H. Cartan

Sur le foncteur $Hom(X,Y)$ en théorie simpliciale

Séminaire Henri Cartan, tome 9 (1956-1957), exp. n° 3, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1956-1957__9__A3_1>

Séminaire H. CARTAN, E.N.S., 1956/57.

Exposé n° 3

SUR LE FONCTEUR Hom(X,Y) EN THÉORIE SIMPLICIALE.

N.B. : Ce qui suit est la rédaction d'un Exposé qui n'a jamais eu lieu. Le sujet se rattache à celui de l'Exposé 1.

1.- Le foncteur Hom(X,Y).

Soient X et Y deux ensembles simpliciaux (on utilise la terminologie de l'Exposé 1, page 2). On leur attache un nouvel ensemble simplicial $\mathrm{Hom}(X,Y)$, défini comme suit :

$\mathrm{Hom}_o(X,Y)$, ensemble des éléments de dimension 0 de $\mathrm{Hom}(X,Y)$, est par définition l'ensemble des applications simpliciales de X dans Y.

Plus généralement, pour tout entier $n \geqslant 0$, $\mathrm{Hom}_n(X,Y)$ (ensemble des éléments de dimension n de $\mathrm{Hom}(X,Y)$) est $\mathrm{Hom}_o(\Delta_n \times X,Y)$, ensemble des applications simpliciales du produit $\Delta_n \times X$ dans Y . Rappelons que Δ_n désigne l'ensemble simplicial suivant : ses éléments de dimension p sont les applications croissantes (au sens large) f de la suite $(0,1,\ldots,p)$ dans la suite $(0,1,\ldots,n)$; les opérations de face et de dégénérescence, dans Δ_n , sont définies comme suit : $d_i f$ est l'application composée $f \circ \delta_i$, où $\delta_i : (0,1,\ldots,p-1) \longrightarrow (0,1,\ldots,p)$ est strictement croissante et ne prend pas la valeur i ; $s_i f$ est l'application composée $f \circ \sigma_i$ où $\sigma_i : (0,1,\ldots,p+1) \longrightarrow (0,1,\ldots,p)$ est croissante et surjective et prend deux fois la valeur i .

Observons que les applications δ_i et σ_i définissent des applications simpliciales $\Delta_{p-1} \rightarrow \Delta_p$ et $\Delta_{p+1} \rightarrow \Delta_p$, notées encore δ_i et σ_i , et dont la première, par exemple, est définie comme suit : à un élément $f : (0,1,\dots,q) \to$ $\to (0,1,\dots,p-1)$ de dimension q de Δ_{p-1}, elle associe l'application $\delta_i \circ f :$ $(0,1,\dots,q) \to (0,1,\dots,p)$.

Nous avons déjà défini l'ensemble $\mathrm{Hom}_n(X,Y)$ pour tout entier $n \geqslant 0$. Pour achever de définir $\mathrm{Hom}(X,Y)$ comme "ensemble simplicial", on doit définir les opérations de face et de dégénérescence

$$d_i : \mathrm{Hom}_n(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{n-1}(X,Y) \quad \text{et} \quad s_i : \mathrm{Hom}_n(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{n+1}(X,Y) \quad .$$

Par définition, si $f : \Delta_n \times X \to Y$ est une application simpliciale, $d_i f$ est l'application composée

$$\Delta_{n-1} \times X \to \Delta_n \times X \xrightarrow{f} Y$$

dont la première est induite par $\delta_i : \Delta_{n-1} \to \Delta_n$. De même, $s_i f$ est l'application composée

$$\Delta_{n+1} \times X \to \Delta_n \times X \xrightarrow{f} Y$$

dont la première est induite par $\sigma_i : \Delta_{n+1} \to \Delta_n$. Il est immédiat que les d_i et les s_i ainsi définis satisfont aux identités voulues (Exposé 1, relations (1)).

Ainsi $\mathrm{Hom}(X,Y)$ est défini comme ensemble simplicial. Soit alors $g : Y \to Y'$ une application simpliciale ; on lui associe une application simpliciale $\mathrm{Hom}(X,Y)$ $\to \mathrm{Hom}(X,Y')$, notée $\mathrm{Hom}(X,g)$, et définie comme suit : à $f \in \mathrm{Hom}(X,Y)$, $\mathrm{Hom}(X,g)$ associe l'élément de $\mathrm{Hom}_n(X,Y')$ défini par l'application composée

$$\Delta_n \times X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Y' \quad .$$

Il est immédiat que $\mathrm{Hom}(X,g)$ est une application simpliciale. De même, si $h :$ $X' \to X$ est une application simpliciale, on définit une application simpliciale $\mathrm{Hom}(h,Y) : \mathrm{Hom}(X,Y) \to \mathrm{Hom}(X',Y)$, comme suit : à $f \in \mathrm{Hom}_n(X,Y)$, $\mathrm{Hom}(h,Y)$ associe l'élément de $\mathrm{Hom}_n(X',Y)$ défini par l'application composée

$$\Delta_n \times X' \to \Delta_n \times X \xrightarrow{f} Y$$

dont la première est induite par h. On vérifie que $\mathrm{Hom}(h,Y)$ est une application simpliciale.

Enfin, on vérifie facilement que toutes les conditions sont satisfaites pour que $\mathrm{Hom}(X,g)$ et $\mathrm{Hom}(h,Y)$ définissent $\mathrm{Hom}(X,Y)$ comme <u>foncteur</u> des deux variables

X et Y (à valeurs dans la catégorie des ensembles simpliciaux), foncteur prenant ses valeurs dans la catégorie des ensembles simpliciaux ; ce foncteur est contravariant en X, et covariant en Y.

2.- Quelques applications naturelles.

Soient X,Y,Z trois ensembles simpliciaux ; on v_ définir une application simpliciale :

$$\chi : \mathrm{Hom}(X,Y) \times \mathrm{Hom}(Y,Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,Z) \quad ,$$

qui est naturelle vis-à-vis de X,Y,Z. Pour cela, à deux applications simpliciales

$$f : \Delta_n \times X \to Y \ , \qquad g : \Delta_n \times Y \to Z \quad ,$$

on veut associer une application simpliciale $h : \Delta_n \times X \to Z$; par définition, si $u \in \Delta_n$ et $x \in X$ sont de dimension p, $h(u,x)$ est l'élément $g(u,f(u,x))$ de Z (de dimension p). On vérifie que si on note $\chi(f,g)$ l'application h ainsi associée à f et g, on a

$$\chi(d_i f, d_i g) = d_i \chi(f,g) \ , \qquad (s_i f, s_i g) = s_i \chi(f,g)$$

et par suite l'application χ est une application simpliciale du produit des ensembles simpliciaux $\mathrm{Hom}(X,Y)$ et $\mathrm{Hom}(Y,Z)$ dans l'ensemble simplicial $\mathrm{Hom}(X,Z)$. Elle est évidemment naturelle.

On vérifie que l'application χ est associative : si X,Y,Z,T sont des ensembles simpliciaux, et si $f \in \mathrm{Hom}_n(X,Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_n(Y,Z)$, $h \in \mathrm{Hom}_n(Z,T)$, on a

$$\chi\,(f, \chi\,(g,h)) = \chi(\,\chi\,(f,g),h).$$

En particulier, on a une application simpliciale

$$\mathrm{Hom}(X,X) \times \mathrm{Hom}(X,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,X) \quad ,$$

qui fait de $\mathrm{Hom}(X,X)$ un monoïde simplicial. Pour chaque n, $\mathrm{Hom}_n(X,X)$ est un monoïde pour la loi de composition χ, et ce monoïde possède un élément neutre, dégénéré n fois de l'élément neutre de $\mathrm{Hom}_o(X,X)$; ce dernier n'est autre que l'application identique $X \to X$.

Le monoïde simplicial $\mathrm{Hom}(X,X)$ opère à gauche dans l'ensemble simplicial $\mathrm{Hom}(X,Y)$; le monoïde simplicial $\mathrm{Hom}(Y,Y)$ opère à droite dans l'ensemble simplicial $\mathrm{Hom}(X,Y)$.

Soient à nouveau trois ensembles simpliciaux X,Y,Z. On va définir une bijection naturelle

(1) $$\mathrm{Hom}_o(X \times Y,Z) \approx \mathrm{Hom}_o(X,\mathrm{Hom}(Y,Z)).$$

Soit d'abord une application simpliciale $f : X \times Y \to Z$; on va lui associer une application simpliciale $h_f : X \to \mathrm{Hom}(Y,Z)$ comme suit : soit $x \in X_n$; $h_f(x)$ va être une application simpliciale

$$g_x : \Delta_n \times Y \to Z \quad ,$$

à savoir celle qui, à un couple d'éléments (u,y) de degré p avec ($u \in \Delta_n$, $y \in Y$) , associe l'élément $f(\bar{u}(x),y) \in Z$, où $\bar{u}$ désigne l'application simpliciale $X_n \to X_p$ définie par $u : \Delta_p \to \Delta_n$. On vérifie que g_x ainsi définie est bien une application simpliciale, et que l'application $x \to g_x$ de X dans $\mathrm{Hom}(Y,Z)$ est simpliciale : c'est l'application h_f cherchée. En sens inverse, soit h une application simpliciale $X \to \mathrm{Hom}(Y,Z)$; si $x \in X_n$, $h(x)$ est une application simpliciale $\Delta_n \times Y \to Z$; soit u_n l'élément fondamental de Δ_n, et $y \in Y_n$; l'image de (u_n,y) par l'application $h(x)$ est un élément $z \in Z_n$; l'application qui, au couple (x,y), associe z , est une application simpliciale f_h de $X \times Y$ dans Z .

Ainsi, on a d'une part associé à chaque $f \in \mathrm{Hom}_o(X \times Y,Z)$ un élément $h_f \in \mathrm{Hom}_o(X,\mathrm{Hom}(Y,Z))$; d'autre part on a associé à chaque $h \in \mathrm{Hom}_o(X,\mathrm{Hom}(Y,Z))$ un élément $f_h \in \mathrm{Hom}_o(X \times Y,Z)$. On vérifie que les deux applications $f \to h_f$ et $h \to f_h$ sont réciproques l'une de l'autre ; elles définissent la bijection (1) cherchée.

Appliquons maintenant (1) en y remplaçant X par $\Delta_n \times X$; on trouve une bijection naturelle $\mathrm{Hom}_n(X \times Y,Z) \approx \mathrm{Hom}_n(X,\mathrm{Hom}(Y,Z))$. En vertu de la naturalité, la collection de toutes ces bijections (pour tous les n) définit un <u>isomorphisme d'ensembles simpliciaux</u>

(2) $$\mathrm{Hom}(X \times Y,Z) \approx \mathrm{Hom}(X,\mathrm{Hom}(Y,Z))$$

qui est, lui aussi, naturel.

3.- Le foncteur Hom(X,Y) et les fibrations de Kan.

THÉORÈME 1.- Soit $\pi : E \to B$ une application simpliciale, fibrée au sens de Kan (Exposé 1, page-1-08). Alors, pour tout ensemble simplicial X, l'application

$$\mathrm{Hom}(X,\pi) : \mathrm{Hom}(X,E) \to \mathrm{Hom}(X,B)$$

est fibrée au sens de Kan.

Observons tout de suite que si on considère le cas particulier où B a un seul élément en chaque dimension, on obtient le :

COROLLAIRE du théorème 1 : si E est un complexe de Kan, alors $\mathrm{Hom}(X,E)$ est un complexe de Kan. (Cf. J.C. MOORE, Lectures Notes, Princeton 1956, p. 1A-8).

DÉMONSTRATION du théorème 1.- Elle va être assez technique et délicate. Il s'agit de prouver ceci : soit n un entier $\geqslant 1$, et soit k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$; notons Δ_n^k le sous-ensemble simplicial de Δ_n, réunion des images des applications $\delta_i : \Delta_{n-1} \to \Delta_n$ relatives à tous les entiers $i \neq k$. Supposons données deux applications simpliciales

$$g : \Delta_n^k \times X \longrightarrow E \quad , \qquad\qquad f : \Delta_n \times X \longrightarrow B \quad ,$$

qui soient compatibles, c'est-à-dire telles que la restriction de f à $\Delta_n^k \times X$ soit égale à $\pi \circ g$. On doit montrer qu'il existe une application simpliciale

$$h : \Delta_n \times X \to E$$

qui prolonge g et satisfait à $\pi \circ h = f$.

Rappelons que les éléments de l'ensemble simplicial Δ_n sont les suites $(p_o,\dots,p_n)$ de $n+1$ entiers $\geqslant 0$ non tous nuls, la dimension d'un tel élément étant $p_o+\dots+p_n-1$; les éléments de Δ_n^k sont ceux pour lesquels l'un au moins des p_i est nul pour $i \neq k$. Un élément de $\Delta_n \times X$ est un couple $((p_o,\dots,p_n),x)$, où $x \in X$ est de dimension $q(p_o,\dots,p_n) = p_o+\dots+p_n-1$. Définissons l'entier $q_k(p_o,\dots,p_n) = q(p_o,\dots,p_n) - p_k$, qui est $\leqslant -1$.

Pour chaque entier $q \leqslant -1$, soit $Z(q)$ l'ensemble des éléments de $\Delta_n \times X$ de la forme $((p_o,\dots,p_n),x)$, avec $q_k(p_o,\dots,p_n) \leqslant q$. Il est immédiat que $Z(q)$ est stable pour les opérateurs de face (sinon pour les opérateurs de dégénérescence). Pour chaque entier $p \leqslant -1$, notons $Z(q,p)$ l'ensemble des éléments suivants de $Z(q)$:

(a) tous les éléments de $Z(q-1)$;

(b) tous les $((p_o,\dots,p_n),x)$ tels que $q_k(p_o,\dots,p_n) = q$ et $p_k \leqslant p$;

(c) tous les éléments de la forme $((p_o,\dots,p_k+1,\dots,p_n)\ ,\ s_{p_o+\dots+p_k}x)$, tels que $q_k(p_o,\dots,p_n) = q$ et $p_k \leqslant p$.

L'ensemble $Z(q,p)$ est stable par les opérateurs de face. En effet, c'est clair pour les éléments du type (a) ou (b) ; pour le type (c), cela résulte des faits suivants :

$$d_{p_o+\dots+p_k}((p_o,\dots,p_k+1,\dots,p_n),\ s_{p_o+\dots+p_k}x) = ((p_o,\dots,p_k,\dots,p_n),x) \ ;$$

si $i < p_o+\dots+p_{k-1}$ ou $i > p_o+\dots+p_k$, on a

$$d_i((p_o,\dots,p_k+1,\dots,p_n),s_{p_o+\dots+p_k}x) \in Z(q-1) \ ;$$

si $p_o+\dots+p_{k-1} \leqslant i < p_o+\dots+p_k$, on a

$d_i((p_o,\dots,p_k+1,\dots,p_n),s_{p_o+\dots+p_k}x) \in Z(q,p-1)$, et c'est même un élément du type (c) de $Z(q,p-1)$.

Pour définir $h : \Delta_n \times X \to E$, on va procéder comme suit : on définira h sur les sous-ensembles $Z(q)$, par récurrence sur q ; observons que pour $q = -1$, $Z(-1)$ est contenu dans $\Delta_n^k \times X$, donc h est automatiquement défini puisqu'il doit être égal à g . Pour faire la récurrence sur q , c'est-à-dire, d'une façon précise, pour prolonger h de $Z(q)$ à $Z(q+1)$, on procédera de proche en proche, en définissant h sur les sous-ensembles $Z(q+1,p)$ pour $p = -1,0,\dots$; pour $p = -1$, il n'y a pas de problème, car $Z(q+1,-1) = Z(q)$; il suffira donc de dire comment on peut prolonger h de $Z(q+1,p-1)$ à $Z(q+1,p)$.

A chaque étape du prolongement, on devra s'assurer que h , sur l'ensemble $Z(q+1,p)$ considéré, est compatible avec les opérateurs de face ; est compatible avec les opérateurs de dégénérescence dans la mesure où ceux-ci ne font pas sortir de $Z(q+1,p)$; et est compatible avec les "données aux limites", c'est-à-dire

(3) $\qquad \pi \circ h = f$ partout ,

(4) $\qquad h = g$ sur $\Delta_n^k \times X$.

Montrons comment h , supposé défini sur $Z(q+1,p-1)$, peut se prolonger à $Z(q+1,p)$. Sur les éléments du type (a) , c'est-à-dire sur $Z(q)$, h est déjà défini ; on va choisir h sur les éléments du type (c) , puis, pour un élément $((p_o,\dots,p_n),x)$ du type (b) tel que $q_k(p_o,\dots,p_n) = q+1$ et $p_k = p$, on posera, <u>par définition</u> :

$$h((p_o,\dots,p_n),x) = d_{p_o+\dots+p_k}\, h((p_o,\dots,p_k+1,\dots,p_n)\ ,\ s_{p_o+\dots+p_k}x) \ . \tag{5}$$

Disons maintenant comment on va choisir h sur un élément $v = ((p_o,\dots,p_k+1,\dots,p_n), s_{p_o+\dots+p_k} x)$ tel que $p_o+\dots+p_{k-1}+p_{k+1}+\dots+p_n = q+1$ et $p_k = p$. Il faut distinguer trois cas :

<u>Premier cas</u> : l'élément considéré v est dans $\Delta_n^k \times X$; alors on pose $h(v) = g(v)$;

<u>Deuxième cas</u> : v n'est pas dans $\Delta_n^k \times X$, mais est dégénéré, c'est-à-dire de la forme $s_j u$. Ceci exige que j soit distinct des entiers $p_o-1, p_o+p_1-1, \dots, p_o+\dots+p_{k-1}-1, p_o+\dots+p_k, \dots, p_o+\dots+p_n$ et que x ait la forme

$$s_j x' \quad \text{si} \quad j < p_o+\dots+p_k \ ,$$

$$s_{j-1}x' \quad \text{si} \quad j > p_o+\dots+p_k \ .$$

Il y a alors deux possibilités : 1° si $j < p_o+\dots+p_{k-1}$ ou si $j > p_o+\dots+p_k$, on constate que $u \in Z(q)$; 2° si $p_o+\dots+p_{k-1} \leqslant j < p_o+\dots+p_k$, on constate que u est un élément du type (c) de $Z(q+1,p-1)$. Dans tous les cas, $h(u)$ est donc déjà connu, et on pose alors

$$h(s_j u) = s_j h(u) \ ;$$

<u>Troisième cas</u> (cas général) : on suppose qu'on n'est dans aucun des cas précédents. Soit toujours v l'élément considéré ; considérons les $d_i v$ pour $i \neq p_o+\dots+p_k$. Si $i < p_o+\dots+p_{k-1}$ ou si $i > p_o+\dots+p_k$, $d_i v$ appartient à $Z(q)$. Si $p_o+\dots+p_{k-1} \leqslant i < p_o+\dots+p_k$, $d_i v$ est un élément du type (c) de $Z(q+1,p-1)$. Dans tous les cas, les éléments $h(d_i v)$ sont connus ; et on vérifie aussitôt que, pour $i < j$ (i et j distincts de $p_o+\dots+p_k$) , on a

$$d_i h(d_j v) = d_{j-1} h(d_i v) \ .$$

Autrement dit, les $h(d_i v)$ satisfont aux conditions nécessaires de compatibilité pour que ce soient les faces d'un même élément de E. L'élément inconnu $h(v)$ doit justement satisfaire aux relations $d_i h(v) = h(d_i v)$ pour $i \neq p_o+\dots+p_k$; en outre, il faut que $\pi h(v) = f(v)$, qui est connu. Il est immédiat que les projections $\pi h(d_i v)$ sont respectivement égales aux $d_i f(v) = f(d_i v)$, et puisque, par hypothèse, l'application $\pi : E \to B$ est fibrée au sens de Kan, il existe bien un élément $h(v) \in E$ satisfaisant à toutes les conditions imposées.

Ainsi nous avons défini $h(v)$ lorsque $v \in Z(q+1,p)$. Il reste à vérifier que h, ainsi prolongé, satisfait aux "données aux limites", et est compatible avec les opérateurs de face et de dégénérescence (dans la mesure où ces derniers ne font pas sortir de $Z(q+1,p)$). Indiquons rapidement comment se fait cette vérification.

La relation $\pi h(v) = f(v)$ est vraie, par hypothèse, si v est du type (a) (i.e. appartient à $Z(q)$) ; on la vérifie si v est du type (c), en examinant les trois cas ci-dessus : dans le troisième cas, c'est vrai par construction ; dans le premier cas, c'est vrai à cause de la compatibilité de f et de g ; dans le deuxième cas, on a $\pi h(s_j u) = \pi s_j h(u) = s_j \pi h(u) = s_j f(u) = f(s_j u)$. Reste le cas où v est du type (b) : on se sert alors de la relation (5) qui a servi à définir $h(v)$, et on utilise ce qui vient d'être établi pour les éléments du type (c).

Soit ensuite à vérifier que $h(v) = g(v)$ si $v \in \Delta_n^k \times X$; c'est vrai si v est du type (a) ; il suffit de le vérifier si v est du type (c), car alors (5) l'entraînera si v est du type (b). Or si v est du type (c), on est dans le "premier cas", et on a $h(v) = g(v)$ par construction.

Il faut ensuite vérifier la compatibilité de h avec les opérateurs de face. C'est déjà acquis si v est du type (a). Si v est du type (b), cela résultera du cas où v est du type (c). Examinons le cas où v est du type (c) : la compatibilité avec $d_{p_o+\dots p_k}$ est vraie par construction, puisque la relation (5) a été utilisée pour définir h sur les éléments du type (b). Il reste à examiner les $d_i h((p_o,\dots,p_k+1,\dots,p_n), s_{p_o+\dots+p_k} x)$ pour $i \neq p_o+\dots+p_k$. Si l'élément $v =$ $= ((p_o,\dots,p_k+1,\dots,p_n), s_{p_o+\dots p_k} x)$ est dans le premier cas, tout va bien puisque g est compatible avec les opérateurs de face ; dans le second cas, tout revient à vérifier l'égalité $d_i s_j h(u) = h(d_i s_j u)$: la vérification est triviale si $i = j$ ou $i = j+1$, car alors les deux membres sont égaux à $h(u)$; si $i < j$, le premier membre est égal à $s_{j-1} d_i h(u) = s_{j-1} h(d_i u) = h(s_{j-1} d_i u)$, qui est bien égal à

$h(d_i s_j u)$; vérification analogue si $i > j+1$. Enfin, dans le troisième cas, la relation $d_i h(v) = h(d_i v)$ est vraie par construction.

Pour terminer, on doit vérifier la compatibilité de h avec les opérateurs de dégénérescence. La question est celle-ci : soit $v \in \Delta_n \times X$ tel que $s_i v \in Z(q+1,p)$, ce qui entraîne que $v = d_i s_i v \in Z(q+1,p)$; on doit vérifier que $h(s_i v) = s_i h(v)$. C'est vrai, par hypothèse, si $s_i v \in Z(q+1,p-1)$; on supposera donc que $s_i v \notin Z(q+1,p-1)$. Alors $s_i v$ n'est pas du type (a), et on doit donc examiner le cas où $s_i v$ est du type (c) et celui où il est du type (b).

Supposons d'abord que $s_i v$ soit du type (c) : si $s_i v \in \Delta_n^k \times X$, il en est de même de v, et on est dans le "premier cas" ; alors $h(s_i v) = g(s_i v) = s_i g(v) = s_i h(v)$. Sinon, l'élément $s_i v$ est dans le "deuxième cas", et on a $h(s_i v) = s_i h(v)$ par construction.

Supposons maintenant que $s_i v$ soit du type (b), ce qui implique que v est du type (a) ou du type (b). Il y a deux cas possibles :

(i) $v = ((p_0,\dots,p_k,\dots,p_n),x)$, avec $p_k = p-1$, $q(p_0,\dots,p_n) = q+1$, et $p_0+\dots+p_{k-1} \leqslant i < p_0+\dots+p_k$; alors

$$s_i v = ((p_0,\dots,p_k+1,\dots,p_n),s_i x) .$$

(ii) $v = ((p_0,\dots,p_k,\dots,p_n),x)$, avec $p_k = p$, $q(p_0,\dots,p_n) = q$, et $i < p_0+\dots+p_{k-1}$ ou $i > p_0+\dots+p_k$; alors

$$s_i v = ((p'_0,\dots,p_k,\dots,p'_n),s_i x) \quad , \text{ où les } p'_j \text{ (pour } j \neq k)$$

sont tous égaux aux p_j, sauf pour une valeur de j (pour laquelle $p'_j = p_j+1$).

Il reste donc à examiner successivement les cas (i) et (ii). Dans le cas (i), on a

$$\begin{aligned} s_i h(v) &= s_i d_{p_0+\dots+p_k}\, h\,((p_0,\dots,p_k+1,\dots p_n),s_{p_0+\dots p_k}\,x) \\ &= d_{p_0+\dots+p_k+1}\, s_i h((p_0,\dots,p_k+1,\dots,p_n),s_{p_0+\dots+p_k}\,x) \\ &= d_{p_0+\dots+p_k+1} h((p_0,\dots,p_k+2,\dots,p_n),s_{p_0+\dots+p_k+1}s_i x) \\ &= h((p_0,\dots,p_k+1,\dots,p_n),s_i x) = h(s_i v). \end{aligned}$$

Dans le cas (ii), les calculs sont analogues (on doit discuter séparément le cas où $i < p_o+\dots+p_{k-1}$ et celui où $i > p_o+\dots p_k$) .

La démonstration du théorème 1 est ainsi achevée.

REMARQUE.- Soit B' le sous-ensemble simplicial de B engendré par un sommet $b_o \in B_o$; et soit $F = \pi^{-1}(B')$ la fibre correspondante de l'application fibrée π ; on dit que F est la fibre au-dessus de b_o . Considérons l'élément $y_o \in \mathrm{Hom}_o(X,B)$ qui envoie X dans B' . Dans l'application fibrée $\mathrm{Hom}(X,E) \to \mathrm{Hom}(X,B)$, la fibre au-dessus de y_o est évidemment $\mathrm{Hom}(X,F)$.

4.- Le foncteur $\mathrm{Hom}(X,Y)$ et les fibrations de Kan (suite).

THÉORÈME 2.- Soit Y un sous-ensemble simplicial de l'ensemble simplicial X , et soit E un complexe de Kan. Alors l'application naturelle $\mathrm{Hom}(X,E) \to \mathrm{Hom}(Y,E)$ est fibrée au sens de Kan.

(Ceci a été énoncé sans démonstration par MOORE, loc. cit.).

DÉMONSTRATION.- Elle est tout à fait semblable à celle du théorème 1. On utilise les $Z(q)$ et les $Z(q,p)$ exactement comme ci-dessus. D'une façon précise , il s'agit de prouver ceci : supposons données deux applications simpliciales

$$g : \Delta_n^k \times X \longrightarrow E , \qquad f : \Delta_n \times Y \longrightarrow E$$

telles que g et f aient même restriction à $\Delta_n^k \times Y$; on veut montrer qu'il existe une application simpliciale $h : \Delta_n \times X \longrightarrow E$ qui prolonge à la fois f et g .

Dans la démonstration du théorème 1, on se contentera de remplacer la condition (3) par la suivante :

(3') $$h = f \text{ sur } \Delta_n \times Y .$$

Pour définir h sur un élément du type (c), on distinguera trois cas, comme plus haut : le premier cas est celui où l'élément considéré $v \in Z(q+1,p)$ est dans $\Delta_n^k \times X$ ou dans $\Delta_n \times Y$; le second est celui où v est dégénéré ; enfin dans le troisième cas (qui exclut les deux précédents), on connaît déjà les éléments $h(d_i v)$ pour $i \neq p_o+\dots+p_k$, et grâce au fait que E est un complexe de Kan, on choisit pour $h(v)$ un élément de E tel que $d_i h(v) = h(d_i v)$ pour $i \neq p_o+\dots+p_k$. Les vérifications finales sont alors les mêmes que dans la démonstration du théorème 1.

5.- Compléments.

Reprenons la bijection (1) du paragraphe 2, dans un cas particulier :

$$\mathrm{Hom}_o(B \times X, B) \approx \mathrm{Hom}_o(B, \mathrm{Hom}(X,B)).$$

La projection canonique $B \times X \to B$ définit ainsi une application simpliciale

$$B \to \mathrm{Hom}(X,B)$$

qui est une injection (pour des raisons fonctorielles évidentes). Ceci identifie B à un sous-ensemble simplicial de $\mathrm{Hom}(X,B)$, et on explicite facilement cette identification : à chaque $b \in B_n$ on associe l'application simpliciale $\Delta_n \times X \to B$, composée de la projection $\Delta_n \times X \to \Delta_n$, et de l'application simpliciale $\Delta_n \to B$ définie par $b \in B_n$.

Revenons alors à la situation du théorème 1 : soit Y le sous-ensemble simplicial de $\mathrm{Hom}(X,E)$, image réciproque du sous-ensemble $B \subset \mathrm{Hom}(X,B)$ par l'application fibrée $\mathrm{Hom}(X,E) \to \mathrm{Hom}(X,B)$.

On a ainsi une application fibrée $\varphi : Y \to B$. On interprète Y comme suit : un élément $y \in Y_n$ est une application simpliciale $\Delta_n \times X \to E$ telle qu'il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Delta_n \times X & \xrightarrow{y} & E \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \Delta_n & \longrightarrow & B \end{array}$$

où la première flèche verticale désigne la projection $\Delta_n \times X \to \Delta_n$; alors la deuxième flèche horizontale définit un élément $b \in B_n$, qui est l'image de $y \in Y_n$ par l'application fibrée $\varphi : Y \to B$.

Examinons le cas particulier important où X est la fibre F du fibré E située au-dessus d'un sommet $b_o \in B_o$. Alors Y_o se compose des applications simpliciales $F \to E$ qui envoient la fibre F dans une autre fibre du fibré $E \to B$ (éventuellement sur la même fibre). Le fait que l'application $\varphi : Y \to B$ est fibrée au sens de Kan implique aussitôt ceci : étant donnés un élément $b_1 \in B_1$ (un "chemin" de B) tel que $d_1 b_1 = b_o$, et l'élément y_o qui correspond à l'injection canonique de F sur la fibre au-dessus de b_o , il existe une application simpliciale $y_1 : \Delta_1 \times F \to E$ telle que $d_1 y_1 = y_o$ et $\varphi(y_1) = b_1$; alors $d_o y_1$ est une application simpliciale de F dans la fibre au-dessus du sommet $d_o b_1 \in B_o$; cette application dépend du choix de y_1 , mais deux choix quelconques définissent des applications <u>homotopes</u>, et la classe d'homotopie de l'application de F dans la fibre au-dessus de $d_0 b_1 = b'_0$ ne dépend que du sommet b'_0 et de la classe d'homotopie du "chemin" b_1 d'extrémités b_0 et b'_0. Il en résulte en particulier que deux fibres de E situées au-dessus de deux sommets de B situés dans une même composante connexe de B, ont <u>même type d'homotopie simplicial</u>.

Ces résultats sont analogues aux résultats classiques relatifs au cas des fibrés topologiques au sens de Serre.

Enfin, toujours avec les mêmes notations, on a un diagramme commutatif

(D) $$\begin{array}{ccc} F \times Y & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ F \times B & \longrightarrow & B \end{array}$$

où la première flèche verticale est l'application définie par la fibration $Y \to B$ (c'est donc une application fibrée), la seconde flèche horizontale est la projection naturelle, et le première application horizontale est celle induite par l'application naturelle

(6) $$F \times \mathrm{Hom}(F,E) \to E \ ;$$

cette dernière peut se déduire de l'application χ du paragraphe 2 :

$$\chi : \mathrm{Hom}(U,F) \times \mathrm{Hom}(F,E) \longrightarrow \mathrm{Hom}(U,E)$$

en prenant pour U un ensemble simplicial ayant un seul élément dans chaque dimension (alors $\mathrm{Hom}(U,F)$ s'identifie à F, et $\mathrm{Hom}(U,E)$ s'identifie à E). On laisse au lecteur le soin de vérifier la commutativité du diagramme (D).

On pourrait aussi déduire (6) de la bijection (1) du paragraphe 2, en y prenant

$$X = \mathrm{Hom}(F,E) \quad , \quad Y = F \quad , \quad Z = E \ ;$$

alors à l'élément canonique de $\mathrm{Hom}_0(\mathrm{Hom}(F,E), \mathrm{Hom}(F,E))$ (à savoir l'application identique $\mathrm{Hom}(F,E) \to \mathrm{Hom}(F,E)$) correspond un élément de $\mathrm{Hom}_0(\mathrm{Hom}(F,E) \times F, E)$, d'où l'application (6).