Séminaire Henri Cartan

J. C. Moore

Homotopie des complexes monoïdaux, II

Séminaire Henri Cartan, tome 7, nº 2 (1954-1955), exp. nº 19, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1954-1955__7_2_A9_0>

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire H. CARTAN, E.N.S., 1954/55.

HOMOTOPIE DES COMPLEXES MONOÏDAUX, II.

(Exposé de J.C. MOORE, 25.4.1955)

1.- Soit donné un complexe monoïdal $\Gamma = (\Gamma_q)$. On va lui associer deux complexes $\Gamma^{\#}$ et $\Gamma^{(1)}$ qui, lorsque Γ est le complexe singulier d'un espace topologique X , s'identifient aux complexes singuliers des espaces $E(X,x_o)$ et $L(X,x_o)$ (espace des chemins d'origine $x_o \in X$, et espace des lacets d'origine x_o ; voir Exposé 18, paragraphe 2).

Posons $\Gamma^{\#}_q = \Gamma_{q+1}$; la collection des $\Gamma^{\#}_q$ (pour $q \geq 0$) constitue un complexe monoïdal $\Gamma^{\#}$ si on définit

$$d_i : \Gamma^{\#}_{q+1} \longrightarrow \Gamma^{\#}_q \quad \text{et} \quad s_i : \Gamma^{\#}_q \longrightarrow \Gamma^{\#}_{q+1}$$

comme étant respectivement $d_{i+1} : \Gamma_{q+2} \longrightarrow \Gamma_{q+1}$ et $s_{i+1} : \Gamma_{q+1} \longrightarrow \Gamma_{q+2}$.
Définissons en outre une application de complexes monoïdaux :

$$p : \Gamma^{\#}_q \longrightarrow \Gamma_q$$

comme étant $d_o : \Gamma_{q+1} \longrightarrow \Gamma_q$.

Soit $\Gamma^{(1)}_q$ le sous-monoïde de $\Gamma^{\#}_q$, noyau de p (c'est-à-dire l'image réciproque de l'élément neutre de Γ_q) . La collection des $\Gamma^{(1)}_q$, munie des homomorphismes d_i et s_i induits par ceux du complexe $\Gamma^{\#}$, est un complexe monoïdal $\Gamma^{(1)}$. On notera $i : \Gamma^{(1)} \longrightarrow \Gamma^{\#}$ l'injection canonique. On a donc une suite exacte de complexes

$$0 \longrightarrow \Gamma^{(1)} \xrightarrow{i} \Gamma^{\#} \xrightarrow{p} \Gamma \longrightarrow 0 ,$$

où 0 désigne le complexe monoïdal dont tous les monoïdes sont réduits à l'élément neutre.

Proposition 1.- (a) Si le complexe Γ est involutif, alors les complexes $\Gamma^{(1)}$ et $\Gamma^{\#}$ sont involutifs ;

b) Si Γ est un complexe de groupes, alors $\Gamma^{(1)}$ et $\Gamma^{\#}$ sont des complexes de groupes, et $\Gamma^{\#}$ est une extension inessentielle de Γ par $\Gamma^{(1)}$.

Démonstration : il suffit de prouver la dernière assertion ; or elle résulte de l'existence d'un homomorphisme (multiplicatif) $j : \Gamma_q \longrightarrow \Gamma^{*}_q$ tel que $p \circ j$ soit l'identité ; il n'y a qu'à prendre pour j l'application $s_o : \Gamma_q \longrightarrow \Gamma_{q+1}$.

Rappelons que $R(\Gamma)$ désigne le complexe d'anneaux déduit de Γ comme suit : $R_q(\Gamma)$ est l'algèbre du monoïde Γ_q à coefficients entiers.

<u>Théorème 1</u> : <u>Soit</u> Γ <u>un complexe de groupes. Pour que</u>

$$(R(\Gamma^{(1)}) \quad , \quad R(\Gamma) \quad , \quad R(\Gamma^{\#}))$$

<u>soit une "construction" satisfaisant à la condition</u> W (Exposé 12, page 12-04), <u>il faut et il suffit que</u> $\tilde{\pi}_o(\Gamma) = 0$.

(C'est évident à partir des définitions).

Ceci conduit à introduire la construction $\bar{W}(R(\Gamma))$ pour tout complexe monoïdal Γ . Il est immédiat que $\bar{W}_q(R(\Gamma))$ est le groupe abélien libre ayant pour base l'ensemble $\bar{W}_q(\Gamma)$ égal, par définition, au produit direct $\Gamma_{q-1} \times \dots \times \Gamma_o$. La collection des $\bar{W}_q(\Gamma)$ constitue un CSS-complexe $\bar{W}(\Gamma)$ si on définit les d_i et les s_i comme suit :

$$d_o(x_{q-1},\dots,x_o) = (x_{q-2},\dots,x_o)$$

$$d_i(x_{q-1},\dots,x_o) = (d_{i-1}x_{q-1},\dots,d_1x_{q-i+1},(d_ox_{q-i})x_{q-i-1},x_{q-i-2},\dots,x_o)$$

pour $i \geqslant 1$

$$s_i(x_{q-1},\dots,x_o) = (s_{i-1}x_{q-1},\dots,s_ox_{q-i} \, , \, e_{q-i} \, , \, x_{q-i-1} \, ,\dots,x_o)$$

pour $i \geqslant 0$.

Alors $R(\bar{W}(\Gamma))$ s'identifie au complexe $\bar{W}(R(\Gamma))$ tel qu'il est défini dans l'Exposé 12 (page 12-05).

Lorsque Γ est abélien , la structure multiplicative sur $\bar{W}_q(\Gamma)$ définie par celle du monoïde-produit $\Gamma_{q-1} \times \dots \times \Gamma_o$, fait de $\bar{W}(\Gamma)$ un complexe monoïdal (abélien).

Corollaire du théorème 1 : Soit Γ un complexe de groupes tel que $\tilde{\pi}_q(\Gamma) = 0$ pour $q < n$. Alors $\Gamma = \bar{W}^{(n)}(\Gamma^{(n)})$, en notant $\bar{W}^{(n)}$ l'opération $\bar{W}$ itérée n fois, et $\Gamma^{(n)}$ le complexe déduit de Γ par l'itération (n fois) de l'opération qui fait passer de Γ à $\Gamma^{(1)}$.

Remarque : si Γ est un complexe de groupes et si $\tilde{\pi}_o(\Gamma) = 0$, la structure de groupe de Γ_q n'est pas, en général, celle du produit $\Gamma^{(1)}_{q-1} \times \dots \times \Gamma^{(1)}_o$, du moins lorsque Γ n'est pas abélien.

2.- Complexes minimaux.

Définition 1 : soit Γ un complexe monoïdal avec homotopie. On dit que Γ est minimal en dimensions $\leq n$ si $\pi_q(\Gamma) = \tilde{\pi}_q(\Gamma)$ pour $q \leq n$, ou, ce qui revient au même, si les applications

$$d_q : \quad \tilde{\pi}_q(\Gamma) \longrightarrow \tilde{\pi}_{q-1}(\Gamma)$$

sont nulles pour $1 \leq q \leq n+1$. On dit que Γ est minimal (tout court) si $\pi_q(\Gamma) = \tilde{\pi}_q(\Gamma)$ pour tout $q \geq 0$.

Proposition 2 : Si Γ est un complexe monoïdal avec homotopie, minimal en dimension 0 , alors $\Gamma^{(1)}$ est un complexe avec homotopie, et $\pi_q(\Gamma^{(1)}) = \pi_{q+1}(\Gamma)$ pour tout q .

La démonstration est évidente à partir des définitions.

Théorème 2 : Si un complexe monoïdal Γ est minimal, les Γ_q sont des groupes.

Démonstration : on a d'abord $\Gamma_o = \tilde{\pi}_o(\Gamma) = \pi_o(\Gamma)$, qui est un groupe. Supposons maintenant que Γ_q soit un groupe pour $q \leq n$, et montrons que Γ_{n+1} est un groupe. Soit $x \in \Gamma_{n+1}$; on a $d_i(x\bar{x}) = e_n$ puisque Γ_n est un groupe, et par suite $x\bar{x} \in \tilde{\pi}_{n+1}(\Gamma) = \pi_{n+1}(\Gamma)$. Or, pour $i \leq n$, on a $d_i s_{n+1}(x\bar{x}) = s_n d_i(x\bar{x}) = e_n$, tandis que $d_{n+1}s_{n+1}(x\bar{x}) = d_{n+2}s_{n+1}(x\bar{x}) = x\bar{x}$. D'après l'axiome iii, il existe $z \in \Gamma_{n+2}$ tel que $d_i z = d_i s_{n+1}(x\bar{x})$ pour $i \neq n+1$, et $d_{n+1}z = e_{n+1}$. On a donc $z \in \tilde{\pi}_{n+2}(\Gamma)$ et $d_{n+2}z = x\bar{x}$, mais comme Γ est minimal, on a $d_{n+2}z = e_{n+1}$. Ainsi $x\bar{x} = e_{n+1}$, et Γ_{n+1} est un groupe.

3.- Complexes minimaux ayant au plus un groupe d'homotopie non nul.

Proposition 3 : Soit n un entier ≥ 0 , et soit Γ un complexe de groupes minimal, tel que $\pi_q(\Gamma) = 0$ pour $q \neq n$. Alors Γ est abélien dans chacun des deux cas suivants : (a) si $n \neq 0$; (b) si $n = 0$ et $\pi_o(\Gamma)$ est abélien.

Démonstration : puisque Γ est minimal, on a $\Gamma_q = 0$ pour $q < n$, et $\Gamma_n = \tilde{\pi}_n(\Gamma) = \pi_n(\Gamma)$, qui est abélien dans chacun des (a) et (b). Soit alors m un entier $\geq n$, et supposons que Γ_q soit abélien pour $q \leq m$; montrons que Γ_{m+1} est abélien. Soient x et $y \in \Gamma_{m+1}$; on a $d_i(xyx^{-1}y^{-1}) = e_m$ puisque Γ_m est abélien. Donc $xyx^{-1}y^{-1}$ est dans $\tilde{\pi}_{m+1}(\Gamma)$, d'où $xyx^{-1}y^{-1} = e_{m+1}$. C.Q.F.D.

Théorème 3 : Soit π un groupe abélien, et soit n un entier ≥ 0 . Il existe un complexe de groupes minimal Γ tel que $\pi_q(\Gamma) = 0$ pour $q \neq n$ et $\pi_n(\Gamma) = \pi$; un tel complexe est unique à un isomorphisme près.

Démonstration : par récurrence sur l'entier n . Supposons d'abord $n = 0$; alors $\Gamma_o = \pi$; et comme Γ est minimal, $\Gamma^{(1)}$ est minimal et $\pi_q(\Gamma^{(1)}) = 0$ pour tout q . Ainsi $\Gamma_q^{(1)} = 0$ pour tout q , et l'application $p : \Gamma^{\#}_q \longrightarrow \Gamma_q$ est un isomorphisme pour tout q, ce qui signifie que $d_o : \Gamma_{q+1} \longrightarrow \Gamma_q$ est un isomorphisme pour tout q. Ainsi $\Gamma_{q+1} = \Pi$ pour tout q, et le complexe Γ est unique (à un isomorphisme près).

Supposons maintenant le théorème vrai pour tous les $n \leq m$ (m entier ≥ 0 donné), et montrons le théorème pour $n = m+1$. Si Γ existe, $\Gamma^{(1)}$ est l'unique complexe minimal tel que $\Pi_q(\Gamma^{(1)}) = 0$ pour $q \neq m$ et $\Pi_m(\Gamma^{(1)}) = \Pi$; or $(R(\Gamma^{(1)}), R(\Gamma), R(\Gamma^{\#}))$ est une construction satisfaisant à la condition W (th. 1). L'unicité de la construction $\bar{W}$ (Exposé 12, corollaire de la p. 12-05) entraîne l'unicité de Γ. Quant à l'existence, elle résulte de celle de la construction $\bar{W}$, qui, appliquée à un complexe de groupes abéliens, donne un complexe de groupes abéliens.

<u>Notation</u> : Π désignant un groupe abélien, on désignera par $\Gamma(\Pi, n)$ l'unique complexe de groupes minimal tel que $\Pi_q(\Gamma) = 0$ pour $q \neq n$ et $\Pi_q(\Gamma) = \Pi$.

<u>Théorème 4</u> : <u>Soit</u> Π <u>un groupe abélien, et</u> n <u>un entier</u> ≥ 0. <u>Le complexe</u> $\Gamma(\Pi, n)$ <u>n'est autre que le complexe</u> Γ <u>décrit dans l'Exposé 13, paragraphe 5</u> (rappelons que $\Gamma_q = Z^n(\Delta_q ; \Pi)$, avec les notations de cet Exposé). <u>On a donc</u> $K(\Pi, n) = R(\Gamma(\Pi, n))$.

<u>Démonstration</u> : il suffit de montrer que $\Pi_q(\Gamma) = 0$ pour $q \neq n$, et $\Pi_n(\Gamma) = \Pi$. C'est vrai pour $q \leq n$, car $Z^n(\Delta_q ; \Pi) = 0$ pour $q < n$, et $Z^n(\Delta_n ; \Pi) = \Pi$. Soit maintenant $q > n$, et $x \in \tilde{\Pi}_q(\Gamma)$, c'est-à-dire $x \in Z^n(\Delta_q ; \Pi)$ tel que $d_i x = e_q$ pour $i < q$. Ceci signifie que $x(m_o, \dots, m_n) = 0$ sauf si $(m_o, \dots, m_n) = (0, 1, \dots, n)$. De plus $\delta x = 0$; ceci entraîne $x(0, 1, \dots, n) = 0$. Ainsi $\tilde{\Pi}_q(\Gamma) = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

4.- <u>Structure des complexes minimaux.</u>

<u>Définition 2</u> : soit Γ un complexe monoïdal avec homotopie. On note Q l'application $\Gamma \longrightarrow \Gamma(\Pi_o(\Gamma), 0)$ telle que Q_o soit l'application naturelle $\Gamma_o \longrightarrow \Pi_o(\Gamma)$, et $Q_{q+1} : \Gamma_{q+1} \longrightarrow \Pi_o(\Gamma)$ soit $Q_o(d_o)^{q+1}$ pour $q \geq 0$. <u>On note</u> $\bar{\Gamma}$ <u>le noyau de</u> Q.

<u>Théorème 5</u> : <u>Soit</u> Γ <u>un complexe monoïdal avec homotopie. Alors</u> :

1) $\bar{\Gamma}$ <u>est un complexe monoïdal avec homotopie</u> ;

2) $\pi_0(\overline{\Gamma}) = 0$, $\pi_q(\overline{\Gamma}) = \pi_q(\Gamma)$ pour $q > 0$;

3) $H_0(\overline{\Gamma}) = Z$, $H_*(\Gamma) = H_*(\overline{\Gamma}) \otimes Z(\pi_0(\Gamma))$;

4) <u>si Γ est un complexe de groupes, minimal en dimension 0 , alors la suite exacte</u>

$$0 \longrightarrow \overline{\Gamma} \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \Gamma(\pi_0(\Gamma), 0)$$

<u>est une extension inessentielle de groupes</u>.

<u>Démonstration</u> : 1) soit donné k , et soient $x_0, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{q+1} \in \overline{\Gamma}_q$ tels que $d_i x_j = d_{j-1} x_i$ pour $i < j$ tels que $i \neq k$, $j \neq k$. Soit $x \in \Gamma_{q+1}$ tel que $d_i x = x_i$ pour $i \neq k$; on a

$$Q_0(d_0)^{q+1} x = Q_0(d_0)^q x_0 = 0 \quad \text{si } k \neq 0 \text{ ; et, si } k = 0 ,$$

$$Q_0(d_0)^{q+1} x = Q_0(d_0)^{q-1} d_0 d_1 x = Q_0(d_0)^q x_1 = 0 .$$ On a donc $x \in \overline{\Gamma}_{q+1}$; et le complexe $\overline{\Gamma}$ satisfait à la condition de Kan. Montrons que $\overline{\Gamma}$ satisfait à l'axiome de remplacement : soient $x \in \overline{\Gamma}_{q+1}$, et $y, y', y'' \in \overline{\Gamma}_q$, avec $d_k x = y' y \bar{y} y''$ et $d_j(y\bar{y}) = e_{q-1}$ pour $0 \leq j \leq q$. Soit $z \in \Gamma_{q+1}$ tel que $d_j z = d_j x$ pour $j \neq k$, $d_k z = y' y''$. On montre comme plus haut que $Q_0(d_0)^{q+1} z = 0$, donc $z \in \overline{\Gamma}_{q+1}$. Ainsi $\overline{\Gamma}$ est bien un complexe avec homotopie.

2) soit $q > 0$ et $x \in \tilde{\pi}_q(\Gamma)$. On a $d_i x = e_{q-1}$ pour $i < q$, donc $x \in \tilde{\pi}_q(\overline{\Gamma})$, d'où $\tilde{\pi}_q(\Gamma) = \tilde{\pi}_q(\overline{\Gamma})$ pour $q \geq 1$. Ceci implique $\pi_q(\Gamma) = \pi_q(\overline{\Gamma})$ pour $q \geq 2$; montrons que $\pi_1(\Gamma) = \pi_1(\overline{\Gamma})$. Pour le voir, on observe que le noyau de $d_1 : \tilde{\pi}_1(\Gamma) \longrightarrow \tilde{\pi}_0(\Gamma)$ est le même que le noyau de $d_1 : \tilde{\pi}_1(\overline{\Gamma}) \longrightarrow \tilde{\pi}_0(\overline{\Gamma})$, même si $\tilde{\pi}_0(\Gamma)$ est distinct de $\tilde{\pi}_0(\overline{\Gamma})$. Reste à montrer que $\pi_0(\overline{\Gamma}) = 0$, c'est-à-dire que $d_1 : \tilde{\pi}_1(\overline{\Gamma}) \longrightarrow \tilde{\pi}_0(\overline{\Gamma})$ est un épimorphisme ; or cela résulte du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\pi}_1(\overline{\Gamma}) \arrow[d, "d_1"] & = & \tilde{\pi}_1(\Gamma) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma_0 \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & \pi_0(\Gamma) \arrow[d, leftrightarrow] \\
\tilde{\pi}_0(\overline{\Gamma}) & = & \overline{\Gamma}_0 \arrow[r] & \Gamma_0 \arrow[r] & \pi_0(\Gamma)
\end{tikzcd}$$

dont les suites horizontales sont exactes.

3) et 4) si Γ est minimal en dimension 0 , soit $u_o : \pi_o(\Gamma) \longrightarrow \Gamma_o$ l'application identique ; sinon, soit u_o n'importe quelle application de $\pi_o(\Gamma)$ dans Γ_o transformant l'élément neutre en l'élément neutre, et telle que $Q_o\, u_o$ soit l'identité. Définissons $u_q : \pi_o(\Gamma) \longrightarrow \Gamma_q$ en posant $u_q = (s_o)^q u_o$. Alors $Q_q\, u_q$ est l'identité. Définissons $\alpha : \overline{\Gamma}_q \times \Gamma_q(\pi_o(\Gamma)\ , 0) \longrightarrow \Gamma_q$ par $\alpha(x,y) = x.u(y)$, et $\beta :$ $\Gamma_q \longrightarrow \overline{\Gamma}_q \times \Gamma_q(\pi_o(\Gamma)\ , 0)$ par $\beta(x) = (x.\overline{uQ(x)}\ , Q(x))$. Alors $\alpha\beta(x) = x.\overline{uQ(x)}uQ(x)$, et $\beta\alpha(x,y) = (x.u(y).\overline{u(y)}\ , y)$.

Si maintenant Γ est un groupe, $\alpha\beta$ est l'identité, $\beta\alpha$ aussi, d'où 4). Même si Γ n'est pas un groupe, $\alpha\beta$ et $\beta\alpha$ sont homotopes à l'identité, ce qui établit 3).

<u>Théorème 6</u> : <u>Si</u> Γ <u>est un complexe de groupes minimal et abélien, on a</u> $\Gamma = \mathop{\times}\limits_{n=0}^{\infty} \Gamma(\pi_n(\Gamma)\ , n)$, <u>produit des complexes</u> $\Gamma(\pi_n(\Gamma)\ , n)$.

<u>Démonstration</u> : d'après le théorème 5, Γ est isomorphe au produit $\overline{\Gamma} \times \Gamma(\pi_o(\Gamma)\ , 0)$. D'ailleurs $\overline{\Gamma}$ est minimal, et $\pi_o(\overline{\Gamma}) = 0$ d'après le th.5. On a donc $\overline{\Gamma} = \overline{W}(\overline{\Gamma}^{(1)})$. Or $\overline{\Gamma}^{(1)} = \overline{\overline{\Gamma}} \times \Gamma(\pi_1(\Gamma)\ , 0)$, d'où $\Gamma = \overline{W}(\overline{\overline{\Gamma}}) \times \Gamma(\pi_1(\Gamma)\ , 1) \times \Gamma(\pi_o(\Gamma)\ , 0)$. Le théorème se prouve alors par récurrence.

APPENDICE

Construction $\overline{W}$ sur l'espace des lacets.

Soit X un espace topologique connexe par arcs ; notons $\overline{X}$ son complexe singulier ($\overline{X}_q$ se compose des q-simplexes singuliers) , et $H(\overline{X})$ l'homologie du groupe abélien libre ayant $\overline{X}$ pour base. Rappelons que $\Omega(X,x_o)$ désigne le complexe singulier de l'espace des lacets de X , d'origine x_o . On se propose de montrer :

<u>Théorème 7</u> : <u>Il existe une application de complexes</u>

$$f : \overline{W}(\Omega(X,x_o)) \longrightarrow \overline{X}$$

<u>telle que l'homomorphisme</u> $f_* : H(\overline{W}(\Omega(X,x_o)) \longrightarrow H(\overline{X})$ <u>soit un isomorphisme</u>.

<u>Démonstration</u> : rappelons que $\Omega(X,x_o)$ est un complexe monoïdal avec

homotopie (Exposé 18, th.2). Notons E l'espace $E(X,x_0)$; alors $\Omega(X,x_0)$ est un sous-complexe de $\bar{E}$, et $\Omega(X,x_0)$ <u>opère à gauche</u> dans $\bar{E}$. En utilisant l'homotopie explicite de contraction de E (l'application S de la démonstration du th.2 de l'Exposé 18) , on peut définir une application $W(\Omega(X,x_0)) \longrightarrow \bar{E}$ compatible avec les filtrations, exactement comme dans la démonstration du théorème 2 de l'Exposé 12 (p. 12-04). Par conséquent, si $\pi_0(\Omega(X,x_0)) = 0$, le présent théorème résulte du théorème A de l'Exposé 3 . De plus il est clair que $\pi_0(\Omega(X,x_0)) = \pi_1(X,x_0)$; donc le théorème est vrai si X est simplement connexe.

Si X n'est pas simplement connexe, soit X^* un espace contenant X et tel que $\pi_1(X) \approx \pi_1(X^*)$, $\pi_q(X^*) = 0$ pour $q \geq 2$ (cf. [1]). Soit Y l'espace des chemins de X^* dont l'origine est dans X . Alors X est rétracte de déformation de Y , et il suffit de prouver que $H(\bar{W}(\Omega(Y,x_0)) \approx H(\bar{Y})$. Or Y est un espace fibré de base X^* , avec une fibre F telle que $\pi_q(F) \approx \pi_q(Y)$ pour $q \geq 2$, et $\pi_1(F) = 0$. En outre, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \bar{W}(\Omega(Y,x_0)) & \xrightarrow{g} & \bar{W}(\Omega(X^*,x_0)) \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 \\ \bar{Y} & \xrightarrow{h} & \bar{X}^* \end{array}$$

où les applications sont les applications naturelles. Finalement,

$E^2(\bar{W}(\Omega(Y,x_0))) = H(H(\bar{W}(\Omega(F,x_0))) \otimes \bar{W}(\Omega(X^*,x_0)))$, et

$E^2(\bar{Y}) = H(H(F) \otimes \bar{X}^*)$; comme F est simplement connexe, et que chacun des complexes $\bar{W}(\Omega(X^*,x_0))$ et $\bar{X}^*$ est équivalent à $\Gamma(\pi_1(X,x_0), 1)$ (par une "chaîne-équivalence") , le théorème s'ensuit.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.H.C. WHITEHEAD, <u>On the realizability of homotopy groups</u> (Ann. of Math. 50, 1949, p.261-263).