Séminaire Henri Cartan

R. Thom

Opérations en cohomologie réelle

Séminaire Henri Cartan, tome 7, n° 2 (1954-1955), exp. n° 17, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1954-1955__7_2_A7_0>

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire H. CARTAN, E.N.S., 1954/55.

OPÉRATIONS EN COHOMOLOGIE RÉELLE.

(Exposé de R. THOM, 28.3.1955)

1.- Soit E un espace, et soient x , y deux classes de cohomologie de E (dans des groupes de coefficients G , G' arbitraires). On sait que y est une <u>construction cohomologique</u> de la classe x , si, pour toute application f de E dans un espace arbitraire A , la relation $x = f^*(x')$, $x' \in H^*(A ; G)$ entraîne que y est de la forme $y = f^*(y')$, $y' \in H^*(A ; G')$. Rappelons qu'en ce cas, on a toujours $\dim y \geq \dim x$ (sauf si $y = 0$ ou $\dim y = 0$), et qu'on obtient toutes les constructions y de x en prenant pour espace A le complexe d'Eilenberg-Mac Lane $K(G , \dim x)$ de classe fondamentale j , avec l'application $f : E \to K$ telle que $f^*(j) = x$.

Si on transcrit cette définition, par dualité, sur les classes d'homologie, on est amené à considérer, non plus les images de f^* , mais les noyaux de f_* . Il est par suite naturel d'introduire la définition suivante :

<u>Classes subordonnées d'une classe</u> . Soit $x \in H^p(E ; G)$ une classe de cohomologie d'un espace E ; une classe $y \in H^q(E ; G')$ sera dite <u>subordonnée à</u> x , si, pour toute application f d'un espace arbitraire A dans E , la relation $f^*(x) = 0$ entraîne la relation $f^*(y) = 0$.

Il est clair que l'ensemble des classes subordonnées d'une classe x constitue un idéal dans $H^*(E)$ (pour peu qu'on ait défini une structure multiplicative de cup-produit dans $H^*(E)$).

On définira de façon analogue l'idéal des classes subordonnées à un nombre quelconque de classes $(x_1 , x_2 , \ldots , x_r) \in H^*(E)$.

Pour déterminer l'ensemble des classes subordonnées à une classe donnée $x \in H^p(E ; G)$, donnons-nous une application $f : E \to K(G , p)$, telle que $f^*(j) = x$ (cf. Exposé 14, paragraphe 2). On sait que $K(G , p)$ est la base d'un espace fibré $\mathfrak{A}$ acyclique (l'espace des chemins sur $K(G , p)$), dont la fibre (espace des lacets sur $K(G , p)$) a l'homotopie de $K(G,p-1)$. L'image réciproque, pour f , du fibré $\mathfrak{A}$ est un espace fibré Q_x de base E , de fibre $K(G , p-1)$. On appellera Q_x l'<u>espace fibré canonique attaché à la classe</u> x . De même, pour un nombre fini de classes $x_i \in H^{p_i}(E ; G_i)$, on définira un fibré <u>canonique multiple</u> Q_{x_i} associé aux (x_i) en considérant l'application de E dans le produit de complexes d'E.M.L. $\prod_i K(G_i , p_i)$ qui induit les x_i ; ce produit est sa base d'un espace acyclique $\mathfrak{A}$ dont la fibre est un produit $\prod_i K(G_i , p_i - 1)$, et Q_{x_i} est l'espace image réciproque de $\mathfrak{A}$.

L'espace fibré canonique Q_x est fibré de base E ; soit $p : Q_x \to E$ l'application de Q_x sur la base et $p^* : H^*(E ; G') \to H^*(Q_x ; G')$ l'homomorphisme induit par cette application. On a alors le théorème :

<u>Théorème 1</u> : <u>L'ensemble des classes subordonnées à une classe</u> x <u>s'identifie au noyau de l'homomorphisme</u> p^* <u>induit par la projection</u> $p : Q_x \to E$ <u>du fibré canonique</u> Q_x <u>attaché à</u> x .

La considération du diagramme commutatif :

$$(2) \qquad \begin{array}{ccc} Q_x & \xrightarrow{f_1} & \mathfrak{A} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_1} \\ E & \xrightarrow[f]{} & K(G , p) \end{array}$$

montre que $p^*(x) = p^*(f^*(j)) = f_1^* \, p_1^*(j) = f_1^*(0) = 0$. Donc toute classe subordonnée à x appartient au noyau de p^* .

Soit réciproquement une classe y du noyau de p^* ; pour montrer que y est subordonnée à x , soit $g : A \to E$ une application d'un espace arbitraire A dans E , telle que $g^*(x) = 0$; soit Y le fibré, image réciproque de Q_x pour g ; Y est le fibré canonique associé à la classe nulle sur A ; c'est donc le produit $A \times K(G , p-1)$, et Y admet une section $s : A \to Y$; il en résulte que l'application $g : A \to E$ se factorise en $A \xrightarrow{h} Q_x \xrightarrow{p} E$; par suite $g^*(y) = h^* \, p^*(x) = h^*(0) = 0$.

<u>Corollaire</u> : <u>Toute classe</u> y , <u>construction de la classe</u> x , <u>est subordonnée à</u> x. En effet, toute classe de $K(G , p)$ donne une image nulle dans $H^*(Q_x)$ d'après le diagramme (2) . Question : pourrait-on démontrer cette propriété sans passer par les complexes d'E.M.L. ?

C'est une remarque banale - fort utile néanmoins - que le type d'homotopie d'un fibré canonique Q_x sur E ne dépend que de la classe x , et du type d'homotopie de E . La cohomologie $H^*(Q_x)$ doit ainsi pouvoir se calculer entièrement en fonction de la cohomologie de E . C'est ce calcul que nous allons effectuer en <u>coefficients réels</u>, sous réserve d'une difficulté théorique qui sera signalée.

La notion de fibré canonique joue d'ailleurs un rôle essentiel dans la décomposition de Postnikov d'un type d'homotopie en ses fibrés successifs E_i de fibre $K(G_i , i)$, d'invariant $k_i \in H^i(E_i)$; chacun des fibrés successifs E_{i+1} est le fibré canonique associé à $k_i \in H^i(E_i)$.

2.- Subordination en coefficients réels.

On considère une classe $x \in H^n(E ; R)$ à coefficients réels. Le fibré canonique Q_x associé a pour fibre le complexe $K(R , n-1)$; rappelons que la cohomologie $H^*(R , n-1 ; R)$ à coefficients réels est, pour n pair, isomorphe à celle d'une sphère de dimension impaire S^{n-1} (de générateur $v \in H^{n-1}(R , n-1 ; R)$) ; pour n impair, c'est une algèbre de polynômes (sur R) engendrée par un générateur v , soit $S(v)$.

Cas où n est pair : La fibre $K(R , n-1)$ ayant la cohomologie d'une sphère S^{n-1} , la cohomologie réelle de l'espace fibré Q_x est donnée par la suite exacte de Gysin :

$$\longrightarrow H^{r-1}(Q_x) \longrightarrow H^{r-n}(E) \xrightarrow{\cup x} H^r(E) \xrightarrow{p^*} H^r(Q_x) \longrightarrow$$

où les homomorphismes en seconde et troisième position sont resp. le cup-produit par x , et l'homomorphisme p^* . Il en résulte immédiatement que toute classe y du noyau de p^* est un multiple de x , d'où :

Théorème 2 : Toute classe y , à coefficients réels, subordonnée à une classe x de dimension paire, est multiple de x dans l'anneau de cohomologie de E .

En ce cas, il n'y a pas d'autre subordination que le cup-produit. Tirons encore une conséquence pour les espaces fibrés en sphères : soit Y un espace fibré en sphères S^{n-1} de dimension impaire $n-1$; soit x la classe caractéristique de l'espace Y , et soit $q : Y \longrightarrow E$ la projection correspondante ; puisque $q^*(x) = 0$, il existe une application $g : Y \longrightarrow Q_x$ telle que q se factorise en : $Y \xrightarrow{g} Q_x \xrightarrow{p} E$, et l'application g applique chaque fibre S^{n-1} de Y dans la fibre $K(R , n-1)$ de Q_x avec conservation des classes fondamentales ; par suite, g^* induit un isomorphisme des suites exactes de Gysin relatives aux espaces fibrés Y et Q_x ; par suite g^* induit un isomorphisme additif de $H^*(Q_x)$ sur $H^*(Y)$, qui, en tant qu'homomorphisme induit par une application, est aussi un isomorphisme multiplicatif. D'où :

Théorème 3 : L'anneau de cohomologie réelle d'un espace fibré en sphères, de dimension impaire, s'il est orientable, ne dépend que de la classe caractéristique fondamentale x (à coefficients réels) de l'espace fibré.

On verra plus loin comment on peut effectivement déterminer cette cohomologie.

Cas où n est impair ($n = p+1$, p pair).

En ce cas, le fibré canonique Q_x admet pour fibre $K(R,p)$, dont la cohomologie réelle est l'algèbre de polynômes $S(v)$. La suite spectrale de cette fibration peut présenter des différentielles de Leray d_i non nulles pour tout $i \equiv 1 \mod p$. Il importe de donner un procédé canonique permettant de déterminer ces différentielles, par la seule donnée de l'espace de base E . A cet égard, la théorie de Hirsch permet de fournir l'argument nécessaire, avec toutefois l'hypothèse suivante : tous les espaces fibrés considérés admettent des "couvertures" (systèmes de cochaînes) fines et anticommutatives pour le cup-produit ; on suppose en outre que la théorie de la suite spectrale d'une fibration peut être étendue à ces couvertures.

Il est assez légitime de prétendre que, pour une catégorie étendue d'espaces (par ex. les C.W. complexes), on peut trouver, en coefficients réels, des couvertures de ce type. En effet, la propriété est vraie des polyèdres finis, car ce sont des rétractes par déformation de variétés différentiables (à bord) pour lesquelles les formes différentielles fournissent le type de cochaînes cherché. Par contre, il parait difficile d'étendre à ces cochaînes la théorie de la suite spectrale d'une fibration, cette suite spectrale n'étant établie, pour une fibration du type espace de chemins sur un espace, que pour les cochaînes singulières, pour lesquelles l'anticommutativité laisse à désirer ...

Rappel sur la théorie de Hirsch.

Soit Q_x le fibré canonique associé à la classe $x \in H^{p+1}(E ; R)$; la cohomologie de la fibre $K(R ; p)$ est une algèbre de polynômes à un générateur u de degré pair p . Soit u' une cochaine de Q_x , telle que $d u' = p^*(x')$, x' désignant un cocycle, choisi une fois pour toutes, dans la classe x . La restriction de u' à la fibre $K(R ; p)$ donne la classe fondamentale u . Le choix de la cochaine u' permet de définir un isomorphisme V du produit tensoriel $C(E) \otimes H^*(R , p)$ du groupe des cochaînes de la base par la cohomologie de la fibre dans le groupe $C(Q_x)$ des cochaînes de l'espace fibré, comme suit :

$$V(a \otimes u^r) = p(a) \cup (u')^r .$$

On observera que V est également un isomorphisme pour la structure <u>multiplicative</u> du cup-produit. L'image $V(C(E) \otimes H^*(F))$ constitue une sous-algèbre de $C(Q_x)$; le résultat essentiel de la théorie de Hirsch consiste à affirmer qu'elle suffit à obtenir la cohomologie de Q_x et qu'on peut remplacer $C(Q_x)$ par $V(C(E) \otimes H^*(F))$; ce qui se démontre en remarquant que $V(C(E) \otimes H^*(F))$ s'identifie au terme E_1 de la suite spectrale associée à la fibration. Ceci étant admis, le cobord d dans $C(Q_x)$ est transformé par l'isomorphisme V^{-1} en un opérateur Δ défini comme suit :

$$\Delta(a \otimes u^r) = r\, a\, x' \otimes u^{r-1} \pm da \otimes u^r .$$

Il suffira donc de former la Δ-cohomologie du produit tensoriel $C(E) \otimes H^*(F)$ pour obtenir la cohomologie $H^*(Q_x)$, et même, dans le cas actuel, avec sa structure multiplicative.

Revenons maintenant à notre problème : déterminer le noyau de l'homomorphisme $p^* : H^*(E) \longrightarrow H^*(Q_x)$. Si $z \in H^*(E)$ est annulée par p^*, il existe un cocycle z' de la classe z, et un élément $c \in C(E) \otimes H^*(F)$, tel que :

$$z' = \Delta c .$$

Si on explicite $c = \sum_{j=0}^{r} b_j \otimes u^j$, on trouve par identification :

$\pm j\, b_j\, x' + d\, b_{j-1} = 0$, pour $1 \leq j \leq r$; $d\, b_r = 0$; $z' = \pm b_1 . x' + d\, b_0$.

Ces formules définissent une "opération" en cohomologie réelle ; désignons-la par $D_r(b_r) = z$; on vérifie aisément que les opérations D_r se définissent par récurrence comme suit : $D_1(b_1) = \pm b_1 . x$; D_r est définie sur toute classe $y \in H^*(E)$ telle que $D_{r-1}(y) = 0$; si, pour un cocycle représentatif y' de y, on a $D_{r-1}(y') = d\, b$, alors $D_r(y)$ est la classe du cocycle $\pm b . x'$. On vérifie également par récurrence que l'opération D_r est définie modulo le groupe $D_{r-1}(H^*(E))$. On voit aisément, par ailleurs, que ces opérations D_r sont liées aux différentielles de Leray d_{rp+1} de la suite spectrale (classique) de la fibration $Q_x \longrightarrow E$, par la formule :

$$d_{rp+1}(y \otimes u^r) = D_r(y) \otimes 1 ;$$

D_r augmente la dimension de $rp+1$.

On peut voir, en fabriquant des complexes universels pour ces opérations, que toutes les D_r sont non triviales. Il existe donc des cl~~asses subordonnées~~

à une classe x de dimension impaire, qui ne sont pas multiples de x au sens du cup-produit.

Exemple d'une classe subordonnée non multiple. Soit $S^7 \longrightarrow S^4$, de fibre s, la fibration de Hopf ; soit $f : S^3 \times S^1 \longrightarrow S^4$ une application de degré un, M^7 l'espace fibré induit sur $S^3 \times S^1$ par f de la fibration de Hopf : c'est une variété de dimension 7 ; désignons par v, t les classes fondamentales de $S^3 \times 1$, $1 \times S^1$ resp. de la base. Dans $C(M)$, on a la relation $p^*(vt) = d\,s'$, où la cochaîne s' induit la classe fondamentale de la fibre s. La cohomologie de M est celle du produit Base $\times$ Fibre, dans lequel on a supprimé les produits $1 \times 1 \times s$ et $v \times t \times 1$. Il reste une classe u de dimension 6. On vérifie sans difficulté que cette classe u est subordonnée, dans $H^*(M)$, à la classe $v \in H^3(M)$; si on forme en effet, sur M, le fibré canonique Q_v relatif à v, on constate que $u = D_2(t)$.

(Rappelons que l'espace fibré $M \to S^3 \times 1$, de fibre $S^3 \times S^1$, a servi à Hirsch de contre-exemple pour montrer que l'existence d'une section n'entraîne pas la trivialité de la suite spectrale ; à Serre, pour montrer qu'un espace fibré différentiable n'admet pas toujours pour groupe de structure un groupe de Lie.)

3.- Subordinations à deux variables.

Soient $x \in H^p(E)$, $y \in H^q(E)$ deux classes réelles supposées d'abord de dimensions paires ; formons le fibré canonique multiple $Q_{x,y}$ sur E ; il a pour fibre le produit $K(R\,,\,p-1) \times K(R\,,\,q-1)$, dont la cohomologie est une algèbre extérieure à deux variables $A(u\,,\,v)$. La théorie précédente conduit à former le produit tensoriel $C(E) \otimes A(u\,,\,v)$ muni de l'opérateur bord Δ défini par $\Delta\,(a \otimes u) = d\,a \otimes u \pm a\,x \otimes 1$; $\Delta\,(a \otimes v) = d\,a \otimes v \pm (a\,y \otimes 1)$ (Ici, on remplace x, y par des cocycles représentatifs choisis une fois pour toutes). La recherche des classes z subordonnées à x et y conduit à la formule :

$$z \otimes 1 = \Delta\,(a \otimes (uv) + b \otimes u + c \otimes v + e \otimes 1) \text{ ; soit, par identification,}$$

$$da = 0 \text{ ; } -a\,y + db = 0 \text{ ; } a\,x + dc = 0 \text{ ; } b.\,x + c.\,y + d\,e = z \text{ .}$$

On obtient donc, outre les multiples de x et y, les éléments définis par l'opération classique de Massey, définie sur une classe $a \in H^*(E)$ telle que $a.x = 0$, $a.y = 0$.

Théorème 4 : L'ensemble des classes subordonnées à deux classes x, y

de dimensions paires est engendré par les classes images par une opération de Massey associée au couple (x, y) (i.e. définie sur une classe u telle que $u.x = u.y = 0$).

Une telle opération n'étant définie que modulo l'idéal engendré par x et y, il est inutile de mentionner ce dernier.

Si l'une des classes, x par exemple, est de dimension impaire, la fibre a pour cohomologie $S(u) \otimes A(v)$; la forme générale d'une cochaîne du produit $C(E) \otimes H(F)$ est $c = \sum a_i \ (u)^i + \sum b_j \ (u)^j v$.

L'identification $z = \triangle c$ conduit aux relations :

$d a_r = d b_s = 0$; $i a_i x + b_{i-1}.y + d a_{i-1} = 0$; $j b_{j-1} x + d b_{j-1} = 0$,

$z = d a_0 + a_1 x + b_0 y$,

ce qui définit encore toute une série d'opérations à deux variables auxiliaires, subordonnées les unes aux autres, suivant le degré en u. Si on avait deux classes x, y de dimensions impaires, la fibre de $Q_{x,y}$ aurait pour cohomologie une algèbre de polynômes à deux variables $S(u, v)$; toute forme homogène de degré total k en u et v définit une opération D_k définie sur les cocycles qui figurent (comme variables auxiliaires) dans les coefficients de la forme.

4.- Détermination de la structure multiplicative de la cohomologie d'un fibré canonique. Exemple d'opérations d'espèce supérieure.

Revenons au cas d'un fibré canonique Q_x associé à une classe x de dimension paire n. La suite exacte de Gysin

$$H^{r-1}(Q_x) \xrightarrow{\psi^*} H^{r-n}(E) \longrightarrow H^r(E) \longrightarrow H^r(Q_x) \longrightarrow$$

détermine la structure additive de $H^*(Q_x)$; rappelons qu'un supplémentaire dans $H^*(Q_x)$ de l'image $p^*(H^*(E))$ est isomorphe à l'idéal $\mathfrak{A}$ des annulateurs de x. Dans la théorie de Hirsch, soit s la classe fondamentale de la fibre ; un cocycle de $C(E) \otimes A(s)$ est de la forme $c \otimes s + e \otimes 1$, où $d c = 0$, avec $c x + d e = 0$. Si u désigne la classe de ce cocycle dans $H^*(Q)$, alors on a $\psi^*(u) =$ classe de c. Ceci permet la détermination complète de la structure multiplicative de $H^*(Q_x)$; soient en effet deux cocycles $u = c \otimes s + e \otimes 1$; $v = a \otimes u + b \otimes 1$, avec encore $db = - a x$; on aura pour le produit de u et v (supposées de dimensions paires) : $u . v \neq (c \otimes s + e \otimes 1).(a \otimes u + b \otimes 1) = (cb-a e) \otimes s + eb \otimes 1$. On voit que

$\psi^*(u.v) = (cb-ae)$, classe image de (c , a) par l'opération de Massey associée aux relations $a\ x = c.x = 0$. Supposons que , par un choix convenable des cochaînes b et e , cette classe puisse être annulée ; on pourra alors trouver une cochaîne f , telle que $c\ b-a\ e = d\ f$; comme $d\ f \otimes s \simeq -(f\ x \otimes 1)$, $u.v$ est aussi homologue à $(eb - fx)\otimes 1$, donc de la forme $p^*(X)$, où X est la classe dans $H^*(E)$ du cocycle $(e.b-f.x)$, définie à un multiple de x près. Cette opération, qui, à deux classes a , $c \in H^*(E)$, telles que $a\ x = c\ x = 0$, et que l'opération de Massey associée $(a , c)_x$ soit nulle, associe la classe X , n'est pas, comme on peut le vérifier aisément, une subordination de x ; en effet, son image $p^*(X)$ dans le fibré canonique Q_x n'est pas nulle en général, puisqu'elle est égale au produit $u.v$, avec $\psi^*(u) = c$, $\psi^*(v) = a$. Il faudrait tuer une "nouvelle" classe apparue dans la cohomologie du fibré canonique Q_x associé à x , comme u ou v , pour tuer la classe X . On a donc ainsi une "opération d'espèce supérieure".

De façon générale, on dira qu'une classe $x \in H^n(E)$ <u>n'est pas primitive</u> dans la cohomologie de E , si on peut trouver une suite de fibrés canoniques $E \longleftarrow Q_{u_1} \longleftarrow Q_{u_2} \longleftarrow \dots Q_{u_r}$, chacun des Q_{u_i} étant canonique sur le précédent et la dimension de toute classe u_i étant strictement inférieure à n , (et $\dim u_i$ croissante) , de manière que, dans la projection composée $p : Q_u \longrightarrow E$, on ait $p^*(x) = 0$. Cette notion présente un intérêt dans le problème classique suivant : caractériser en homologie le sous-groupe des classes sphériques, images dans $H_n(E)$ du groupe d'homotopie $\pi_n(E)$ par l'homomorphisme canonique. En cohomologie, il revient au même de caractériser, dans $H^n(E)$, le sous-groupe des classes des annulateurs sphériques (spherical annihilators). Or : <u>une classe</u> $x \in H^n(E ; R)$ <u>est un annulateur sphérique, si et seulement si c'est une classe non primitive</u>.

En effet, si x est non primitive, il existe une suite de fibrés canoniques $E \longleftarrow Q_{u_1} \dots \longleftarrow Q_{u_i}$ du type indiqué plus haut, telle que, dans la projection globale $p : Q \longrightarrow E$, on ait $p^*(x) = 0$. Considérons une application f de la sphère S^n dans E ; comme $f^*(u_1) = 0$, f se relève en une application $f_1 : S^n \longrightarrow Q_{u_1}$; comme $f_1^*(u_2) = 0$ (pour raison de dimension), f_1 se relève en $f_2 : S^n \longrightarrow Q_{u_2}$, etc ... ; finalement f est projection d'une application $f_r : S^n \longrightarrow Q_{u_r}$, telle que $f = p \circ f_r$. Par suite $\langle f_*(S^n) , x\rangle = \langle p_*(f_r)_*(S^n) , x\rangle = \langle f_r(S^n) , p^*(x)\rangle = 0$

Supposons maintenant $x \in H^n(E ; R)$ primitive ; on peut former, après un nombre fini de fibrations, un fibré canonique superposé Q_{u_r} du type précédent, tel que la cohomologie $H^i(Q_{u_r} ; R)$ soit nulle pour $0 < i < n$; soit p la projection $p : Q_{u_r} \longrightarrow E$; si x est primitive, la classe $x' = p^*(x)$ n'est pas nulle ; d'après le théorème de Hurewicz en C-théorie (C : classe des groupes finis) , il existe une application $g : S^n \longrightarrow Q_{u_r}$, telle que $\langle g_*(S^n), x' \rangle \neq 0$; si $f = p \circ g$, on aura par suite

$\langle p_* g_*(S^n) , x \rangle = \langle g_*(S^n), p^*(x) \rangle = \langle g_*(S^n) , x' \rangle \neq 0$.

Ceci va nous permettre d'énoncer le théorème suivant :

<u>Théorème 5</u> : <u>Si un espace</u> E <u>est tel que</u> $H^i(E ; R)$ <u>soit nul pour</u> $0 < i \leq \frac{n}{3} + \frac{1}{2}$, <u>le sous-groupe des annulateurs sphériques dans</u> $H^n(E ; R)$ <u>est formé du sous-groupe des éléments décomposables pour le cup-produit</u>.

Soit x , en effet, une classe générateur du premier groupe non nul $H^p(E ; R)$. On a $p > \frac{n}{3}$; formons le fibré canonique Q_x ; le noyau de l'homomorphisme $p^* = H^*(E) \longrightarrow H^*(Q_x)$ ne peut contenir, outre des multiples de x , que des subordinations "d'ordre supérieur" ; lesquelles n'apparaissent qu'avec l'opération $D_1(c)$ dont le degré est $(\deg c) + 2p - 1 > n$. Par ailleurs, dans $H^*(Q_x)$, il n'y a pas de "nouvel" élément de dimension $< \frac{2}{3} n$; en effet, tout élément de $H^*(Q_x) / p^*(H^*(E))$ provient d'un élément $u \in H^r(E)$ tel que $u.x = 0$, qui donne naissance à un élément de dimension au moins égale à $r + p - 1 > \frac{2}{3} n$. Formons alors la suite des fibrés canoniques $E \longleftarrow Q_{x_1} \longleftarrow Q_{x_2} \longleftarrow \dots \longleftarrow Q_{x_r} \longleftarrow$, qui tue toutes les classes de dimension $< n$ (éventuellement y compris des classes nouvellement apparues ...), et soit $q = Q_{x_r} \longrightarrow E$ la projection finale ; soit dès lors y une classe de $H^n(E)$ annulée par q^* ; y est alors, dans la suite des projections, nulle dans un Q_{x_i} , sans l'être dans $Q_{x_{i-1}}$; c'est dire, d'après l'observation faite plus haut, encore valable pour la fibration $Q_{x_i} \longrightarrow Q_{x_{i-1}}$, que l'image de y est dans $H^*(Q_{x_{i-1}})$ multiple de la classe x_i : $y = x_i \cdot V$; or, dans tous les espaces Q_{x_i} , la cohomologie $H^r(Q_{x_i})$, pour $r < \frac{2}{3} n$, est nécessairement dans l'image $p^*(H^r(E))$; en particulier, $H^r(Q_{x_i}) = 0$ pour $r \leqslant \frac{n}{3}$; par suite $\deg V > \frac{n}{3}$, donc $\deg x_i < \frac{2}{3} n$; par suite x_i est de la forme $x_i = p^*(u_i)$, et $V = p^*(v)$; si on forme alors la classe

$y_1 = y - u_i . v$, on voit que son image dans $H^*(Q_{x_{i-1}})$ est nulle ; en itérant le raisonnement, on voit qu'au bout d'un nombre d'opérations au plus égal à i , on pourra redescendre la suite des fibrés canoniques Q_{x_i} et aboutir ainsi à une relation de la forme $y = \sum_j u_j . v_j$, ce qui exprime que toute classe annulée par q^* est décomposable au sens du cup-produit. Or le noyau de q^* est précisément formé des classes non primitives, donc des annulateurs sphériques.

5.- Remarque sur la notion de classe non primitive.

On a défini plus haut une classe $x \in H^n(E)$ comme non primitive si elle est annulée par la projection d'un fibré G canonique superposé, associé à des classes de dimensions $< n$; il importe de voir que l'espace Q_{x_r} mentionné plus haut joue par rapport à tous les espaces G possibles un rôle universel : l'espace Q_{x_r} s'envoie dans tout espace G de façon compatible avec les projections sur E ; car toute classe x' servant à définir un fibré canonique de la suite (G) est, par hypothèse, et à chaque niveau, tuée dans Q_{x_r} , sa dimension étant $< n$. Il en résulte que l'application de Q_{x_r} peut se relever dans le fibré canonique associé à x' , et ainsi de suite ...
Le diagramme :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[dr, "p"'] & & Q_{x_r} \arrow[ll] \arrow[dl, "q"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

montre que toute classe du noyau de p^* est dans le noyau de q^* , ce qui montre le rôle universel de Q_{x_r} pour définir les classes non primitives, l'ensemble de ces classes pouvant être défini comme le noyau de q^* .