J. C. Moore

Systèmes de Postnikov et complexes monoïdaux

Séminaire Henri Cartan, tome 7, n° 2 (1954-1955), exp. n° 21, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1954-1955__7_2_A11_0>

Séminaire H. CARTAN, E.N.S., 1954/55.

SYSTÈMES DE POSTNIKOV ET COMPLEXES MONOÏDAUX

(Exposé de J. C. MOORE, 16.5.1955)

On se propose de donner une construction explicite de complexes CSS (Exp. 14) à partir des complexes $K(\Pi , n)$, ou plutôt $\Gamma(\Pi , n)$ (cf. Exp. 19, paragraphe 3) ; et ceci d'une manière assez générale pour qu'on obtienne ainsi un complexe "équivalent" à n'importe quel complexe de groupes. En fait, le procédé de Postnikov [1] et Zilber (non publié) permet d'obtenir un complexe équivalent au complexe singulier de n'importe quel espace topologique ; mais ici nous nous limiterons au cas des complexes de groupes. Voir aussi [2].

1.- Préliminaires.

Lemme 1 : Soit Γ un complexe monoïdal avec homotopie (Exp. 18, déf. 4). Soit $x \in \Gamma_{n+1}$ tel que $d_i d_j x = e_{n-1}$ pour $0 \leq i < j \leq n+1$. Alors il existe $y \in \widetilde{\Pi}_{n+1}(\Gamma)$ tel que

$$d_{n+1} y = (d_0 x)(d_1 x)^{-1}(d_2 x)\dots(d_{n+1} x)^{\sigma(n+1)} ,$$

où $\sigma(j)$ désigne $(-1)^j$.

Démonstration : on prouve, par récurrence sur l'entier $k(0 \leq k \leq n+1)$, l'existence d'un $y^k \in \Gamma_{n+1}$ tel que

$$d_j y^k = e_n \quad \text{pour} \quad j < k , \quad d_i d_j y^k = e_{n-1} \quad \text{pour} \quad 0 \leq i < j \leq n+1 \quad \text{et}$$

$$\prod_{j=0}^{n+1} (d_j y^k)^{\sigma(j)} = \prod_{j=0}^{n+1} (d_j x)^{\sigma(j)} .$$

On prend d'abord $y^o = x$; supposons défini y^k , avec $k \leq n$, et définissons y^{k+1} . Pour cela, posons

$$x^{k+1} = y^k(s_k d_k \overline{y^k}) \quad \text{si } k \text{ pair}, \quad x^{k+1} = (s_k d_k \overline{y^k}) y^k \quad \text{si } k \text{ impair.}$$

Raisonnons par exemple pour k pair (le cas où k est impair se traite d'une manière analogue) : on a

$$d_j x^{k+1} = e_n \quad \text{pour} \quad j < k , \quad d_k x^{k+1} = (d_k y^k)(d_k \overline{y^k})$$

$$d_{k+1} x^{k+1} = (d_{k+1} y^k)(d_k \overline{y^k}) , \quad d_j x^{k+1} = d_j y^k \quad \text{pour} \quad j \geq k+2 .$$

D'après l'axiome de remplacement (Exp. 18, paragraphe 2), il existe y^{k+1}

tel que $d_j y^{k+1} = e_n$ pour $j \leq k$, et $d_j y^{k+1} = d_j x^{k+1}$ pour $j > k$.
Cet élément y^{k+1} satisfait aux conditions voulues. Finalement, si on prend y^{n+1}, c'est un élément y qui satisfait aux conditions de l'énoncé.

Proposition 1 : Soit Γ un complexe monoïdal avec homotopie, et soit $n \geq 0$. Si $\Gamma_q = 0$ pour $q < n$, il existe une application multiplicative naturelle $f : \Gamma \longrightarrow \Gamma(\Pi_n(\Gamma), n)$.

Démonstration : puisque $\Gamma_q = 0$ pour $q < n$, on a une application naturelle $f : \Gamma_n \longrightarrow \Pi_n(\Gamma)$, et f est multiplicative. De plus, le lemme 1 montre que f est un n-cocycle de Γ à valeurs dans $\Pi_n(\Gamma)$. Alors la proposition suit de l'Exposé 14, paragraphe 1.

Lemme 2 : Soit Γ un complexe de groupes, minimal (cf. Exp. 19, paragraphe 2). Soit $y \in \Gamma_{q+1}$ tel que $d_j y = e_q$ pour $j \neq k$; alors $d_k y = e_q$.

Démonstration : posons $d_k y = x$. Si $k \leqslant q$, soit $z = y^{-1}(s_k x)$; on a $d_j z = e_q$ pour $j \neq k+1$, et $d_{k+1} z = x$. Il suffit donc d'examiner le cas où $k = q+1$. Alors $y \in \widetilde{\Pi}_{q+1}(\Gamma)$, et puisque Γ est minimal on a $d_{q+1} y = e_q$.

Notation : si Γ est un complexe de groupes, et si $x, y \in \Gamma_q$, on note $[x, y]$ la quantité $xyx^{-1}y^{-1}$. Il est évident que

$$d_i[x,y] = [d_i x, d_i y] \quad , \quad s_i[x,y] = [s_i x, s_i y] .$$

Lemme 3 : Soit Γ un complexe de groupes, minimal. Si $x \in \Pi_{q+1}(\Gamma)$, $y \in \Gamma_{q+1}$ et $d_k y = e_q$ pour un $k > 0$, alors $[x,y] = e_{q+1}$.

Démonstration : On a

$$d_j[s_k x \, , \, s_{k-1} y] = [s_{k-1} d_j x \, , \, d_j s_{k-1} y] = e_{q+1} \quad \text{pour} \quad j \leqslant k-1 ,$$

$$d_k[s_k x \, , \, s_{k-1} y] = [x,y] , \quad d_{k+1}[s_k x, s_{k-1} y] = [x, s_{k-1} d_k y] = e_{q+1} ,$$

$$d_j[s_k x \, , \, s_{k-1} y] = [s_k d_{j-1} x \, , \, d_j s_{k-1} y] = e_{q+1} \quad \text{pour} \quad j > k+1 .$$

Ainsi $d_j[s_k x \, , \, s_{k-1} y] = e_{q+1}$ pour $j \neq k$; d'après le lemme 2, c'est encore vrai pour $j = k$, donc $[x,y] = e_{q+1}$.

Lemme 4 : Soit Γ un complexe de groupes, minimal. Si $x \in \Pi_{q+1}(\Gamma)$, $u \in \Gamma_{q+1}$, $v \in \Gamma_{q+1}$, et si $d_k u = d_k v$ pour un $k > 0$, alors

$$[x,u] = [x,v] .$$

En effet, cette dernière relation équivaut à $[x, u^{-1}v] = e_{q+1}$; en posant $u^{-1}v = y$, on est ramené au lemme 3 .

<u>Proposition 2</u> : <u>Soit</u> Γ <u>un complexe de groupes, minimal, tel que</u> $\pi_0(\Gamma) = 0$. <u>Alors</u> $\pi_q(\Gamma)$ <u>est contenu dans le centre de</u> Γ_q .

<u>Démonstration</u> : c'est trivial si $q = 0$. Supposons $q \geq 1$, et soit $y \in \Gamma_q$. Posons $y_1 = s_0 d_1 y$, $y_2 = s_1 d_2 y_1$, ... , $y_q = s_{q-1} d_q y_{q-1}$. On a $d_1 y = d_1 y_1$, ... , $d_q y_{q-1} = d_q y_q$. D'après le lemme 4, on a $[x,y] = [x,y_1] = \ldots = [x,y_q]$ dès que $x \in \pi_q(\Gamma)$. Or $y_q = s_{q-1} s_{q-2} \ldots s_0 (d_1)^q y$, et comme $(d_1)^q y = e_0$ à cause de l'hypothèse sur $\pi_0(\Gamma)$, on a $y_q = e_q$. Ainsi $[x,y] = e_q$, ce qui prouve la proposition.

2.- <u>Produit cartésien tordu induit par une application.</u>

Soit Γ un complexe monoïdal. Rappelons (cf. Exp. 19, paragraphe 1) que

$$\bar{W}_{q+1}(\Gamma) = \Gamma_q + \ldots + \Gamma_0 .$$

Définissons $\tau : \bar{W}_{q+1}(\Gamma) \longrightarrow \Gamma_q$ par $\tau(x_q , \ldots , x_0) = x_q$.

Soit maintenant Y un CSS-complexe, et soit

$$f : Y \longrightarrow \bar{W}(\Gamma)$$

une CSS-application. De même qu'on a défini l'espace fibré induit par une application (Exposé 17, paragraphe 1), on définit ici le complexe $W_f(\Gamma)$ comme suit : ses éléments de dimension q sont les couples (x,y) tels que $x \in \Gamma_q$, $y \in Y_q$; on pose

$$\begin{cases} d_0(x,y) = ((d_0 x)(\tau f y) , d_0 y) , \\ d_{i+1}(x,y) = (d_{i+1}x , d_{i+1}y) , \\ s_i(x,y) = (s_i x , s_i y) . \end{cases}$$

On fait opérer Γ à gauche dans $W_f(\Gamma)$, en posant

$$x'.(x,y) = (x'x,y) \quad \text{pour} \quad x', x \in \Gamma_q , y \in Y_q .$$

On notera encore $\tau : Y_{q+1} \longrightarrow \Gamma_q$ l'application composée $\tau \circ f$.

<u>Théorème 1.- Soient</u> Γ <u>un complexe monoïdal,</u> Y <u>un complexe CSS , et</u> $f : Y \longrightarrow \bar{W}(\Gamma)$ <u>une CSS-application. Alors</u> $(\Gamma, Y , W_f(\Gamma))$ <u>est un produit cartésien tordu.</u>

Démonstration : soit $(x,y) \in W_f(\Gamma)_{q+1}$. On a

$$d_o d_{i+1}(x,y) = d_o(d_{i+1}x, d_{i+1}y) = ((d_o d_{i+1}x)(\tau d_{i+1}fy), d_{i+1}y) .$$

Si $i > 0$, on a $\tau d_{i+1} = d_i \tau$, et par suite

$$d_o d_{i+1}(x,y) = d_i d_o(x,y) .$$

Si $i = 0$, alors $\tau d_1 x = (d_o \tau x)(\tau d_o x)$, et on obtient la dernière identité des opérateurs de face d'un complexe. On achève la démonstration en observant que $\tau s_o x = e_{q+1}$, $\tau s_{i+1} x = s_i \tau x$, et par suite $d_o s_{i+1}(x,y) = s_i d_o(x,y)$, $d_o s_o(x,y) = (x,y)$.

3.- Systèmes de Postnikov.

Définition 1 : Un complexe monoïdal avec homotopie $\Lambda = (\Lambda_q)$ sera dit de type (Π , n) si :

(i) $\Pi_q(\Lambda) = 0$ pour $q \neq n$, et $\Pi_n(\Lambda) = \Pi$;

(ii) $\Lambda_q = 0$ pour $q < n$.

Exemple : le complexe minimal $\Gamma(\Pi, n)$ défini dans l'Exposé 19, paragraphe 3 .

Si Λ est un complexe de type (Π, n) , la proposition 1 donne une application naturelle $\Lambda \longrightarrow \Gamma(\Pi , n)$.

Définition 2 : Un système de Postnikov est une suite

$$\mathfrak{X} = (\bar{W}(\Lambda(\Pi_o,0)), f^o, \Lambda(\Pi_1,1), X^1, f^1, \ldots, \Lambda(\Pi_n,n), X^n, f^n, \ldots)$$

où $\Pi_o , \Pi_1 , \ldots , \Pi_n$ sont des groupes, tous abéliens sauf peut-être Π_o , et où :

1) $\Lambda(\Pi_n,n)$ est un complexe de groupes de type (Π_n,n) ;

2) f^o est une CSS-application $\bar{W}(\Lambda(\Pi_o,0)) \longrightarrow \bar{W}(\Lambda(\Pi_1,1))$;

3) pour $j \geq 1$, f^j est une CSS-application $X^j \longrightarrow \bar{W}(\Lambda(\Pi_{j+1},j+1))$;

4) pour $j \geq 0$, X^{j+1} est le complexe induit par f^j , complexe qu'on note $W_{f^j}(\Lambda(\Pi_{j+1},j+1))$ (cf. paragraphe 2).

L'application f^j définit une application $X^j \longrightarrow \bar{W}(\Gamma(\Pi_{j+1},j+1)) = \Gamma(\Pi_{j+1},j+2)$, c'est-à-dire un $(j+2)$-cocycle de X^j à valeurs dans Π_{j+1} .

Un système de Postnikov est dit minimal si $\Lambda(\Pi_n,n) = \Gamma(\Pi_n,n)$

pour tout n ; dans ce cas, le $(j+2)$-cocycle précédent détermine l'application f^j. Ce cocycle est ce qu'on appelle habituellement l'<u>invariant</u> k <u>d'Eilenberg-MacLane</u> [3]

Soit $\mathcal{X}^1$ le "produit cartésien tordu" $(\Lambda(\pi_1,1),\bar{W}(\Lambda(\pi_0,0),X^1)$; et soit, pour $n > 0$, $\mathcal{X}^{n+1}$ le produit cartésien tordu $(\Lambda(\pi_{n+1},n+1)\ ,\ X^n\ ,\ X^{n+1})$ défini par l'application f^n. Les complexes X^n et X^{n+1} ont mêmes faces de dimension q pour $q \leq n$; soit X^∞ le complexe-limite, tel que $X_q^\infty = X_q^n$ pour $q \leq n$. On notera $E^2(\mathcal{X}^n)$ le terme E^2 de la suite spectrale du produit cartésien tordu $\mathcal{X}^n$.

L'application f^0 définit un élément $\alpha \in H^2(\pi_0,1\ ;\pi_1)$ qui est l'image de la "classe fondamentale" de $H^2(\pi_1,2\ ;\pi_1)$ par l'homomorphisme défini par $f^0 : \bar{W}(\Lambda(\pi_0,0)) \longrightarrow \bar{W}(\Lambda(\pi_1,1))$. Alors α détermine une <u>extension</u> de π_0 par π_1 :

$$0 \longrightarrow \pi_1 \longrightarrow \pi_1' \longrightarrow \pi_0 \longrightarrow 0 \qquad \text{(suite exacte),}$$

définie à une équivalence d'extensions près. Posons

$$\pi_n(X^\infty) = \pi_n \quad \text{pour} \quad n > 1\ , \qquad \pi_1(X^\infty) = \pi_1'\ .$$

Soit un second système de Postnikov :

$$\mathcal{X}' = (\bar{W}(\Lambda'(\pi_0',0),f'^0,\Lambda'(\pi_1',1),X_1',f_1',\ldots,\Lambda'(\pi_n',n),X'^n,f'^n,\ldots)\ .$$

Un <u>homomorphisme</u> $h : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}'$ consiste dans la donnée d'applications $h^0 : \bar{W}(\Lambda(\pi_0,0)) \longrightarrow \bar{W}(\Lambda'(\pi_0',0))$, $h^n : X^n \longrightarrow X'^n$ (pour $n \geq 1$), telles que :

(a) la restriction de h^{n+1} à X^n soit h^n ;

(b) $h^{n+1}(F_pX^{n+1}) \subset F_pX'^n$ (F_p désignant la filtration).

Alors les h^n induisent une application $h : X^\infty \longrightarrow X'^\infty$.

Dans ce qui suit, on se propose de comparer un système de Postnikov donné à un système de Postnikov minimal.

<u>Lemme 5</u> : Soit Λ un complexe de <u>groupes</u> de type (π, n). Si $\varphi : \Lambda \longrightarrow \Gamma(\pi, n)$ désigne l'application naturelle, il existe une CSS-application $\alpha : \Gamma(\pi, n) \longrightarrow \Lambda$ telle que $\varphi\alpha$ soit l'identité. (Mais α n'est pas multiplicative, en général).

<u>Démonstration</u> : puisque $\Lambda_q = \{e_q\}$ pour $q < n$, α_q est bien définie pour $q < n$. Soit $\alpha_n : \pi \longrightarrow \Lambda_n$ une application telle que

$\varphi_n \alpha_n$ soit l'identité. Si $x \in \Gamma_{n+1}(\Pi, n)$, alors, d'après le lemme 1, il existe un $y_x \in \widetilde{\Pi}_{n+1}(\Lambda)$ tel que $d_{n+1} y_x = \prod_{j=0}^{n+1} \alpha_n(d_j x)^{\sigma(j)}$. Définissons

$$\alpha_{n+1}(x) = s_o(\alpha_n d_o x).s_1(\alpha_n(d_o x)^{-1}\alpha_n(d_1 x)) \ldots$$

$$\ldots s_n(\alpha_n(d_o x)^{\sigma(n)}\alpha_n(d_1 x)^{\sigma(n-1)} \ldots \alpha_n(d_n x)).(y_x)^{\sigma(n+1)},$$

dans le cas où x est non dégénéré ; sinon, si $x = s_i x'$, posons $\alpha_{n+1}(x) = s_i \alpha_n(x')$. Alors $d_j \alpha_{n+1}(x) = \alpha_n d_j x$.

Supposons α_i défini pour $i \leq n+k$ $(k \geq 1)$, et soit $x \in \Gamma_{n+k+1}(\Pi, n)$ non dégénéré. Soit y_x un élément tel que $d_i y_x = \alpha_{n+k}(d_i x)$ pour $i \leq n+k$; un tel y_x existe en vertu de la condition de Kan (Exp. 18, condition (ii) de la déf. 3). On a

$$d_j((d_{n+k+1} y_x)(\alpha_{n+k} d_{n+k+1} x)^{-1}) = e_{n+k-1} \quad \text{pour} \quad 0 \leq j \leq n+k .$$

Donc $(d_{n+k+1} y_x)(\alpha_{n+k} d_{n+k+1} x)^{-1}$ représente un élément de $\Pi_{n+k}(\Lambda)$, groupe qui est reduit à l'élément neutre puisque $k \geq 1$. Il existe donc un $z_x \in \widetilde{\Pi}_{n+k+1}(\Lambda)$ tel que $d_{n+k+1} z_x = (\alpha_{n+k} d_{n+k+1} x)(d_{n+k+1} y_x)^{-1}$. On pose $\alpha_{n+k+1}(x) = z_x y_x$. Ceci achève la définition récurrente de l'application α. Comme $\varphi\alpha$ est l'identité en dimension n, il en est de même en toute dimension.

<u>Lemme 6</u> : Soit Λ un complexe de <u>groupes</u> de type (Π, n), et soit $\varphi : \Lambda \longrightarrow \Gamma(\Pi, n)$ l'application naturelle. Si $(\Lambda, \bar{X}, X)$ est un produit cartésien tordu, il existe un unique produit cartésien tordu $(\Gamma(\Pi, n), \bar{X}, Y)$ tel que l'application $\psi : X \longrightarrow Y$ définie par $\psi(a \times b) = \varphi(a) \times b$ pour $a \in \Lambda$, $b \in \bar{X}$, soit une CSS-application. En outre, il existe une CSS-application $\beta : Y \longrightarrow X$ telle que $\psi\beta$ soit l'identité.

<u>Démonstration</u> : soit τ' l'application composée

$$\bar{X}_{q+1} \xrightarrow{\tau} \Lambda_q \xrightarrow{\varphi} \Gamma_q(\Pi, n) .$$

Y est déjà défini comme ensemble, et les applications d_i et s_i sont toutes connues sauf d_o. Posons

$$d_o(a \times b) = (d_o a)(\tau b) \times (d_o b) \quad \text{pour} \quad a \in \Gamma_{q+1}(\Pi, n) , \ b \in \bar{X}_{q+1} .$$

Alors $(\Gamma(\Pi, n), \bar{X}, Y)$ est un produit cartésien tordu, le seul compatible avec ψ.

Soit maintenant $\alpha : \Gamma(\Pi, n) \longrightarrow \Lambda$ une CSS-application telle que φ^{α} soit l'identité. Soit $\beta : Y_q \longrightarrow X_q$ l'identité pour $q < n$, et posons $\beta(a \times b) = (\alpha a) \times b$ en dimension n. Soit ensuite $a \times b \in Y_{n+1}$; on va définir $\beta(a \times b)$. Observons que

$$d_i((\alpha a) \times b) = \beta d_i(a \times b) \quad \text{pour} \quad i > 0 ,$$

$$d_o((\alpha a) \times b) = (d_o \alpha a)(\tau b) \times (d_o b) = (\alpha d_o a)(\tau b)) \times (d_o b) .$$

De plus $\beta d_o(a \times b) = \alpha((d_o a)(\tau' b)) \times (d_o b)$,

$$\psi d_o((\alpha a) \times b) = \psi \beta d_o(a \times b) = d_o(a \times b) = (d_o a)(\tau' b) \times (d_o b) .$$

Soit $a' = (\tau b)^{-1}(\alpha \tau' b)$. On a

$$\varphi(a') = (\varphi \tau b)^{-1}(\varphi \alpha \tau' b) = (\tau' b)^{-1}(\tau' b) = e_n .$$

Il existe donc un $a'' \in \Lambda_{n+1}$ tel que $d_o a'' = a'$, $d_{i+1} a'' = e_n$. On définit $\beta(a \times b) = (\alpha a) a'' \times b$ si $a \times b$ n'est pas dégénéré, sinon on se sert de l'opérateur de dégénérescence.

Supposons maintenant que β soit défini en dimensions $\leq n+k$ $(k \geq 1)$, et soit $a \times b \in Y_{n+k+1}$. Soit $a_i \in \Lambda_{n+k}$ tel que

$$\beta(d_i(a \times b)) = a_i \times (d_i b) , \quad 0 \leq i \leq n+k+1 .$$

Soit $a' = s_o(a_o).s_1(a_o^{-1} a_1) \ldots s_{n+k}(a_o^{\sigma(n+k)} \ldots a_{n+k})$. Alors $d_i a' = a_i$ pour $i \leq n+k$, et $d_{n+k+1} a' = a_o^{\sigma(n+k)} a_1^{\sigma(n+k-1)} \ldots a_{n+k}$; d'où

$$d_j((d_{n+k+1} a')^{-1} a_{n+k+1}) = e_{n+k-1} \quad \text{pour} \quad 0 \leq j \leq n+k .$$

Puisque le groupe $\Pi_{n+k}(\Lambda)$ est réduit à l'élément neutre, il existe $a'' \in \widetilde{\Pi}_{n+k+1}(\Lambda)$ tel que $d_{n+k+1} a'' = (d_{n+k+1} a')^{-1} a_{n+k+1}$. Finalement, si $a \times b$ n'est pas dégénéré, on pose $\beta(a \times b) = (a' a'') \times b$. Ceci achève la démonstration du lemme 6.

<u>Lemme 7</u> : Soient f et g deux CSS-applications

$$X \longrightarrow \overline{W}(\Gamma(\Pi, n)) = \Gamma(\Pi, n+1)$$

telles que, pour tout $x \in X_{n+1}$, on ait

$$(fx)^{-1}(gx) = \prod_{j=0}^{n+1} h(d_j x)^{\sigma(j)} ,$$

où h désigne une application $X_n \longrightarrow \Pi$. Alors il existe une unique

CSS-application $\lambda_h : W_f(\Gamma(\Pi, n)) \longrightarrow W_g(\Gamma(\Pi, n))$ telle que :

1) λ_h soit l'identité en dimensions $< n$;

2) $\lambda_h(a \times b) = a(hb) \times b$ en dimension n ;

3) $\lambda_h(a \times b) = a(\xi_h b) \times b$ en dimension $q > n$, où ξ_h désigne une application $X_q \longrightarrow \Gamma_q(\Pi, n)$.

<u>Démonstration</u> : λ_h est déjà défini en dimensions $\leq n$. En dimension $n+1$, tout revient à trouver ξ_h, sachant que

$$d_{i+1}(\xi_h b) = h(d_{i+1}b) \text{ , } d_o(\xi_h b) = (hd_o b)(fb)(gb)^{-1} \text{ .}$$

Or, d'après la condition de Kan, il existe un $a' \in \Gamma_{n+1}(\Pi, n)$ tel que $d_{i+1}a' = h(d_{i+1}b)$, et un tel a' est unique puisque $\Gamma(\Pi, n)$ est minimal et que $\Pi_{n+1}(\Gamma(\Pi, n)) = 0$. Puisque $\prod_{j=0}^{n+1} (d_j a')^{\sigma(j)} = e_n$, on a

$$d_o a' = \Big(\prod_{j=1}^{n+1} (d_j a')^{\sigma(j)}\Big)^{-1} = \Big(\prod_{j=0}^{n+1} (hd_j b)^{\sigma(j)}\Big)^{-1}(hd_o b)$$

$$= (fb)(gb)^{-1}(hd_o b) \text{ .}$$

On peut donc prendre $\xi_h(b) = a'$, et λ_h sera une CSS-application en dimensions $\leq n+1$.

La démonstration s'achève facilement, comme celles des lemmes 5 et 6.

<u>Remarque</u> : l'application λ_h du lemme 7 est compatible avec les opérations à gauche de $\Gamma(\Pi, n)$, même si λ_h n'est pas compatible avec les structures de produit cartésien tordu. En outre, si Y est un sous-complexe de X et si h s'annule sur Y, alors

$$\lambda_h(a \times b) = a \times b \text{ pour } a \in \Gamma(\Pi, n) \text{ , } b \in Y \text{ .}$$

<u>Théorème 2.- Soit un système de Postnikov</u>

$$\mathcal{X} = (\overline{W}(\Lambda(\Pi_o, 0)), f^o, \Lambda(\Pi_1, 1), X^1, f^1, \dots)$$

<u>et soit</u> $\varphi^n : \Lambda(\Pi_n, n) \longrightarrow \Gamma(\Pi_n, n)$ <u>l'application naturelle</u>.

<u>Alors il existe un système de Postnikov minimal</u>

$$\mathcal{Y} = (\overline{W}(\Gamma(\Pi_o, 0)), g^o, \Gamma(\Pi_1, 1), Y^1, g^1, \dots)$$

<u>et des homomorphismes</u> $\alpha : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$, <u>et</u> $\beta : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$, <u>tels que</u> :

1) $\alpha^o : \overline{W}(\Lambda(\Pi_o, 0)) \longrightarrow \overline{W}(\Gamma(\Pi_o, 0))$ <u>soit induit par</u> φ^o ;

2) $\alpha\beta$ <u>soit l'identité</u> ;

3) $(\beta^n \alpha^n)_* : H(X^n) \longrightarrow H(X^n)$ <u>soit l'identité</u> ;

4) <u>si</u> $a \in \Lambda_q(\Pi_n , n)$ <u>et</u> $b \in X^n_q$, <u>alors</u> $\alpha^n(a.b) = (\varphi^n a).(\alpha^n b)$.

<u>Démonstration</u> : soit $\bar{\varphi}^n : \bar{W}(\Lambda(\Pi_n , n)) \longrightarrow \bar{W}(\Gamma(\Pi_n , n))$ l'application induite par φ^n . Soit $\lambda^n : X^n \longrightarrow W_{\bar{\varphi}^{n-1} f^{n-1}}(\Gamma(\Pi_n , n))$ l'application naturelle, et soit ξ^n une CSS-application telle que $\lambda^n \xi^n$ soit l'identité.

L'application α^o est déterminée par la condition 1) de l'énoncé. Soit β^o une CSS-application telle que $\alpha^o \beta^o$ soit l'identité ; prenons pour g^o l'application $\bar{\varphi}^1 f^o \beta^o$. Ceci définit Y^1 . Les applications $g^o \alpha^o$ et $\bar{\varphi}^1 f^o$ sont homotopes ; d'après le lemme 7 , il existe donc une application

$$\eta^1 : W_{\bar{\varphi}^1 f^o}(\Gamma(\Pi_1 , 1)) \longrightarrow W_{g^o \alpha^o}(\Gamma(\Pi_1 , 1)) ,$$

et η^1 est un isomorphisme. Soit $\zeta^1 : W_{g^o\alpha^o}(\Gamma(\Pi_1 , 1)) \longrightarrow W_{g^o}(\Gamma(\Pi_1 , 1)) = Y^1$ l'application naturelle .

Soit maintenant $\alpha^1 = \zeta^1 \eta^1 \lambda^1$. De plus, soit

$$\psi^1 = W_{g^o}(\Gamma(\Pi_1 , 1)) = Y^1 \longrightarrow W_{\bar{\varphi}^1 f^o}(\Gamma(\Pi_1 , 1))$$

l'application naturelle. On a

$$\alpha^1 \beta^1 = \zeta^1 \eta^1 \lambda^1 \xi^1 \psi^1 = \zeta^1 \eta^1 \psi^1 ,$$

et on peut supposer que η^1 a été construit de manière à être l'identité sur l'image de ψ^1 . Par conséquent $\alpha^1 \beta^1$ est l'identité, et on voit facilement que $(\beta^1 \alpha^1)_*$ est l'identité.

Supposons enfin que α^k , β^k , g^{k-1} aient été définis pour $k \leq n$. Définissons g^n comme étant $\bar{\varphi}^{n+1} f^n \beta^n$, et recommençons la démonstration précédente en utilisant les lemmes 5, 6, 7 : on achève ainsi la démonstration du théorème 2 .

4.- <u>Le système de Postnikov d'un complexe de groupes</u>.

<u>Définition 3</u> : pour tout complexe de <u>groupes</u> Λ , on notera ${}^n\Lambda$ le sous-complexe d'Eilenberg [4] , se composant des simplexes dont toutes les faces de dimension $< n$ sont l'élément neutre.

Il est clair que ${}^n\Lambda$ est un sous-complexe formé de sous-groupes <u>invariants</u>, et que le complexe quotient ${}^n\Lambda/{}^{n+1}\Lambda$ est un complexe de type $(\Pi_n(\Lambda) , n)$.

<u>Définition 4</u> : soit Λ un complexe de groupes ; posons $\pi_n = \pi_n(\Lambda)$ et notons $\Lambda(\pi_n, n)$ le complexe ${}^n\Lambda/{}^{n+1}\Lambda$. Supposons que Λ soit <u>connexe</u>, i.e. que $\pi_0(\Lambda) = 0$, d'où $\Lambda = {}^1\Lambda$. Définissons $X^n = \Lambda/{}^{n+1}\Lambda$. Soit $\eta : X^{n+1} \longrightarrow X^n$ l'application naturelle, et choisissons une application inverse de η compatible avec les s_i , ainsi qu'avec les d_i pour $i \geqslant 1$. Alors X^{n+1} s'écrit comme un produit cartésien tordu $(\Lambda(\pi_{n+1}, n+1), X^n, X^{n+1})$. On notera f^n l'application naturelle $X^n \longrightarrow \bar{W}(\Lambda(\pi_{n+1}, n+1))$, et on définira le <u>système de Postnikov</u> $\mathfrak{X}(\Lambda)$ comme étant

$$(0 , 0 , \Lambda(\pi_1 , 1) , X^1 , f^1 , \Lambda(\pi_2 , 2) , \dots) .$$

Il dépend du choix des applications η .

<u>Théorème 3.- Soit</u> Λ <u>un complexe de groupes tel que</u> $\Lambda = {}^1\Lambda$. <u>Alors</u> Λ <u>est minimal si et seulement si</u> $\mathfrak{X}(\Lambda)$ <u>est un système de Postnikov minimal</u>.

<u>Démonstration</u> : évidente à partir de définitions.

On a vu, au paragraphe 3, que pour un système de Postnikov minimal, chaque application f^n est déterminée par la donnée du $(n+2)$-cocycle correspondant de X^n à valeurs dans π_{n+1} . On voudrait maintenant voir comment sont faits les complexes de groupes minimaux.

<u>Définition 5</u> : si Λ est un complexe de groupes tel que $\Lambda = {}^1\Lambda$, définissons $\xi^n : X^n \times X^n \longrightarrow \Lambda(\pi_{n+1}, n+1)$ comme suit : dans le produit cartésien tordu X^{n+1} , on a , pour $a , a' \in \Lambda_q(\pi_{n+1}, n+1)$, et $b , b' \in X^n_q$,

$$(a,b)(a',b') = (aa'\xi(b,b') , bb') .$$

Si $\Lambda(\pi_{n+1}, n+1)$ est abélien, on définira $\lambda_{f^n} : X^n \times X^n \longrightarrow \bar{W}(\Lambda(\pi_{n+1}, n+1))$ par $\lambda_{f^n}(x,x') = f^n(xx')f^{n-1}(x)f^{n-1}(x')$. Si Λ est minimal, on notera $\lambda_{f^n} \in Z^{n+2}((X^n \times X^n)_N ; \pi_{n+1})$ le cocycle qui détermine λ_{f^n} , et $\xi^n \in C^{n+1}((X^n \times X^n)_N ; \pi_{n+1})$ la cochaîne qui détermine ξ^n .

<u>Théorème 4.- Soit</u> Γ <u>un complexe minimal de groupes. Alors</u> :

1) $\delta\xi^n = \lambda_{f^n}$;

2) $\xi^n \in Z^2(X^n_{n+1} ; \pi_{n+1})$, <u>en considérant</u> X^n_{n+1} <u>comme un groupe</u>.

Démonstration : on a

$$d_{i+1}\xi^n(x,x') = \xi^n(d_{i+1}x\ ,\ d_{i+1}x')\ ,$$

$$d_o\xi^n(x,x')\tau(xx') = \xi(d_ox\ ,\ d_ox')\tau(x)\tau(x')\ .$$

Par suite, si x et x' sont dans X^n_{n+2} , on a $\delta\xi^n(x,x') = \lambda_{f^n}(x,x')$, ce qui prouve 1) .

De plus il est clair que, puisque X^{n+1}_{n+1} est un groupe, $\xi^n \in Z^{n+1}(X^n_{n+1}\ ;\ \pi_{n+1})$ est le cocycle qui le détermine comme extension du groupe X^n_{n+1} . Et, en vertu de la proposition 2 , les coefficients sont simples.

Bien que $\xi^n : X^n \times X^n \longrightarrow \Gamma(\pi_{n+1}\ ;\ n+1)$ ne soit pas une CSS-application, on voit facilement qu'elle est déterminée par sa restriction $X^n_{n+1} \times X^n_{n+1} \longrightarrow \Gamma_{n+1}(\pi_{n+1}\ ,\ n+1) = \pi_{n+1}$.

Ainsi on voit qu'un complexe minimal de groupes est entièrement déterminé par la donnée, pour chaque n , d'un élément $f^n \in Z^{n+2}(X^n_N\ ;\ \pi_{n+1})$ et d'un élément $\xi^n \in C^{n+1}(X^n \times X^n\ ;\ \pi_{n+1})$ tels que $\delta\xi^n = \lambda_{f^n}$, et cela de manière que si on considère ξ^n comme une 2-cochaîne du groupe X^n_{n+1} avec coefficients (simples) dans π_{n+1} , ξ^n soit un 2-cocycle. Le fait que λ_{f^n} est un cocycle exprime que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X^n \times X^n & \xrightarrow{\ f^n \times f^n\ } & \Gamma(\pi_{n+1}\ ,\ n+1) \times \Gamma(\pi_{n+1}\ ,\ n+1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^n & \xrightarrow{\quad f^n \quad} & \Gamma(\pi_{n+1}\ ,\ n+1) \end{array}$$

est "presque commutatif" (cf. Exp. 14, paragraphe 5). D'après les théorèmes 3 et 4 de l'Exposé 14, il suffit pour cela que f^n soit dans l'image de la suspension. En fait, dans le cas qui nous occupe, f^n est bien dans l'image de la suspension, parce que $\delta\xi^n = \lambda_{f^n}$ et qu'on a en même temps $\xi^n \in Z^{n+1}(X^n_{n+1}\ ;\pi_{n+1})$.

Proposition 3 : Si Γ est un complexe minimal de groupes, et si l'application $\zeta^n : \bar{W}_{n+3}(X^n) \longrightarrow \pi_{n+1}$ est définie par

$$\zeta^n(x_{n+2}\ ,\ \ldots\ ,\ x_o) = f^n(x_{n+2})(\xi^n(d_ox_{n+2}\ ,\ x_{n+1}))^{-1}\ ,$$

alors :

1) $\zeta^n \in Z^{n+3}(\bar{W}_N(X^n)\ ;\ \pi_{n+1})$;

2) <u>la suspension de</u> ζ^n est f^n .

La démonstration est laissée au lecteur.

<u>Remarque finale</u> : on ne sait pas grand chose au sujet de l'existence de complexes de groupes minimaux. Si ce ne sont pas des produits de complexes $\Gamma(\Pi, n)$, ils ne peuvent pas être abéliens (en vertu du théorème 6 de l'Exposé 19) ; mais pour le moment la question de caractériser les systèmes minimaux de Postnikov qui correspondent aux complexes de groupes minimaux semble à peine avoir été abordée.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] POSTNIKOV, M.M. ; Doklady 67-3, 66-4, 71-6 .

[2] HELLER, Alex : <u>Homotopy resolutions of semi-simplicial complexes</u> (Trans. Amer. Math. Soc., à paraître).

[3] EILENBERG-MAC LANE : <u>Relation between homology and homotopy groups of spaces</u> II (Ann. of Math., 51, 1950, p.514-533).

[4] EILENBERG, Samuel : <u>Singular homology theory</u> (Ann. of Math., 45, 1944, p. 407-447).
