Henri Cartan

**Théorie des fibrés principaux**

*Séminaire Henri Cartan*, tome 9 (1956-1957), exp. nº 4, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1956-1957__9__A4_1>

Exposé n° 4

# THÉORIE DES FIBRÉS PRINCIPAUX,

par Henri CARTAN

---

N.B. - Ce qui suit est la rédaction d'un exposé qui n'a pas plus eu lieu que l'exposé n° 3.

## 1. Relèvements dans les fibrés.

DÉFINITION. - Soit $p : X \to B$ un fibré au sens de Kan (cf. Exp. 1, p. 1-08 ; désormais nous dirons simplement "fibré"). Une application $\rho : B \to X$ s'appelle un relèvement si elle satisfait aux conditions suivantes

(1) $\quad p\rho = \text{identité}, \quad s_i\rho = \rho s_i, \quad d_{i+1}\rho = \rho d_{i+1} \quad \text{pour} \quad i \geq 0$

( on ne suppose donc pas que $d_o\rho = \rho d_o$).

PROPOSITION 1. - Si $p : X \to B$ est fibré, et si $B$ est connexe, il existe des relèvements. D'une façon précise, soit $B'$ un sous-ensemble simplicial de $B$, et soit donné un relèvement $\rho' : B' \to p^{-1}(B')$ ; alors il existe un relèvement $\rho : B \to X$ qui prolonge $\rho'$.

La première partie de cet énoncé avait été affirmée sans démonstration, dans un cas particulier, au bas de la page 10 de l'Exposé 1 ; nous allons ici faire une démonstration complète.

Tout d'abord, l'application $p$ est surjective sur les éléments de dimension 0 (on suppose, bien entendu, que $X$ n'est pas vide) : cela résulte de la condition de Kan (Exposé 1, p. 1-08) appliquée aux éléments de dimension $n = 1$. Cela étant on va prouver par récurrence sur $n$, l'assertion suivante :

$(R_n)$ Il existe, pour chaque dimension $q \leq n$, une application $\rho : B_q \to X_q$ qui prolonge $\rho'$, et satisfait à

$$(2)\qquad \begin{cases} p\,\rho\, b = b \quad \text{pour} \quad b \in B_q\,,\quad q \leq n\,, \\ \rho\, d_i\, b = d_i\, \rho\, b \quad \text{pour} \quad i \geq 1\,,\quad b \in B_q\,,\quad 1 \leq q \leq n \\ \rho\, s_i\, b = s_i\, \rho\, b \quad \text{pour} \quad i \geq 0\,,\quad b \in B_q\,,\quad q < n\,. \end{cases}$$

L'assertion $(R_0)$ est vraie, puisque $p : X_0 \longrightarrow B_0$ est surjective. Supposons qu'on ait prouvé $(R_n)$, et démontrons $(R_{n+1})$. Il s'agit de définir $\rho b$ pour $b \in B_{n+1}$. Si $b \in B'_{n+1}$, on pose $\rho b = \rho' b$. Supposons désormais que $b \notin B'_{n+1}$ ; on va distinguer deux cas, suivant que $b$ est dégénéré ou ne l'est pas.

PREMIER CAS. - $b \in B_{n+1}$ est dégénéré. On a donc $b = s_i\, y$, avec $y \in B_n$. Si l'on veut satisfaire à la dernière condition (2), il faut poser $\rho b = s_i\, \rho\, y$. Ceci définira bien $\rho b$, si l'on prouve que <u>la relation</u> $s_i\, y = s_j\, z$ $(y\,,\ z \in B_n)$ <u>entraîne</u> $s_i\, \rho\, y = s_j\, \rho\, z$. Montrons-le : si $i = j$, on trouve (en appliquant $d_i$ à la relation $s_i\, y = s_i\, z$) que $y = z$, d'où $s_i\, \rho\, y = s_i\, \rho\, z$. Supposons donc $i < j$ ; de $s_i\, y = s_j\, z$ on déduit

$$z = d_{j+1}\, s_i\, y = s_i\, d_j\, y\,,$$

d'où

$$s_i\, y = s_j\, z = s_j\, s_i\, d_j\, y = s_i\, s_{j-1}\, d_j\, y\,.$$

Appliquons $d_i$ aux deux membres de la relation $s_i\, y = s_i\, s_{j-1}\, d_j\, y$ ; il vient

$$(3)\qquad y = s_{j-1}\, d_j\, y\,.$$

Alors $s_j\, \rho\, z = s_j\, \rho\, s_i\, d_j\, y = s_j\, s_i\, \rho\, d_j\, y = s_i\, s_{j-1}\, \rho\, d_j\, y = s_i\, \rho\, s_{j-1}\, d_j\, y$, et ceci, compte tenu de (3), est égal à $s_i\, \rho\, y$.

C.Q.F.D.

DEUXIÈME CAS. - $b \in B_{n+1}$ n'est pas dégénéré. Alors, d'après la condition de Kan, il existe un $x \in X_{n+1}$ satisfaisant à

$$(4)\qquad px = b\,,\quad d_i\, x = \rho\, d_i\, b \quad \text{pour} \quad i \geq 1\,.$$

En effet, il suffit de vérifier que ces données sont consistantes, c'est-à-dire que

$$p\, \rho\, d_i\, b = d_i\, b\,,$$
$$d_i(\rho\, d_j\, b) = d_{j-1}(\rho\, d_i\, b) \quad \text{pour} \quad 1 \leq i < j\,.$$

Or cela résulte aussitôt des relations (2).

Choisissons un $x$ satisfaisant à (4) ; on posera $\rho b = x$.

$\rho$ étant ainsi défini sur les éléments $b \in B_{n+1}$, il reste à vérifier que les relations (2) (où $n$ serait remplacé par $n + 1$) sont remplies. Si $b \in B'$, elles le sont puisque $\rho'$ est un relèvement. Supposons donc que $b \notin B'$ ; si $b = s_i y$ $(y \in B_n)$ , on a

$$p \rho b = p s_i \rho y = s_i p \rho y = s_i y = b ;$$

si $b$ n'est pas dégénéré, la relation $p \rho b = b$ est vraie par construction. Soit à vérifier maintenant que $\rho d_i b = d_i \rho b$ pour $b \in B_{n+1}$ , $i \geqslant 1$ ; si $b = s_j z$ , on a bien $\rho d_i s_j z = d_i s_j \rho z$ (distinguer 3 cas, suivant que $i < j$ , $i = j$ ou $j + 1$ , $i > j + 1$) ; enfin, si $b$ n'est pas dégénéré, la relation $\rho d_i b = d_i \rho b$ est vraie par construction (pour $i \geqslant 1$). Enfin on a bien $\rho s_i b = s_i \rho b$ pour $i \geqslant 0$ , $b \in B_n$ , par construction.

## 2. Morphismes de fibrés principaux.

Pour la définition d'un fibré principal de groupe $G$ , voir exposé 1 (pages 1-09 et 1-10) ; voir aussi la proposition 2 de l'Exposé 1, p. 1-10, qui affirme qu'un tel "fibré" est fibré au sens de Kan.

Soient donnés deux fibrés principaux $X$ et $X'$ de même groupe $G$ ; appelons morphisme de $X$ dans $X'$ toute application simpliciale $f : X \longrightarrow X'$ qui commute aux opérations de $G$ ; alors $f$ induit une application simpliciale $g : B \longrightarrow B'$ des bases $B = X/G$ et $B' = X'/G$ .

Fibré induit. - Soit $X'$ un fibré principal de groupe $G$ , de base $B'$ ; notons $p'$ la projection $X' \longrightarrow B'$ . Soit donnée une application simpliciale $g : B \longrightarrow B'$. Une telle $g$ définit un fibré induit (ou image réciproque) $X$ de base $B$ , de groupe $G$ : les n-simplexes de $X$ sont les couples $(b , x')$ , où $b \in B_n$ et $x' \in X'_n$ sont tels que $g(b) = p'(x')$ ; les opérateurs de face et de dégénérescence dans $X$ sont définis par $d_i(b , x') = (d_i b , d_i x')$ , $s_i(b , x') = (s_i b , s_i x')$. Les opérations de $G$ dans $X$ sont définies par

$$g.(b , x') = (b , gx') \quad \text{pour} \quad g \in G_n \quad b \in B_n , \quad x' \in X'_n .$$

Il est clair que $B$ s'identifie à $X/G$ . L'application $(b , x') \longrightarrow x'$ définit un morphisme $f : X \longrightarrow X'$ , qui par passage aux quotients redonne l'application $g : B \longrightarrow B'$ .

PROPOSITION 2. - Soit $f : X \longrightarrow X'$ un morphisme de fibrés principaux de groupe $G$ , de bases $B$ et $B'$ ; soit $g : B \longrightarrow B'$ l'application induite par $f$ . Soit $Y$ le fibré induit par l'application $g$ ($Y$ est donc un fibré principal de base $B$). Alors l'application $f$ se factorise d'une seule manière en $X \xrightarrow{\varphi} Y \longrightarrow X'$ , où $\varphi$ est un morphisme ; de plus, $\varphi$ est un isomorphisme.

La première assertion est évidente : $\varphi$ applique nécessairement $x$ dans le couple $(p(x), f(x))$. Pour prouver que $\varphi$ ainsi définie est un isomorphisme, on définit un morphisme, $\psi : Y \longrightarrow X$ comme suit : pour chaque couple $(b, x') \in Y$, il existe un unique élément $x \in X$ tel que $p(x) = b$, $g(x) = x'$ (car il existe un $x_1$ tel que $p(x_1) = b$ ; alors $p'g(x_1) = p'(x')$, donc il existe un unique $s \in G$ tel que $sg(x_1) = x'$, c'est-à-dire $g(sx_1) = x'$ ; on a donc nécessairement $x = sx_1$). Par définition, $\psi$ transforme $(b, x')$ dans cet élément $x$. Il est immédiat que $\psi$ est un morphisme, et que les composés $\varphi \circ \psi$ et $\psi \circ \varphi$ sont les applications identiques. Ceci achève la démonstration.

Soient maintenant $X$ et $X'$ deux fibrés principaux de groupe $G$, de bases $B$ et $B'$. Notons $X \times_G X'$ le quotient de $X \times X'$ par le groupe $G$ opérant comme suit : $s(x, x') = (sx, sx')$, $s \in G$. Définissons une application simpliciale de $X \times_G X'$ sur $B \times B'$, en envoyant la classe d'équivalence de $(x, x')$ dans $(p(x), p'(x'))$.

PROPOSITION 3. - <u>L'application</u> $X \times_G X' \longrightarrow B \times B'$ <u>est fibrée au sens de Kan.</u>

DÉMONSTRATION. - Soient donnés $b \in B_n$ et $b' \in B'_n$, et soit $k$ un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$. Soient donnés, pour chaque entier $i$ tel que $0 \leqslant i \leqslant n$ et $i \neq k$, des éléments $x_i \in X_{n-1}$ et $x'_i \in X'_{n-1}$ tels que

(5) $$p\, x_i = d_i\, b\,, \quad p\, x'_i = d_i\, b'\,,$$

et

(6) $$d_i(x_j, x'_j) = d_{j-1}(x_i, x'_i) \quad \text{pour } i < j \quad (i \neq k\,,\ j \neq k)\,,$$

où $(x_j, x'_j)$ et $(x_i, x'_i)$ désignent des <u>classes d'équivalence</u> dans $X \times_G X'$ ; autrement dit, (6) équivaut à l'existence d'un élément $t_{ij} \in G_{n-2}$ tel que

(6') $$d_i\, x_j = t_{ij}(d_{j-1}\, x_i)\,, \quad d_i\, x'_j = t_{ij}(d_{j-1}\, x'_i)\,.$$

Pour prouver la condition de Kan, on doit trouver $x \in X_n$ et $x' \in X'_n$ tels que

(7) $$px = b\,, \quad p'x' = b'\,, \quad d_i(x, x') = (x_i, x'_i) \quad \text{pour } i \neq k\,.$$

Choisissons $y \in X_n$ et $y' \in X'_n$ tels que $py = b$, $py' = b'$. Puisque $p\, d_i\, y = p\, x_i$, il existe un $u_i \in G_{n-1}$ tel que $d_i\, y = u_i\, x_i$ ; et de même un $u'_i \in G_{n-1}$ tel que $d_i\, y' = u'_i\, x'_i$.

Ecrivons que, pour $i < j$ $(i \neq k\,,\ j \neq k)$, on a

$$d_i(d_j\, y) = d_{j-1}(d_i\, y)\,, \quad d_i(d_j\, y') = d_{j-1}(d_i\, y')\,.$$

Il vient

$$(d_i\, u_j)(d_i\, x_j) = (d_{j-1}\, u_i)(d_{j-1}\, x_i)\ ,\quad (d_i\, u'_j)(d_i\, x'_j) = (d_{j-1}\, u'_i)(d_{j-1}\, x'_i)$$

d'où, compte tenu de (6') ,

$$(d_i\, u_j)t_{ij} = d_{j-1}\, u_i\ ,\quad (d_i\, u'_j)t_{ij} = d_{j-1}\, u'_i\ ,$$

et par suite

$$d_i(u_j\, u'^{-1}_j) = d_{j-1}(u_i\, u'^{-1}_i)\ .$$

Puisqu'un groupe simplicial $G$ est un complexe de Kan, il s'ensuit l'existence d'un $w \in G_n$ tel que

$$(d_i\, w)u'_i = u_i \quad \text{pour tout} \quad i \neq k\ .$$

Posons alors $x = y$ , $x' = wy'$ . On a

$$d_i\, x = u_i\, x_i\ ,\quad d_i\, x' = u_i\, x'_i \quad \text{pour tout} \quad i \neq k\ ,$$

ce qui entraîne que $d_i(x\ ,\ x') = (x_i\ ,\ x'_i)$ . Ainsi $x$ et $x'$ satisfont aux relations (7), et la proposition est démontrée.

Soient à nouveau deux fibrés principaux $X$ et $X'$ de même groupe $G$ , de bases $B$ et $B'$ . Soit donnée une application simpliciale $g : B \longrightarrow B'$ , et cherchons s'il existe un morphisme $f : X \longrightarrow X'$ compatible avec $G$ . Désignons par $\gamma : B \longrightarrow B \times B'$ l'application simpliciale définie par

$$\gamma(b) = (b\ ,\ g(b))\ .$$

PROPOSITION 4. - <u>Les morphismes $f : X \longrightarrow X'$ compatibles avec $g$ (s'il en existe) sont en correspondance biunivoque avec les applications simpliciales $\varphi : B \longrightarrow X \times_G X'$ qui "relèvent" $\gamma$ , c'est-à-dire telles que le composé de $\varphi$ et de la projection $\pi : X \times_G X' \longrightarrow B \times B'$ soit égal à $\gamma$ .</u>

On va expliciter cette correspondance. Soit $f$ une application simpliciale $X \longrightarrow X'$ compatible avec $g$ ; l'application $x \longrightarrow (x\ ,\ f(x))$ induit, par passage aux quotients par $G$ , une application simpliciale $\varphi : B \longrightarrow X \times_G X'$ qui, suivie de $\pi$ , donne $b \longrightarrow (b\ ,\ g(b))$ , c'est-à-dire que $\varphi$ relève $\gamma$ . Réciproquement, soit $\varphi : B \longrightarrow X \times_G X'$ une application simpliciale qui relève $\gamma$ ; si $x \in X$ , l'élément $\varphi px \in X \times_G X'$ est dans la classe d'un unique élément de $X \times X'$ de la forme $(x\ ,\ x')$ ; l'application $x \longrightarrow x'$ est un morphisme $X \longrightarrow X'$ compatible avec $g$ . On vérifie aussitôt que les deux correspondances qu'on vient de définir sont réciproques l'une de l'autre, ce qui achève la démonstration.

THÉORÈME 1. - $\Delta_1$ désignant l'ensemble $\{0, 1\}$ pourvu de sa structure d'ensemble simplicial (cf. Exposés 1 et 3), tout fibré principal de groupe $G$, de base $\Delta_1 \times B$, est isomorphe à un fibré principal dé la forme $\Delta_1 \times X$ (où $X$ est fibré principal de groupe $G$ et de base $B$, le groupe $G$ opérant trivialement dans $\Delta_1$).

DÉMONSTRATION. - L'application $\delta_0 : \Delta_0 \longrightarrow \Delta_1$ (cf. Exposé 3, p. 3-01) identifie $B$ à un sous-ensemble simplicial de $\Delta_1 \times B$. Soit $Y$ un fibré principal de groupe $G$, de base $\Delta_1 \times B$ ; soit $X$ le fibré induit au-dessus de $B$. On va définir un isomorphisme de $\Delta_1 \times X$ sur $Y$, ce qui établira le théorème. D'après la proposition 2, il suffit de définir un morphisme $\Delta_1 \times X \longrightarrow Y$ qui induise sur la base commune $\Delta_1 \times B$ l'application identique.

Soit $Z = (\Delta_1 \times X) \times_G Y = \Delta_1 \times (X \times_G Y)$, de base $\Delta_1 \times B \times \Delta_1 \times B$ ; soit $\gamma : \Delta_1 \times B \longrightarrow \Delta_1 \times B \times \Delta_1 \times B$ l'application diagonale. D'après la proposition 4, il suffit de chercher une application simpliciale

$$\varphi : \Delta_1 \times B \longrightarrow Z$$

qui relève l'application diagonale $\gamma$, et induise sur $B$ un relèvement donné de l'application diagonale $B \longrightarrow B \times B$ (à savoir le relèvement qui correspond à l'injection du fibré $X$ dans le fibré $Y$). Le relèvement cherché est ainsi assujetti à deux conditions ; or le théorème 1 de l'exposé 3 (page 5) affirme l'existence d'un tel relèvement : voir notamment les explications données au début de la démonstration du théorème 1 de l'exposé 3, et les appliquer ici dans le cas où $n = 1$.

Ainsi le théorème 1 est établi.

COROLLAIRE. - Soit $X'$ un fibré principal de groupe $G$, de base $B'$ ; si deux applications simpliciales $B \longrightarrow B'$ sont homotopes (au sens simplicial, bien entendu), les fibrés induits au-dessus de $B$ sont isomorphes (comme fibrés principaux de groupe $G$).

## 3. Fonctions tordantes.

Soit $X$ un fibré principal de groupe $G$, de base $B$. Tout relèvement $\rho : B \longrightarrow X$ (et on sait qu'il en existe ; cf. proposition 1) définit un isomorphisme de $X$ sur un "produit tordu" $G \times_{\tau} B$ (cf. Exposé 1, p. 1-11). La "fonction tordante" $\tau$, qui envoie $B_{n+1}$ dans $G_n$, est définie en fonction de $\rho$ par la formule

(8) $$d_o \rho\, b = (\tau\, b)(\rho\, d_o\, b) \quad \text{pour tout} \quad b \in B \,.$$

Elle satisfait aux relations (cf. Exposé 1, p. 1-11)

(9) $$\begin{cases} \tau s_o\, b = 1_n \quad \text{pour} \quad b \in B_n \quad (1_n \text{ désigne l'élément neutre de } G_n), \\ s_i \tau = \tau s_{i+1} \quad \text{pour} \quad i \geqslant 0 \,, \\ d_i \tau = \tau d_{i+1} \quad \text{pour} \quad i \geqslant 1 \,, \\ d_o \tau\, b = (\tau\, d_1\, b)(\tau\, d_o\, b)^{-1} \,. \end{cases}$$

Réciproquement, toute "fonction tordante" $\tau$ (satisfaisant aux relations (9)) définit un produit tordu $G \times_\tau B$, dans lequel l'opérateur de face $d_o$ est donné par la formule

(10) $$d_o(s\,,\, b) = ((d_o\, s)(\tau\, b)\,,\, d_o\, b) \quad \text{pour} \quad s \in G\,, \quad b \in B \,.$$

Et puisque le produit tordu $G \times_\tau B$ est, au point de vue ensembliste, un produit $G \times B$, tout produit tordu possède un relèvement canonique, à savoir celui qui envoie $b \in B_n$ dans $(1_n\,,\, b)$.

Tout morphisme $f : X \longrightarrow X'$ (où $X$ et $X'$ sont fibrés principaux de même groupe $G$, de bases $B$ et $B'$) et tout relèvement $\rho' : B' \longrightarrow X'$ définissent un unique relèvement $\rho : B \longrightarrow X$ tel que $f$ soit compatible avec $\rho$ et $\rho'$ (i.e : $\rho' g = f \rho$, $g$ désignant l'application $B \longrightarrow B'$ induite par $f$) ; les fonctions tordantes $\tau$ et $\tau'$ correspondantes sont liées par la relation

(11) $$\tau = \tau' g \,.$$

## 4. Le fibré universel et le classifiant d'un groupe $G$.

Rappelons que la construction $W$ d'Eilenberg-MacLane associe fonctoriellement à un groupe simplicial $G$ un fibré principal $W(G)$, de base $\overline{W}(G)$, qui s'écrit canoniquement comme un produit tordu $G \times_\tau \overline{W}(G)$, avec une fonction tordante $\tau = \tau_W(G)$ (Voir Séminaire CARTAN, t. 7, 1954/55, Exposés 12 et 13). Rappelons les faits suivants : $W(G)$ est un fibré principal $X$, de base $B = \overline{W}(G)$, muni d'un relèvement $\rho : B \longrightarrow X$, et satisfaisant aux deux conditions suivantes :

(i) $B_o$ <u>possède un seul élément</u> $b_o$ ;

(ii) <u>pour tout entier</u> $n \geqslant 0$, <u>l'application</u> $d_o \rho : B_{n+1} \longrightarrow X_n$ <u>est une bijection</u>.

Ces deux conditions <u>déterminent entièrement</u> $W(G)$ (comme fibré principal muni d'un relèvement), au moins à un <u>isomorphisme près</u>. (Voir ci-dessous la remarque qui suit le théorème 2 bis). En fait, on explicite $W(G)$ comme suit : au point de vue ensembliste,

$$W_n(G) = G_n \times G_{n-1} \times \dots \times G_o = G_n \times \overline{W}_n(G) ,$$

avec

$$\overline{W}_n(G) = G_{n-1} \times \dots \times G_o \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1 , \quad \overline{W}_o(G) = \{b_o\} .$$

$\rho : \overline{W}_n(G) \longrightarrow W_n(G)$ est l'application $b \longrightarrow (1_n , b)$. On notera $p$ la projection de $W_n(G) = G_n \times \overline{W}_n(G)$ sur son second facteur $\overline{W}_n(G)$. Pour éviter des confusions, notons $\lambda$ la bijection $\overline{W}_{n+1}(G) \longrightarrow W_n(G)$. Alors $\tau$ est l'application composée de $\lambda : \overline{W}_{n+1}(G) \longrightarrow W_n(G)$ et de la projection de $W_n(G) = G_n \times \overline{W}_n(G)$ sur son premier facteur $G_n$. Si on connaît déjà les opérateurs $d_i$ et $s_i$ sur $\overline{W}_n(G)$, on en déduit $d_i$ et $s_i$ sur $W_n(G)$ en posant, pour $x \in G_n$, $y \in \overline{W}_n(G)$ :

$$\begin{cases} d_o(x , y) = ((d_o\, x)(\tau\, y) , d_o\, y) \\ d_{i+1}(x , y) = (d_{i+1}\, x , d_{i+1}\, y) \\ s_i(x , y) = (s_i\, x , s_i\, y) . \end{cases}$$

Une fois connus les $d_i$ et les $s_i$ sur $W_n(G)$, on les définit sur $\overline{W}_{n+1}(G)$ par les formules

$$(12) \qquad \begin{cases} d_o = p\,\lambda & (n \geqslant 2) \\ \lambda\, d_{i+1} = d_i\,\lambda & (n \geqslant 2) \\ \lambda\, s_o = \rho & (n \geqslant 0) \\ \lambda\, s_{i+1} = s_i\,\lambda & (n \geqslant 1) . \end{cases}$$

Ainsi les $d_i$ et les $s_i$ (sur $W_n(G)$ et sur $\overline{W}_n(G)$) sont déterminés par récurrence sur $n$, à partir de ceux de $W_o(G) = G_o$. Il est utile de remarquer si $G$ est le produit $G_1 \times G_2$ de deux groupes simpliciaux, on a un isomorphisme canonique $W(G_1 \times G_2) \approx W(G_1) \times W(G_2)$.

Nous allons prouver le résultat fondamental que voici :

THÉORÈME 2. - <u>Soit</u> $X$ <u>un fibré principal de groupe</u> $G$, <u>de base</u> $B$, <u>muni d'un relèvement</u> $\rho : B \longrightarrow X$. <u>Il existe un morphisme et un seul</u> $X \longrightarrow W(G)$, <u>compatible avec le relèvement</u> $\rho$ <u>et avec le relèvement canonique de</u> $W(G)$.

On va même montrer un résultat plus général. Introduisons la catégorie $\mathcal{C}$ suivante : un objet $(X , B , p, \rho , G)$ est défini par la donnée de deux ensembles simpliciaux $X$ et $B$, d'un groupe simplicial $G$ qui opère à gauche dans $X$ (i.e : on a une application simpliciale $G \times X \longrightarrow X$ qui satisfait aux axiomes habituels pour les opérations d'un groupe); $p$ est une application simpliciale $X \longrightarrow B$ qui satisfait à

$$p(s.x) = p(x) \quad \text{pour} \quad s \in G \,, \quad x \in X \,;$$

$\rho$ est une application $B \longrightarrow X$ (qui conserve les dimensions) telle que $p\,\rho$ soit l'identité, et $\rho$ commute avec les $d_i$ $(i \geqslant 1)$ et les $s_i$ $(i \geqslant 0)$. Dans la catégorie $\mathcal{C}'$, un morphisme $(X, B, p, \rho, G) \longrightarrow (X', B', p', \rho', G')$ est un système $(f, g, h)$ de trois applications simpliciales $f : X \longrightarrow X'$, $h : B \longrightarrow B'$, $g : G \longrightarrow G'$, telles que $g$ soit un homomorphisme de groupes simpliciaux, et que

$$f(s.x) = (gs).(fx) \,, \quad p'f = hp \,, \quad f\rho = \rho' h \,.$$

La composition des morphismes est définie par la composition des applications $f$, $g$, $h$.

Observons que la catégorie des fibrés principaux avec relèvement s'identifie à une sous-catégorie de $\mathcal{C}$ : celle formée des objets tels que la relation $p(x) = p(y)$ entraîne l'existence d'un unique $s \in G$ tel que $y = s.x$. On va considérer une autre sous-catégorie : celle des objets <u>spéciaux</u> ; on dira qu'un objet $(X, B, p, \rho, G)$ est spécial s'il satisfait aux conditions (i) et (ii) énoncées ci-dessus pour $W(G)$.

Soit $(X, B, p, \rho, G)$ un objet spécial ; notons $S$ la bijection $X_n \longrightarrow B_{n+1}$, réciproque de $d_o\rho$. Des relations

$$S\,d_i = d_{i+1}\,S \,, \quad S\,s_i = s_{i+1}\,S \,, \quad d_o\,S = p \,, \quad S\,\rho = s_o \qquad \text{(cf.(12))} \,,$$

on déduit que $S$ est un <u>opérateur d'homotopie</u> dans $X$, dont l'homologie est donc triviale (dans ceci le groupe $G$ ne joue d'ailleurs aucun rôle).

Cela dit, le théorème 2 ci-dessus est évidemment un cas particulier du suivant :

THÉORÈME 2 bis. - <u>Soient donnés un fibré principal avec relèvement</u> $(X, B, p, \rho, G)$, <u>et un objet spécial</u> $(X', B', p', \rho', G')$. <u>Soit de plus donné un homomorphisme</u> $g : G \longrightarrow G'$ <u>de groupes simpliciaux. Alors il existe un morphisme</u> $(f, g, h)$ <u>de</u> $(X, B, p, \rho, G)$ <u>dans</u> $(X', B', p', \rho', G')$ <u>compatible avec</u> $g$, <u>et un tel morphisme est unique</u>.

DÉMONSTRATION. - On notera $d_i$ et $s_i$ les opérateurs de face et de dégénérescence de $X'$, comme ceux de $X$ ; on notera $S'$ la bijection réciproque de $d_o\rho'$.

Pour déterminer $f : X \longrightarrow X'$ , il suffit de connaître $h : B \longrightarrow B'$ , car alors

(13) $$f_n(s.(\rho\, b)) = (g_n\, s).(\rho' h_n\, b) \quad \text{pour} \quad s \in G_n\,, \quad b \in B_n\,.$$

(On note $f_n$ , $g_n$ , $h_n$ la restriction des applications $f$ , $g$ , $h$ aux éléments de dimension $n$). Pour que les $f_n$ définies par (13) soient compatibles avec les $d_i$ et les $s_i$ , il faut et il suffit que les $h_n$ le soient, et que

$$d_o\, \rho' h_n\, b = (g_{b-1} \tau\, b).(\rho' d_o\, h_n\, b) \quad \text{pour} \quad b \in B_n\,, \quad n \geqslant 1\,.$$

En introduisant $S'$ , ceci s'écrit

(14) $$h_n\, b = S'((g_{n-1} \tau\, b).(\rho' h_{n-1}\, d_o\, b))\,.$$

Or la relation (14) détermine $h_n$ , par récurrence sur $n$ , à partir de $n = 0$ ; pour $n = 0$ , $h_o$ est unique, puisque $B'_o$ a un seul élément $b'_o$ par hypothèse. Il reste à vérifier que les $h_n$ définis par récurrence par la formule (14) sont bien compatibles avec les $d_i$ et les $s_i$ . Ceci revient à vérifier

(15) $$h_n\, s_i = s_i\, h_{n-1}\,, \quad d_i\, h_n = h_{n-1}\, d_i \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1\,.$$

Pour cela, on tiendra compte des relations

(16) $$S'\, d_i = d_{i+1}\, S'\,, \quad S'\, s_i = s_{i+1}\, S'\,, \quad d_o\, S' = p'\,, \quad S'\, \rho' = s_o$$

ainsi que des relations (9).

Commençons par la première des relations (15) ;

$$\begin{aligned} h_n\, s_o\, b &= S'((g_{n-1} \tau\, s_o\, b).(\rho' h_{n-1}\, d_o\, s_o\, b)) \\ &= S'\, \rho' h_{n-1}\, b = s_o\, h_{n-1}\, b\,; \end{aligned}$$

et, pour $n \geqslant 2$.,

$$\begin{aligned} h_n\, s_{i+1}\, b &= S'((g_{n-1} \tau\, s_{i+1}\, b).(\rho' h_{n-1}\, d_o\, s_{i+1}\, b)) \\ &= S'((s_i\, g_{n-2} \tau\, b).(s_i\, \rho' h_{n-2}\, d_o\, b)) \\ &= S' s_i((g_{n-2} \tau\, b).(\rho' h_{n-2}\, d_o\, b)) = s_{i+1}\, h_{n-1}\, b\,. \end{aligned}$$

Quant aux relations (15) qui concernent $d_i$ , elles sont triviales pour $n = 1$ (puisque $B'_o$ a un seul élément) ; supposons donc $n \geqslant 2$ :

$$d_o\, h_n\, b = p'((g_{n-1} \tau\, b).(\rho' h_{n-1}\, d_o\, b)) = h_{n-1}\, d_o\, b\,,$$

$$d_{i+1}\, h_n = d_{i+1}\, S'\, f_{n-1}\, d_o\, \rho = S'\, d_i\, f_{n-1}\, d_o \rho \quad ;$$

par récurrence, on a déjà $d_i\, f_{n-1} = f_{n-2}\, d_i$ , d'où

$$d_{i+1}\, h_n = S'\, f_{n-2}\, d_i\, d_o \rho = S'\, f_{n-2}\, d_o\, d_{i+1} \rho = S'\, f_{n-2}\, d_o \rho\, d_{i+1} = h_{n-1}\, d_{i+1}$$

Ceci achève la démonstration du théorème 2 bis, et par conséquent celle du théorème 2 .

REMARQUE. - Deux fibrés principaux avec relèvement qui satisfont à (i) et (ii) et ont le même groupe $G$ sont canoniquement isomorphes, comme le montre une double application du théorème 2 bis. Ceci exprime précisément l'*unicité* (à un isomorphisme près) de $W(G)$ pour un $G$ donné.

## 5. *Classification des fibrés principaux de base donnée* $B$ *et de groupe donné* $G$ .

PROPOSITION 5. - *Soient donnés* $B$ *et* $G$ . *A chaque application simpliciale* $h : B \longrightarrow \overline{W}(G)$ *associons la fonction tordante* $B \longrightarrow G$ , *composée de* $h$ *et de* $\tau_W(G) : \overline{W}(G) \longrightarrow G$ . *Ceci définit une bijection* $\Phi$ *de l'ensemble* $\mathrm{Hom}_o(B , \overline{W}(G))$ *sur l'ensemble des fonctions tordantes* $B \longrightarrow G$ .

En effet, on va définir une application $\Psi$ de l'ensemble des fonctions tordantes $B \longrightarrow G$ dans $\mathrm{Hom}_o(B , \overline{W}(G))$ , comme suit ; à chaque produit tordu $G \times_\tau B$ on associe l'unique morphisme $G \times_\tau B \longrightarrow W(G)$ défini au théorème 2, ce qui induit une application simpliciale $B \longrightarrow \overline{W}(G)$ . Il est immédiat que $\Phi\Psi$ est l'application identique de l'ensemble des fonctions tordantes, et que $\Psi\Phi$ est l'application identique de $\mathrm{Hom}_o(B , \overline{W}(G))$ . Donc $\Phi$ est une bijection.

PROPOSITION 6. - *Soit* $X$ *un fibré principal de groupe* $G$ , *de base* $B$ , *et soit* $B'$ *un sous-ensemble simplicial de* $B$ . *Soit* $X'$ *le fibré induit par* $X$ *au-dessus de* $B'$ ; *alors tout morphisme* $X' \longrightarrow W(G)$ *peut se prolonger en un morphisme* $X \longrightarrow W(G)$ (il s'agit de morphisme de fibrés principaux, sans autre structure).

En effet, la donnée d'un morphisme $f' : X' \longrightarrow W(G)$ détermine un relèvement $\rho' : B' \longrightarrow X'$ compatible avec le relèvement canonique de $W(G)$ . Ce relèvement peut se prolonger en un relèvement $\rho : B \longrightarrow X$ , d'après la proposition 1. Or $\rho$ définit (théorème 2) un morphisme $f : X \longrightarrow W(G)$ compatible avec $\rho$ ; en vertu de l'unicité, $f$ prolonge $f'$ .

THÉORÈME 3. - *Tout fibré principal* $X$ *de base* $B$ , *de groupe* $G$ , *est isomorphe à un fibré induit par une application simpliciale convenable* $h : B \longrightarrow \overline{W}(G)$ . *Pour que deux applications* $h$ *et* $h'$ *définissent des fibrés isomorphes, il faut et il suffit que* $h$ *et* $h'$ *soient homotopes.*

DÉMONSTRATION. - Choisissons un relèvement $\rho : B \to X$, ce qui est possible (proposition 1). D'après le théorème 2, $\rho$ définit un morphisme $X \to W(G)$, lequel induit une application simpliciale $h : B \to \overline{W}(G)$. Alors $X$ est isomorphe au fibré induit par l'application $h$ (proposition 2).

Si $h$ et $h'$ sont homotopes, les fibrés induits sont isomorphes (corollaire au théorème 1). Réciproquement, supposons que les fibrés induits par deux applications $h$, $h' : B \to \overline{W}(G)$ soient isomorphes : cela signifie qu'il existe un fibré principal $X$, de groupe $G$, de base $B$, et deux morphismes $f$, $f' : X \to W(G)$ qui, par passage aux quotients, donnent naissance à $h$ et $h'$. Considérons le fibré principal $\Delta_1 \times X$ (comme dans le théorème 1) ; les applications $\delta_0$ et $\delta_1 : \Delta_0 \to \Delta_1$ (cf. Exposé 3, bas de la page 3-01) définissent deux injections $\lambda_0$ et $\lambda_1$ de $X$ dans $\Delta_1 \times X$. La réunion des images de $\lambda_0$ et $\lambda_1$ est un sous-fibré $Y$ de $\Delta_1 \times X$ ; $f$ et $f'$ définissent un morphisme du sous-fibré $Y$ dans $W(G)$. D'après la proposition 6, ce morphisme peut se prolonger en un morphisme $\Delta_1 \times X \to W(G)$ ; ce dernier induit une application simpliciale des bases : $\Delta_1 \times B \to \overline{W}(G)$, qui prolonge $h$ et $h'$. Donc $h$ et $h'$ sont homotopes.

COROLLAIRE. - Pour que deux fonctions tordantes $B \to G$ définissent des fibrés isomorphes, il faut et il suffit que les applications correspondantes $B \to \overline{W}(G)$ soient homotopes.

Le théorème 3 montre que $W(G)$ joue le rôle de fibré universel pour les fibrés principaux de groupe $G$, et $\overline{W}(G)$ le rôle de classifiant pour ces fibrés. La donnée d'un fibré principal $X$ de base $B$ et de groupe $G$ définit donc sans ambigüité un homomorphisme des groupes de cohomologie

$$H^*(\overline{W}(G)) \to H^*(B) ,$$

quel que soit le groupe de coefficients. Si on prend les coefficients dans un anneau, on obtient un homomorphisme des algèbres de cohomologie ; son image s'appelle la sous-algèbre caractéristique du fibré $X$ ; c'est une sous-algèbre de l'algèbre de cohomologie $H^*(B)$.

EXEMPLE. - Si $G$ est le complexe singulier du groupe $O(n)$, les coefficients étant les entiers modulo 2, on obtient les classes de Stiefel-Whitney ; si $G$ est le complexe singulier du groupe $U(n)$, les coefficients étant entiers, on obtient les classes de Chern ; etc.