

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

H. CARTAN

Opérations cohomologiques, II

Séminaire Henri Cartan, tome 7, n° 2 (1954-1955), exp. n° 15, p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1954-1955__7_2_A4_0

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

OPÉRATIONS COHOMOLOGIQUES, II.

(Exposé de H. CARTAN, 14.3.1955)

Le but final de cet exposé et du suivant consiste à déterminer toutes les opérations cohomologiques additives $H^n(X; \Pi) \rightarrow H^n(X, G)$ dans le cas où tous les éléments de G sont d'ordre premier p (Π désignant un groupe abélien quelconque). D'après l'Exposé 14 (théorème 5), il revient au même de déterminer les éléments de

$$H^q(\Pi, n; G) \approx \text{Hom}(H_q(\Pi, n; Z_p), G)$$

qui sont "orthogonaux" aux éléments décomposables de $H_q(\Pi, n; Z_p)$. Ceci nous conduit à introduire l'espace vectoriel (sur le corps Z_p), quotient de $H_q(\Pi, n; Z_p)$ par le sous-espace D_q des éléments décomposables; soit $A_q(\Pi, n; Z_p)$ cet espace quotient. Alors le sous-espace $A^q(\Pi, n; G)$, formé des éléments "additifs" de $H^q(\Pi, n; G)$, s'identifie à $\text{Hom}(A_q(\Pi, n; Z_p), G)$. On notera que $A_q(\Pi, n; G) = 0$ pour $0 < q < n$; on posera

$$A_*^*(\Pi, n; Z_p) = \sum_{q \geq 0} A_{n+q}(\Pi, n; Z_p),$$

$$A^*(\Pi, n; G) = \sum_{q \geq 0} A^{n+q}(\Pi, n; G).$$

1.- Opérations homologiques modulo p .

Une opération homologique additive (modulo p) consiste dans la donnée, pour chaque CSS-complexe X , d'une application linéaire

$$T(X) : H_{n+q}(X; Z_p) \longrightarrow H_n(X; Z_p) \quad (n \text{ et } q \text{ donnés}),$$

qui soit naturelle dans le sens suivant : si $h : X \rightarrow X'$ est CSS-application, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_{n+q}(X; Z_p) & \xrightarrow{T(X)} & H_n(X; Z_p) \\ \downarrow h_* & & \downarrow h_* \\ H_{n+q}(X'; Z_p) & \xrightarrow{T(X')} & H_n(X'; Z_p) \end{array}$$

Soit donnée une telle opération homologique T . Pour chaque groupe

abélien Π , considérons l'application composée

$$H^n(X; \Pi) \longrightarrow H^n(X; \Pi/p\Pi) \longrightarrow H^{n+q}(X; \Pi/p\Pi),$$

la première application étant naturellement définie par l'homomorphisme de Π sur son quotient $\Pi/p\Pi$, et la seconde étant transposée de $T(X)$:
 $H_{n+q}(X; Z_p) \longrightarrow H_n(X; Z_p)$. On obtient une opération cohomologique additive

$$H^n(X; \Pi) \longrightarrow H^{n+q}(X; \Pi/p\Pi),$$

dite associée à T . Ceci vaut pour tout groupe abélien Π .

Cette opération cohomologique est définie par un élément $u \in H^{n+q}(\Pi, n; \Pi/p\Pi)$, qu'on obtient comme suit: l'application

$$H_{n+q}(\Pi, n; Z_p) \xrightarrow{T} H_n(\Pi, n; Z_p) \approx \Pi/p\Pi$$

définit un élément de $\text{Hom}(H_{n+q}(\Pi, n; Z_p), \Pi/p\Pi)$; c'est l'élément u cherché. Puisque l'opération cohomologique définie par u est additive, u est orthogonal aux éléments décomposables de $H_{n+q}(\Pi, n; Z_p)$ (Exp. 14, th. 5); donc T induit une application linéaire

$$S(\Pi) : A_{n+q}(\Pi, n; Z_p) \longrightarrow A_n(\Pi, n; Z_p)$$

et cette application est naturelle vis-à-vis des homomorphismes $\Pi \longrightarrow \Pi'$.

Proposition 1. - Réciproquement, soit donnée une opération additive $S(\Pi)$, pour tout groupe abélien Π , et naturelle vis-à-vis de Π . Alors il existe une opération homologique additive $T(X) : H_{n+q}(X; Z_p) \longrightarrow H_n(X; Z_p)$ et une seule, qui donne naissance à $S(\Pi)$.

Démonstration : soit donné X ; posons $H_n(X; Z_p) = G$, et soit $\xi \in H^n(X; G) \approx \text{Hom}(H_n(X; Z_p), G)$ la classe fondamentale. Elle définit (cf. Exposé 14, th. 1) une classe d'applications $f_\xi : X \longrightarrow K(G, n)$. Composons les applications suivantes

$$H_{n+q}(X; Z_p) \xrightarrow{(f_\xi)_*} H_{n+q}(G, n; Z_p) \longrightarrow A_{n+q}(G, n; Z_p) \xrightarrow{S(G)} G.$$

On obtient une application linéaire $T(X) : H_{n+q}(X; Z_p) \longrightarrow H_n(X; Z_p)$.

On va voir que $T(X)$ est naturelle, et que si $X = K(\Pi, n)$, $T(X)$ induit $S(\Pi)$. Ce dernier point est évident, en prenant pour f_ξ l'application canonique $K(\Pi, n) \longrightarrow K(\Pi/p\Pi, n)$. Montrons la naturalité de $T(X)$: soit $h : X \longrightarrow X'$; on pose $G' = H_n(X; Z_p)$, et h définit un

homomorphisme $\lambda : G \rightarrow G'$. Les deux applications composées
 $X \xrightarrow{h} X' \xrightarrow{f_{\xi'}} K(G', n)$ et $X \xrightarrow{f_{\xi}} K(G, n) \xrightarrow{(\lambda)} K(G', n)$ sont
 homotopes, car elles ont même classe caractéristique ; donc le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_{n+q}(X ; Z_p) & \longrightarrow & H_{n+q}(G, n ; Z_p) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{n+q}(X' ; Z_p) & \longrightarrow & H_{n+q}(G', n ; Z_p) \end{array}$$

est commutatif, et ceci entraîne aussitôt la naturalité.

2.- Collection d'opérations homologiques, stable par suspension.

Supposons donné un entier q ; et, pour chaque n , une opération
 homologique additive (naturelle)

$$T_n : H_{n+q}(X ; Z_p) \longrightarrow H_n(X ; Z_p).$$

Pour chaque groupe abélien Π , et chaque entier n , ceci définit un élé-
 ment $u_n(\Pi) \in H^{n+q}(\Pi, n ; \Pi/p\Pi)$. Nous dirons que la collection des
 T_n est stable par suspension si, pour chaque Π , la collection des
 $u_n(\Pi)$ est stable par suspension (i.e : $u_n(\Pi)$ est suspendu de $u_{n+1}(\Pi)$).
 Il revient évidemment au même de dire que, pour chaque groupe abélien
 et chaque entier n , le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A_{n+q}(\Pi, n ; Z_p) & \xrightarrow{S_n(\Pi)} & A_n(\Pi, n ; Z_p) \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma \\ A_{n+q+1}(\Pi, n+1 ; Z_p) & \xrightarrow{S_{n+1}(\Pi)} & A_{n+1}(\Pi, n+1 ; Z_p) \end{array}$$

en notant $S_n(\Pi)$ l'application induite par T_n . Noter que la suspension
 $\sigma : H_{n+q}(\Pi, n ; Z_p) \longrightarrow H_{n+q+1}(\Pi, n+1 ; Z_p)$ s'annule sur les éléments
 décomposables (Exp. 6, prop. 1), donc passe au quotient et définit une
 application linéaire $A_{n+q}(\Pi, n ; Z_p) \longrightarrow A_{n+q+1}(\Pi, n+1 ; Z_p)$, encore
 notée σ . Noter que $\sigma : A_n(\Pi, n ; Z_p) \longrightarrow A_{n+1}(\Pi, n+1 ; Z_p)$ est un
 isomorphisme.

Proposition 2.- Soit (T_n) une collection d'opération homologiques
 additives, stable par suspension. Alors pour tout groupe abélien Π , et
 tout groupe abélien G tel que $pG = 0$, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^{n+1}(\Pi, m+1 ; G) & \longrightarrow & H^{n+q+1}(\Pi, m+1 ; G) \\ \downarrow t_{\sigma} & & \downarrow t_{\sigma} \\ H^n(\Pi, m ; G) & \longrightarrow & H^{n+q}(\Pi, m ; G) \end{array}$$

où les homomorphismes horizontaux désignent les opérations cohomologiques additives définies par T_{n+1} et T_n ; on a noté ${}^t\sigma$ la suspension en cohomologie, transposée de la suspension en homologie.

C'est une conséquence facile du théorème 2 de l'Exposé 14.

3.- Détermination des espaces vectoriels $A_*(\Pi, n; Z_p)$.

Rappelons d'abord que, dans les Exposés 6, 7 et 8, on a étudié les opérations suivantes :

1°) la suspension σ ; elle envoie $\Pi/p\Pi$ dans $H_1(\Pi, 1; Z_p)$, et, pour $n \geq 1$, elle envoie $H_q(\Pi, n; Z_p)$ dans $H_{q+1}(\Pi, n+1; Z_p)$.

Elle est additive, et s'annule sur les éléments décomposables. La suspension induit donc une application additive (notée encore σ) de $\Pi/p\Pi$ dans $A_1(\Pi, 1; Z_p)$, et de $A_q(\Pi, n; Z_p)$ dans $A_{q+1}(\Pi, n+1; Z_p)$ pour $n \geq 1$.

2°) la transpotence φ_p ; elle envoie ${}_p\Pi$ dans $H_2(\Pi, 1; Z_p)$, et, pour $n \geq 1$, elle envoie $H_{2k}(\Pi, n; Z_p)$ dans $H_{2kp+2}(\Pi, n+1; Z_p)$.

Elle est additive pour p premier impair ; pour $p = 2$, elle est additive modulo les éléments décomposables (cf. relation (2) de l'Exp. 8). La valeur de φ_p sur un élément décomposable est 0 si p est impair, et est décomposable si $p = 2$ (cf. prop. 3 de l'Exp. 6). La transpotence induit donc une application additive (notée encore φ_p) de ${}_p\Pi$ dans $A_2(\Pi, 1; Z_p)$, et de $A_{2k}(\Pi, n; Z_p)$ dans $A_{2kp+2}(\Pi, n+1; Z_p)$ pour $n \geq 1$. Ceci vaut aussi bien pour $p = 2$ que pour p impair.

3°) la puissance k-ième divisée γ_k , définie pour q pair ≥ 2 et $n \geq 1$, et qui envoie $H_q(\Pi, n; Z_p)$ dans $H_{kq}(\Pi, n; Z_p)$. Si k n'est pas une puissance de p , l'élément $\gamma_k(x)$ est décomposable, en vertu de la relation (15) de l'Exposé 7. Si k est une puissance de p , on a

$\gamma_{p^i} = \gamma_p \circ \dots \circ \gamma_p$ (i fois), d'après l'Exposé 7, paragraphe 7. Enfin,

$\gamma_k(x+y)$ est égal à $\gamma_k(x) + \gamma_k(y)$ modulo les éléments décomposables.

De plus, pour $k \geq 2$, $\gamma_k(x)$ est décomposable si x est décomposable, en vertu de la relation (4') de l'Exp. 7. De tout cela, il résulte notamment que γ_p induit des applications additives (encore notées γ_p) de $A_{2k}(\Pi, n; Z_p)$ dans $A_{2kp}(\Pi, n; Z_p)$, pour $k \geq 1$ et $n \geq 1$.

Le "théorème fondamental" de l'Exposé 9 (pour p impair) et l'Appendice 1 de l'Exposé 11 (pour $p=2$) vont alors nous permettre d'explicitement

entièrement l'espace vectoriel gradué $A_*(\Pi, n; Z_p)$.

On a défini (Exp. 9, paragraphe 1) la hauteur et le degré stable d'un mot α , composé avec les lettres σ , γ_p et φ_p ; les mots de première espèce sont ceux terminés (à droite) par σ ; les mots de deuxième espèce sont ceux terminés (à droite) par φ_p . On a défini les mots "admissibles"; un mot admissible α , de première espèce, de hauteur n et de degré stable q , définit une application linéaire

$$f(\alpha) : \Pi/p\Pi \longrightarrow H_{n+q}(\Pi, n; Z_p);$$

un mot admissible α , de deuxième espèce, de hauteur n et de degré stable q , définit une application linéaire

$$f(\alpha) : {}_p\Pi \longrightarrow H_{n+q}(\Pi, n; Z_p).$$

Le théorème fondamental (Exp. 9) dit que les $f(\alpha)$ sont des isomorphismes sur des sous-espaces vectoriels de $H_{n+q}(\Pi, n; Z_p)$; que la somme $M_{n+q}(\Pi, n; Z_p)$ de ces sous-espaces est une somme directe; et que l'algèbre $H_*(\Pi, n; Z_p)$ est l'algèbre universelle (à puissances divisées) du sous-espace vectoriel gradué $M_*(\Pi, n; Z_p) = \sum_{q \geq 0} M_{n+q}(\Pi, n; Z_p)$.

Tout cela vaut pour p premier impair. Pour $p = 2$, c'est encore vrai si Π est un groupe cyclique (cf. Appendice 1 de l'Exp. 11). De là résulte aussitôt :

Théorème 1.- L'espace vectoriel gradué $A_*(\Pi, n; Z_p) = \sum_{q \geq 0} A_{n+q}(\Pi, n; Z_p)$ est somme directe des images de $\Pi/p\Pi$ (resp. ${}_p\Pi$) par les applications linéaires

$$\begin{aligned} g(\alpha) : \Pi/p\Pi &\longrightarrow A_*(\Pi, n; Z_p) \\ \text{resp. } g(\alpha) : {}_p\Pi &\longrightarrow A_*(\Pi, n; Z_p) \end{aligned}$$

qui correspondent à tous les mots α de première espèce (resp. de deuxième espèce), de hauteur n , qu'on obtient en écrivant à gauche d'un mot admissible un nombre quelconque fois (éventuellement nul) la lettre γ_p .

Ce théorème vaut aussi pour $p = 2$. En effet, il est vrai si Π est cyclique; il est vrai si Π est somme directe d'un nombre fini de groupes cycliques, car $A_*(\Pi_1 + \Pi_2, n; Z_p)$ est somme directe de $A_*(\Pi_1, n; Z_p)$ et $A_*(\Pi_2, n; Z_p)$; enfin, il est vrai dans le cas général, car le foncteur covariant $A_*(\Pi, n; Z_p)$ du groupe abélien Π

commute avec les limites directes.

4.- Les espaces vectoriels $A_*(\pi, n; Z_p)$ (Suite).

Dans l'Exposé 9, on a mis en correspondance biunivoque les mots admissibles de hauteur n et de degré stable q , avec les suites d'entiers (a_1, \dots, a_i, \dots) qui satisfont aux conditions

$$(i) \quad a_i \equiv 0 \text{ ou } 1 \pmod{2p-2}$$

$$(ii) \quad a_i \geq pa_{i+1}$$

$$(iii) \quad \sum_i a_i = q,$$

$$(iv) \quad pa_1 < (p-1)(n+q).$$

La correspondance s'explique comme suit : soit donné une suite (a_1, \dots, a_i, \dots) satisfaisant à (i) et (ii) ; posons

$$(1) \quad a_i = 2k_i(p-1) + u_i \quad (k_i \text{ entier } \geq 0, u_i = 0 \text{ ou } 1)$$

$$(2) \quad h_{i+1} = k_i - pk_{i+1} - u_{i+1} \quad \text{pour } i \geq 1;$$

alors h_{i+1} est ≥ 0 d'après (ii). Définissons alors q par (iii), puis, n étant donné de manière à satisfaire à (iv), posons

$$(3) \quad h_1 = n+q - 2k_1p - 2u_1.$$

Le mot α de hauteur n qui correspond à la suite (a_1, \dots, a_i, \dots) est

$$(4) \quad \sigma^{-h_1} \alpha_1 \sigma^{-2h_2} \alpha_2 \dots \sigma^{-2h_i} \alpha_i \dots$$

où α_i désigne χ_p si $u_i = 0$, et désigne φ_p si $u_i = 1$. Un tel mot se termine automatiquement, à droite, par σ ou par φ_p ; il est de deuxième espèce s'il y a un a_i égal à 1, de première espèce dans le cas contraire.

Dans tout cela, p est supposé impair. La condition (iv) exprime que $h_1 \geq 0$ si $\alpha_1 = \varphi_p$, et $h_1 \geq 1$ si $\alpha_1 = \chi_p$. Si maintenant l'on veut avoir non seulement les mots admissibles, mais aussi, comme dans le th. 1, ceux qu'on obtient en écrivant un nombre quelconque de fois la lettre χ_p à gauche d'un mot admissible, on doit permettre à l'entier h_1 d'être nul même si $\alpha_1 = \chi_p$. Cela revient simplement à remplacer l'inégalité (iv) par la suivante :

$$(iv') \quad pa_1 \leq (p-1)(n+q).$$

En résumé, l'espace vectoriel $A_{n+q}(\Pi, n; Z_p)$ est somme directe des sous-espaces, images de $\Pi/p\Pi$, resp. de ${}_p\Pi$, par les applications linéaires $g(\alpha)$ qui correspondent à tous les mots α de la forme (4), dont chacun est indexé par une suite (a_1, \dots, a_i, \dots) satisfaisant à (i), (ii), (iii) et (iv').

Ce résultat, valable pour p impair, est encore vrai pour $p = 2$, comme le prouve une simple inspection, en se reportant à l'appendice 1 de l'Exposé 11.

Introduisons les notations suivantes. Soit $I = (a_1, \dots, a_i, \dots)$ une suite d'entiers ≥ 0 satisfaisant à (i) et (ii). Posons

$$(5) \quad q(I) = \sum_i a_i, \quad n(I) = [pa_1/(p-1)] - q(I),$$

où le symbole $[u]$ désigne le plus petit entier au moins égal à u .

On notera que $[pa_1/(p-1)] = 2k_1p + 2u_1$. Avec ces notations, (iii) et (iv') s'écrivent

$$(6) \quad q = q(I), \quad n \geq n(I).$$

La différence $n - n(I)$ n'est autre que l'entier h_1 de la relation (3). Pour chaque entier $n \geq n(I)$, on notera $g_I(n)$ l'application $g(\alpha)$ relative au mot α de hauteur n défini par I ; $g_I(n)$ est un isomorphisme de $\Pi/p\Pi$ (resp. de ${}_p\Pi$) sur un sous-espace vectoriel de $A_*(\Pi, n; Z_p)$, sous-espace que nous noterons $A_I(\Pi, n; Z_p)$ et $A_*(\Pi, n; Z_p)$ est somme directe des $A_I(\Pi, n; Z_p)$. Il sera commode d'introduire aussi une application $g_I(n)$ pour $n < n(I)$, en convenant que $g_I(n) = 0$ dans ce cas; la notation $A_I(\Pi, n; Z_p)$ désignera le sous-espace nul de $A_*(\Pi, n; Z_p)$ lorsque $n < n(I)$. Il est évident que la suspension σ est un isomorphisme de $A_I(\Pi, n; Z_p)$ sur $A_I(\Pi, n+1; Z_p)$ si $n \geq n(I)$; et qu'elle applique biunivoquement $A_*(\Pi, n; Z_p)$ dans $A_*(\Pi, n+1; Z_p)$.

Théorème 2.- L'application de suspension

$$A_{n+q}(\Pi, n; Z_p) \longrightarrow A_{n+q+1}(\Pi, n+1; Z_p)$$

est un isomorphisme lorsque $n \geq q/(p-1)$.

En effet, pour que ce soit un isomorphisme, il suffit que l'on ait $n \geq n(I)$ pour toutes les suites I telles que $q(I) = q$; or, pour une telle suite I , on a évidemment $a_1 \leq q$; donc, d'après (5), il suffit que $n \geq [pq/(p-1)] - q$, ce qui achève la démonstration.

[†] et $A_*(\Pi, n; Z_p)$ est somme directe des $A_I(\Pi, n; Z_p)$.

Puisque la suspension σ applique biunivoquement $A(\Pi, n; Z_p)$ dans $A_*(\Pi, n; Z_p)$, sa transposée ${}^t\sigma$ applique $A^*(\Pi, n+1; G)$ sur $A^*(\Pi, n; G)$, pour tout groupe abélien G tel que $pG = 0$. D'ailleurs ${}^t\sigma$ est induite par la suspension en cohomologie : $H^*(\Pi, n+1; G) \longrightarrow H^*(\Pi, n; G)$, dont l'image est contenue dans $A^*(\Pi, n; G)$, car cette image est orthogonale aux éléments décomposables de $H_*(\Pi, n; Z_p)$ (en vertu de la prop. 1 de l'Exposé 6). Ainsi :

Proposition 3.- L'image de la suspension $H^*(\Pi, n+1; G) \longrightarrow H^*(\Pi, n; G)$ est exactement le sous-espace $A^*(\Pi, n; G)$ des éléments additifs de la cohomologie, si $pG = 0$.

5.- Les opérations de Steenrod (en homologie et en cohomologie).

(La théorie de Steenrod n'est pas supposée connue).

Théorème 3.- L'entier $k \geq 1$ étant donné, il existe une seule collection d'opérations homologiques $T_n : H_{n+2k(p-1)}(X; Z_p) \longrightarrow H_n(X; Z_p)$, stable par suspension, et telle que l'application

$$S_{2k}(\Pi) : A_{2kp}(\Pi, 2k; Z_p) \longrightarrow A_{2k}(\Pi, 2k; Z_p)$$

définie par T_{2k} , jouisse des propriétés suivantes : elle s'annule sur l'image de la suspension $A_{2kp-1}(\Pi, 2k-1; Z_p) \longrightarrow A_{2kp}(\Pi, 2k; Z_p)$, et pour $x \in A_{2k}(\Pi, 2k; Z_p)$, elle transforme $\gamma_p(x)$ dans x . Alors T_n est nulle pour $n < 2k$, et la transposée de T_{2k}

$$H^{2k}(X; Z_p) \longrightarrow H^{2kp}(X; Z_p)$$

est la puissance p -ième (dans l'anneau de cohomologie $H^*(X; Z_p)$).

Démonstration : puisque $S_{2k}(\Pi)$ s'annule sur l'image de la suspension, les $S_n(\Pi)$ sont nulles pour $n < 2k$; donc $T_n = 0$ pour $n < 2k$. L'espace vectoriel $A_{2kp}(\Pi, 2k; Z_p)$ est la somme directe des images de γ_p , σ et φ_p , d'après le théorème 1; mais l'image de φ_p est nulle en dimension $2kp$, car $2kp$ n'est pas de la forme $2k'p+2$. De plus, γ_p est un isomorphisme de $A_{2k}(\Pi, 2k; Z_p)$ sur son image; donc les conditions de l'énoncé définissent bien une application linéaire et une seule de $A_{2kp}(\Pi, 2k; Z_p)$ dans $A_{2k}(\Pi, 2k; Z_p)$. Elle est évidemment naturelle vis-à-vis du groupe Π . D'après la proposition 1, ceci détermine l'opération homologique T_{2k} .

L'existence et l'unicité de T_n pour $n > 2k$ se montrent alors par récurrence sur n , parce que, pour $n \geq 2k$, la suspension $A_{n+2k(p-1)}(\Pi, n; Z_p) \longrightarrow A_{n+2k(p-1)+1}(\Pi, n+1; Z_p)$ est un isomorphisme (théorème 2).

Il reste à montrer que T_{2k} , par transposition, définit une opération cohomologique $H^{2k}(X; Z_p) \longrightarrow H^{2kp}(X; Z_p)$ qui n'est autre que la puissance p-ième. Posons $\bar{\Pi} = Z_p$; il suffit de montrer que

$$T_{2k} : H_{2kp}(\Pi, 2k; Z_p) \longrightarrow H_{2k}(\Pi, 2k; Z_p) \approx Z_p$$

définit un élément $\eta \in H^{2kp}(\Pi, 2k; Z_p)$ qui est la puissance p-ième de la classe fondamentale $\xi \in H^{2k}(\Pi, 2k; Z_p)$. Or l'isomorphisme de $\bar{\Pi}$ avec Z_p définit un générateur a de $\bar{\Pi}$; les transformés de a par les applications $g_I(2k)$ telles que $n(I) \geq 2k$, et leurs produits, forment une base de l'espace vectoriel $H_*(\bar{\Pi}, 2k; Z_p)$. Considérons la base duale de $H^*(\Pi, 2k; Z_p)$. Les éléments ξ et η en font partie: ξ correspond à $\sigma^{2k}a$, et η à $\gamma_p(\sigma^{2k}a)$. D'après l'Exposé 9, paragraphe 5 (démonstration précédant l'énoncé du théorème 2), il s'ensuit que $\eta = \xi^p$, ce qu'il fallait démontrer.

Le théorème 3 est ainsi entièrement établi.

Corollaire du théorème 3. - L'entier $k \geq 1$ étant donné, il existe une seule collection d'opérations cohomologiques additives

$$H^n(X; Z_p) \longrightarrow H^{n+2k(p-1)}(X; Z_p) \quad (\text{une pour chaque } n)$$

qui soit stable pour la suspension, et se réduise, pour $n = 2k$, à la puissance p-ième. Ces opérations sont nulles pour $n < 2k$.

Or Steenrod [1] a, par des procédés explicites, défini une telle collection d'opérations, notées P_p^k (notation indépendante de n). Les opérations de notre corollaire sont donc celles de Steenrod, dont l'existence se trouve ainsi démontrée à nouveau. De plus, nous considérerons, pour chaque groupe abélien Π , les opérations cohomologiques

$$H^n(X; \Pi) \longrightarrow H^{n+2k(p-1)}(X; \Pi/p\Pi)$$

associées aux opérations homologiques dont les opérations de Steenrod sont les transposées. Ces opérations cohomologiques seront encore appelées opérations de Steenrod, et notées P_p^k .

Notons que tout ce qui précède vaut aussi pour $p = 2$.

6. - Compléments.

A titre d'exercice, on va expliciter l'opération homologique

$$T_{2k} : H_{2kp}(X ; Z_p) \longrightarrow H_{2k}(X ; Z_p)$$

dont la puissance p -ième est transposée. A priori, il existe au plus une application linéaire ayant une transposée donnée. Il suffit donc d'en exhiber une.

Soit X^p le complexe-produit $X \times \dots \times X$ (p facteurs). L'application "diagonale" $X \longrightarrow X^p$ définit une application linéaire

$$\Delta : H_{2kp}(X ; Z_p) \longrightarrow H_{2kp}(X^p ; Z_p) .$$

On va définir une application linéaire $\mu : H_{2kp}(X^p ; Z_p) \longrightarrow H_{2k}(X ; Z_p)$.

Pour cela, prenons une base homogène (e_i) de l'espace vectoriel $H_*(X ; Z_p)$; $H_*(X^p ; Z_p)$ s'identifie au produit tensoriel de p exemplaires de $H_*(X ; Z_p)$, donc possède une base formée des $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p}$, les indices i_1, \dots, i_p étant distincts ou non. Nous posons

$$\mu(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p}) = 0 \text{ si } i_1, \dots, i_p \text{ ne sont pas tous égaux ;}$$

$$\mu(e_i \otimes \dots \otimes e_i) = e_i .$$

Ceci définit bien une application linéaire $\mu : H_{2kp}(X^p ; Z_p) \longrightarrow H_{2k}(X ; Z_p)$, qui envoie les éléments de degré $2kp$ dans ceux de degré $2k$. Il est immédiat que si on considère l'application composée

$$\mu \circ \Delta : H_{2kp}(X ; Z_p) \longrightarrow H_{2k}(X ; Z_p) ,$$

sa transposée $H^{2k}(X ; Z_p) \longrightarrow H^{2kp}(X ; Z_p)$ est la puissance p -ième. Donc l'application $\mu \circ \Delta$ ne dépend pas du choix de la base (e_i) , bien que μ en dépende.

Le groupe des permutations sur p éléments opère d'une manière évidente dans $H_*(X^p ; Z_p)$. L'application diagonale Δ envoie $H_*(X ; Z_p)$ dans le sous-espace $\tilde{H}_*(X^p ; Z_p)$ des éléments invariants de $H_*(X^p ; Z_p)$. On peut vérifier que la restriction de μ à $\tilde{H}_*(X^p ; Z_p)$ ne dépend pas du choix de la base (e_i) .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. STEENROD, Cyclic reduced powers of cohomology classes, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 39, 1953, p. 217-223 .