum_{s \gg 0} \|\rho(s^{-\frac{1}{2}})\hat{f}(s)\| \det(s)^{(n+1)/2} \qquad (7.5)$$

Dans le cas de la fonction-noyau :

$$f(z) = K_\rho(z, z_2) ;$$

on a

$$\hat{f}(s) = H_\rho(4s)^{-1} \exp(-2\pi i \operatorname{Tr}(s\bar{z}_2))$$

[Exposé 6, formule (35)], et d'autre part (Exposé 6, théorème 3) $H_\rho(4s)^{-1}$ est proportionnel à

$$\det(s)^{-(n+1)/2} \rho(s^{\frac{1}{2}}) H(\rho)^{-1} \rho(s^{\frac{1}{2}}) ;$$

dans ce cas on est donc conduit à la série

$$\sum_{s \gg 0} \rho(s^{\frac{1}{2}}) \exp(-2\pi i \operatorname{Tr}(s\bar{z}_2))$$

dont la convergence est évidente ; cela justifie l'inversion des $\sum$ dans (7.2).

Dans le cas général la relation (3.5 bis) donne seulement la majoration

$$\|\rho(s^{-\frac{1}{2}})\hat{f}(s)\| \det(s)^{(n+1)/2} \leq c ;$$

la convergence de (7.5) n'est donc pas évidente. Il [illegible] de voir directement que la convergence de (7.4) revient à celle de (7.5) ; en effet, essayons d'exprimer que (7.4) converge dans l'espace $\mathcal{H}^1_{\hat{r}}(\rho)$; la démonstration du théorème 1 de l'exposé 9 (dans laquelle on fera $\omega = f(s)$) donne immédiatement la majoration

$$\int_{G/\Gamma} \|\rho(y^{\frac{1}{2}}) \hat{E}_s(z) \hat{f}(\cdot)\| dz \leq$$

$$\int_{y \gg 0} \|\rho(y^{\frac{1}{2}}) \hat{f}(s)\| \exp(-2\pi \operatorname{Tr}(sy)) \det(y)^{-n-1} dy ;$$

or il est clair que, par le changement de variable $y \to s^{-\frac{1}{2}} y s^{-\frac{1}{2}}$, on obtient pour le second membre une majoration de la forme

$$c.\|\mu(s^{-\frac{1}{2}})\hat{f}(s)\|\det(s)^{(n+1)/2}$$

ce qui ramène à nouveau à la série (7.5)!

On peut donc énoncer le résultat suivant :

THÉORÈME 9 ($\Gamma = Sp(n , \underline{Z})$, $\alpha_n > 2n$). - <u>Soit une fonction</u> $f \in \mathcal{H}^1(\rho)$ <u>telle que la série</u>

$$\sum_{\substack{s \gg 0 \\ s \text{ demi-entière}}} \|\rho(s^{-\frac{1}{2}})\hat{f}(s)\|\det(s)^{(n+1)/2}$$

<u>converge. On a alors la relation</u>

$$f^{\Gamma}(z) = \sum_{\substack{s \gg 0 \\ s \text{ demi-entière}}} E_s(z)\hat{f}(s) \qquad \underline{\text{pour}} \quad Im(z) \gg 0 \ ;$$

<u>la série du second membre converge normalement sur tout compact, et converge au sens de l'espace</u> $\mathcal{H}^1_{\Gamma}(\rho)$.

Ce résultat justifie a posteriori les considérations heuristiques de l'Exposé 9, numéro 1. "On" conjecture qu'il s'applique aux séries de Poincaré.

8. <u>Existence de séries de Poincaré non nulles</u>.

Dans ce numéro on désigne par Γ un sous-groupe discret quelconque de $Sp(n , \underline{R})$, que l'on fait opérer sur le cercle-unité généralisé

$$\zeta' = \zeta \quad , \qquad \zeta\zeta^* \ll 1 \ .$$

A chaque représentation irréductible ρ de $GL(n , \underline{C})$ correspond alors un facteur d'automorphie

$$J_{\rho}(M , \zeta) = \rho(\bar{\beta}\zeta + \bar{\alpha}) \qquad \text{pour} \quad M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \quad ,$$

et les séries de Poincaré d'espèce ρ pour Γ sont les fonctions de la forme

$$f^{\Gamma}(\zeta) = \sum_{M \in \Gamma} J_{\rho}(M , \zeta)^{-1} f(M\zeta) \tag{8.1}$$

où $f(\zeta)$ est un <u>polynôme</u> à valeurs dans l'espace E_{ρ} de ρ ; bien entendu, la convergence n'a lieu que pour $\alpha_n > 2n$, ce qu'on supposera dans ce qui suit.

A côté de ρ nous utiliserons aussi les représentations

$$\rho_m : g \rightarrow \det(g)^m \rho(g) \ ,$$

ce qui revient à remplacer le paramètre α_n de ρ par $\alpha_n + m$. Considérant la représentation

$$\sigma : g \longrightarrow \det(g) \quad ,$$

il est clair que

(8.2) $$J_{\rho_m}(M , \zeta) = J_\sigma(M , \zeta)^m J_\rho(M , \zeta) \; .$$

Ceci dit, le Théorème d'existence s'énonce comme suit :

Soient $\zeta_1 , \dots , \zeta_q$ des points donnés, deux à deux distincts modulo Γ ; soit $m(\zeta_i)$ l'ordre (fini) du stabilisateur de ζ_i dans Γ ; enfin donnons-nous un entier $p \geqslant 0$.

Alors, pour tout entier m suffisamment grand et multiple des $m(\zeta_i)$, il existe une série de Poincaré d'espèce ρ_m pour Γ, ayant aux points ζ_i des parties principales données d'ordre p, pourvu bien entendu que les parties principales "données" satisfassent aux conditions d'invariance évidentes.

Ce résultat est un cas particulier du théorème 3 de l'Exposé 10 bis ; nous ne le démontrerons donc pas ici.

Notons simplement que la théorème précédent est en réalité un théorème d'existence pour les Spitzenformen, en vertu du théorème 5 bis du présent exposé.

Appendice.

On se propose de montrer que le corollaire au théorème est vrai pour $\alpha_n > n$, et pas seulement pour $\alpha_n > 2n$.

Posons pour cela

$$f_y(x) = \rho(x + iy)^{-1}$$

où x est une matrice réelle symétrique variable et y une matrice $\gg 0$ fixe ; tout revient à appliquer la formule de Poisson à f_y, donc à établir les assertions que voici :

a. la fonction f_y est intégrable sur l'espace des $x = x'$;

b. la série $\sum f_y(x + n)$ converge uniformément sur tout compact en x ;

c. la série $\sum \hat{f}_y(s)$ converge absolument ;

d. la fonction $\hat{f}_y(s)$ a la valeur indiquée par la formule à établir.

Nous établirons l'assertion a. plus loin.

Supposant établie l'assertion a., prouvons b. . Si l'on effectue dans l'intégrale

$$\int_{x = x'} \rho(x + iy)^{-1} dx$$

la changement de variable $x \longrightarrow y^{\frac{1}{2}} x y^{\frac{1}{2}}$ il est clair qu'on trouve une majoration de la forme

$$\int || f_y(x) || dx \leqslant c. || \rho(y)^{-\frac{1}{2}} ||^2$$

où c est une constante indépendante de y ; donc a. implique que la fonction $\rho(z)^{-1}$ est intégrable dans toute partie du demi-plan de Siegel qui est le produit de l'espace des x par une partie compacte de l'espace des $y \gg 0$; par suite la série $\sum \rho(z + n)^{-1}$ converge dans l'espace L^1 de toute partie compacte du demi-plan ; mais comme elle est formée de fonctions holomorphes de z, ceci implique l'assertion b. .

L'assertion c. résultera trivialement de l'assertion d., laquelle donne une majoration exponentielle pour $\hat{f}_y(s)$.

Pour établir l'assertion d. on remarque d'abord que d'après l'assertion a. la fonction $\hat{f}_y(s)$ est continue par rapport à s ; en effectuant dans la formule

$$\hat{f}_y(s) = \int \rho(x + iy)^{-1} \exp(-2\pi i \operatorname{Tr}(sx)) dx$$

le changement de variable $x \longrightarrow y^{\frac{1}{2}} x y^{\frac{1}{2}}$ on voit même qu'en fait $\hat{f}_y(s)$ est fonction continue du couple s , y . Mais on sait déjà (Exposé 6, n° 8, p. 20) que pour presque tout y la transformée de Fourier de $x \longrightarrow \rho(x + iy)^{-1}$, au sens L^2 , est égale à 0 pour presque toute matrice s non $\gg 0$, et à

$$c(\rho)^{-1} \rho(2i) H_\rho(4s)^{-1} \exp(-2\pi \operatorname{Tr}(sy))$$

pour presque toute $s \gg 0$. Comme deux fonctions continues qui coïncident presque partout sont identiques, l'assertion d. s'ensuit.

Tout revient donc à établir l'assertion a., et comme on l'a vu on peut pour ce faire supposer $y = 1$. Or il est clair, vu la relation

$$|| u^* u || = || u ||^2$$

valable pour tout endomorphisme continu u d'un espace de Hilbert, que l'on a

$$|| \rho(x + i)^{-1} || = || \rho(x^2 + 1)^{-1} ||^{1/2} = || \rho(x^2 + 1)^{-1/2} ||$$

– on suppose bien entendu choisi un produit scalaire adapté à ρ . Dans ces conditions tout revient à établir la

THÉORÈME 10. - Soit ρ une représentation irréductible de $GL_+(n, \underline{R})$; alors l'intégrale

$$\int_{x=x'} \rho(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} dx$$

converge pour $\alpha_n > n$.

Pour démontrer le théorème 10, nous allons nous ramener au cas où ρ est de dimension 1 ; on a en effet

$$\rho(g) = \det(g)^{\alpha_n} . \pi(g)$$

où π est une représentation polynomiale ; or supposons que g soit une matrice symétrique $\gg 0$; alors l'opérateur $\pi(g)$ est aussi hermitien $\gg 0$, donc semi-simple, et l'on sait (en immergeant g dans un sous-groupe abélien maximal de l'ensemble des éléments symétriques positifs de $G = GL_+(n, \underline{R})$, et en réduisant l'image de ce sous-groupe par π à la forme diagonale) que les valeurs propres de $\pi(g)$ sont des monômes en les valeurs propres de g, monômes à exposants nécessairement positifs puisque π est polynomiale. Il s'ensuit que la relation

$$g \gg 1 \quad \text{implique} \quad \pi(g) \gg 1 .$$

Par suite

$$\rho(x^2+1)^{-1} \ll \det(x^2+1)^{-\alpha_n}$$

ce qui nous ramène, comme annoncé, au cas d'une représentation de dimension un.

Pour établir que l'intégrale

$$\int \det(x^2+1)^{-s/2} dx$$

converge pour $s > n$, nous utiliserons la formule d'intégration (A 27) de l'Exposé 5 (à vrai dire l'espace des $x = x'$ réelles est beaucoup plus grand que l'espace des $x = x' \gg 0$, mais ce point importe peu comme on va le voir). De façon précise :

LEMME. - Soient X l'espace vectoriel des matrices $x = x'$ réelles, H l'ensemble des matrices $h \in X$ diagonales, et K le groupe orthogonal. Pour toute fonction $f(x)$ continue et positive sur X on a la relation

$$\int_X f(x)dx = c \iint_{K \times H} f(khk^{-1}) \prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j| dk dh$$

<u>où</u> c <u>est une constante, où</u> $h = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ <u>et où</u> dk (resp. dh) <u>est la mesure invariante (resp. euclidienne) de</u> K (<u>resp.</u> H).

Pour cela désignons par X_0 l'ensemble ouvert des $x \in X$ inversibles ; évidemment $X - X_0$ est de mesure nulle de sorte qu'il suffit d'intégrer sur X_0. L'application

$$(k, h) \rightarrow x = khk^{-1}$$

de $K \times H_0$ dans X_0 est bien connue pour être <u>surjective</u>, et fait même de $K \times H_0$ un revêtement de X_0 à un nombre fini (facile à calculer ([6])) de feuillets. Nous allons calculer le jacobien de cette application ; il est évident a priori, la mesure dx étant invariante par K, qu'il ne dépend que de h. Pour cela on différentie la relation $kh = xk$, ce qui donne trivialement

$$(*) \qquad k^{-1}.\delta x.k = \delta_\ell k.h - h.\delta_\ell k + \delta h \quad ,$$

où l'on a posé

$$\delta_\ell k = k^{-1}.\delta k \quad .$$

Posons, en écrivant des matrices,

$$\delta_\ell k = (\omega_{ij}) \quad ;$$

les ω_{ij} sont des formes différentielles de degré 1 invariantes à gauche sur K, vérifiant $\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$ puisque $k'k = 1$; et la mesure de Haar de K est définie par la forme (produit extérieur)

$$\omega = \prod_{i<j} \omega_{ij} \quad .$$

D'autre part la relation (*) donne immédiatement

$$(k^{-1}.\delta x.k)_{ij} = \begin{cases} (\lambda_j - \lambda_i)\omega_{ij} & \text{si } i \neq j \\ \delta\lambda_i & \text{si } i = j \end{cases} ;$$

comme $\delta x \rightarrow k^{-1}.\delta x.k$ induit sur les coefficients de δx une substitution linéaire de déterminant 1, on voit que le jacobien cherché est

$$\prod_{i<j}(\lambda_j - \lambda_i) \quad ,$$

([6]) Signalons à ce sujet une erreur triviale dans l'Exposé 5, p. 21 : il n'est évidemment pas vrai que tout $g \in G$ s'écrive <u>d'une seule</u> façon sous la forme $g = k_1 h k_2$; il faut tenir compte du "petit groupe de Weyl", i.e. du normalisateur de H dans K.

d'où le lemme.

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le théorème 10. Tout revient à examiner l'intégrale

$$\int \det(h^2 + 1)^{-s/2} \prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j| \, dh \quad ,$$

laquelle est majorée par

$$\int \det(h^2 + 1)^{-s/2} \prod_{i<j} (|\lambda_i| + |\lambda_j|) dh$$

comme dans l'intégrale qu'on vient d'écrire ne figurent que les $|\lambda_i|$ on est ramené à examiner

$$\int_{\lambda_i > 0} \prod(\lambda_i^2 + 1)^{-s/2} \prod_{i<j} (\lambda_i + \lambda_j) \, dh \; ;$$

or il est clair que $\prod(\lambda_i + \lambda_j)$ est une somme de monômes

$$\lambda_1^{m_1} \cdots \lambda_n^{m_n} \qquad \text{avec} \quad m_i \leq n - 1 \; , \; \sum m_i = n(n-1)/2 \quad ;$$

d'autre part l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} (t^2 + 1)^{-s/2} t^m dt$$

converge dès que $s > m + 1$; comme tous les exposants m_i qui interviennent sont $\leq n - 1$ il est clair que le théorème est démontré.