

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

J. C. MOORE

Systèmes de Postnikov et complexes monoïdaux

Séminaire Henri Cartan, tome 7, n° 2 (1954-1955), exp. n° 21, p. 1-12

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1954-1955__7_2_A11_0

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SYSTÈMES DE POSTNIKOV ET COMPLEXES MONOÏDAUX

(Exposé de J. C. MOORE, 16.5.1955)

On se propose de donner une construction explicite de complexes CSS (Exp. 14) à partir des complexes $K(\Pi, n)$, ou plutôt $\Gamma(\Pi, n)$ (cf. Exp. 19, paragraphe 3) ; et ceci d'une manière assez générale pour qu'on obtienne ainsi un complexe "équivalent" à n'importe quel complexe de groupes. En fait, le procédé de Postnikov [1] et Zilber (non publié) permet d'obtenir un complexe équivalent au complexe singulier de n'importe quel espace topologique ; mais ici nous nous limiterons au cas des complexes de groupes. Voir aussi [2].

1.- Préliminaires.

Lemme 1 : Soit Γ un complexe monoïdal avec homotopie (Exp. 18, déf. 4). Soit $x \in \Gamma_{n+1}$ tel que $d_i d_j x = e_{n-1}$ pour $0 \leq i < j \leq n+1$. Alors il existe $y \in \widetilde{\Pi}_{n+1}(\Gamma)$ tel que

$$d_{n+1} y = (d_0 x)(d_1 x)^{-1}(d_2 x) \dots (d_{n+1} x)^{\sigma(n+1)},$$

où $\sigma(j)$ désigne $(-1)^j$.

Démonstration : on prouve, par récurrence sur l'entier k ($0 \leq k \leq n+1$), l'existence d'un $y^k \in \Gamma_{n+1}$ tel que

$$d_j y^k = e_n \text{ pour } j < k, \quad d_i d_j y^k = e_{n-1} \text{ pour } 0 \leq i < j \leq n+1 \text{ et}$$

$$\prod_{j=0}^{n+1} (d_j y^k)^{\sigma(j)} = \prod_{j=0}^{n+1} (d_j x)^{\sigma(j)}.$$

On prend d'abord $y^0 = x$; supposons défini y^k , avec $k \leq n$, et définissons y^{k+1} . Pour cela, posons

$$x^{k+1} = y^k (s_k d_k \overline{y^k}) \text{ si } k \text{ pair, } x^{k+1} = (s_k d_k \overline{y^k}) y^k \text{ si } k \text{ impair.}$$

Raisonnons par exemple pour k pair (le cas où k est impair se traite d'une manière analogue) : on a

$$d_j x^{k+1} = e_n \text{ pour } j < k, \quad d_k x^{k+1} = (d_k y^k)(d_k \overline{y^k})$$

$$d_{k+1} x^{k+1} = (d_{k+1} y^k)(d_k \overline{y^k}), \quad d_j x^{k+1} = d_j y^k \text{ pour } j \geq k+2.$$

D'après l'axiome de remplacement (Exp. 18, paragraphe 2), il existe y^{k+1}

tel que $d_j y^{k+1} = e_n$ pour $j \leq k$, et $d_j y^{k+1} = d_j x^{k+1}$ pour $j > k$.

Cet élément y^{k+1} satisfait aux conditions voulues. Finalement, si on prend y^{n+1} , c'est un élément y qui satisfait aux conditions de l'énoncé.

Proposition 1 : Soit Γ un complexe monoïdal avec homotopie, et soit $n \geq 0$. Si $\Gamma_q = 0$ pour $q < n$, il existe une application multiplicative naturelle $f : \Gamma \longrightarrow \Gamma(\Pi_n(\Gamma), n)$.

Démonstration : puisque $\Gamma_q = 0$ pour $q < n$, on a une application naturelle $f : \Gamma_n \longrightarrow \Pi_n(\Gamma)$, et f est multiplicative. De plus, le lemme 1 montre que f est un n -cocycle de Γ à valeurs dans $\Pi_n(\Gamma)$. Alors la proposition suit de l'Exposé 14, paragraphe 1.

Lemme 2 : Soit Γ un complexe de groupes, minimal (cf. Exp. 19, paragraphe 2). Soit $y \in \Gamma_{q+1}$ tel que $d_j y = e_q$ pour $j \neq k$; alors $d_k y = e_q$.

Démonstration : posons $d_k y = x$. Si $k \leq q$, soit $z = y^{-1}(s_k x)$; on a $d_j z = e_q$ pour $j \neq k+1$, et $d_{k+1} z = x$. Il suffit donc d'examiner le cas où $k = q+1$. Alors $y \in \widetilde{\Pi}_{q+1}(\Gamma)$, et puisque Γ est minimal on a $d_{q+1} y = e_q$.

Notation : si Γ est un complexe de groupes, et si $x, y \in \Gamma_q$, on note $[x, y]$ la quantité $xyx^{-1}y^{-1}$. Il est évident que

$$d_i[x, y] = [d_i x, d_i y], \quad s_i[x, y] = [s_i x, s_i y].$$

Lemme 3 : Soit Γ un complexe de groupes, minimal. Si $x \in \widetilde{\Pi}_{q+1}(\Gamma)$, $y \in \Gamma_{q+1}$ et $d_k y = e_q$ pour un $k > 0$, alors $[x, y] = e_{q+1}$.

Démonstration : On a

$$d_j[s_k x, s_{k-1} y] = [s_{k-1} d_j x, d_j s_{k-1} y] = e_{q+1} \quad \text{pour } j \leq k-1,$$

$$d_k[s_k x, s_{k-1} y] = [x, y], \quad d_{k+1}[s_k x, s_{k-1} y] = [x, s_{k-1} d_k y] = e_{q+1},$$

$$d_j[s_k x, s_{k-1} y] = [s_k d_{j-1} x, d_j s_{k-1} y] = e_{q+1} \quad \text{pour } j > k+1.$$

Ainsi $d_j[s_k x, s_{k-1} y] = e_{q+1}$ pour $j \neq k$; d'après le lemme 2, c'est encore vrai pour $j = k$, donc $[x, y] = e_{q+1}$.

Lemme 4 : Soit Γ un complexe de groupes, minimal. Si $x \in \widetilde{\Pi}_{q+1}(\Gamma)$, $u \in \Gamma_{q+1}$, $v \in \Gamma_{q+1}$, et si $d_k u = d_k v$ pour un $k > 0$, alors

$$[x, u] = [x, v].$$

En effet, cette dernière relation équivaut à $[x, u^{-1}v] = e_{q+1}$; en posant $u^{-1}v = y$, on est ramené au lemme 3.

Proposition 2 : Soit Γ un complexe de groupes, minimal, tel que $\Pi_0(\Gamma) = 0$. Alors $\Pi_q(\Gamma)$ est contenu dans le centre de Γ_q .

Démonstration : c'est trivial si $q = 0$. Supposons $q \geq 1$, et soit $y \in \Gamma_q$. Posons $y_1 = s_0 d_1 y$, $y_2 = s_1 d_2 y_1$, ..., $y_q = s_{q-1} d_q y_{q-1}$. On a $d_1 y = d_1 y_1$, ..., $d_q y_{q-1} = d_q y_q$. D'après le lemme 4, on a $[x, y] = [x, y_1] = \dots = [x, y_q]$ dès que $x \in \Pi_q(\Gamma)$. Or $y_q = s_{q-1} s_{q-2} \dots s_0 (d_1)^q y$, et comme $(d_1)^q y = e_0$ à cause de l'hypothèse sur $\Pi_0(\Gamma)$, on a $y_q = e_q$. Ainsi $[x, y] = e_q$, ce qui prouve la proposition.

2.- Produit cartésien tordu induit par une application.

Soit Γ un complexe monoïdal. Rappelons (cf. Exp. 19, paragraphe 1) que

$$\bar{W}_{q+1}(\Gamma) = \Gamma_q + \dots + \Gamma_0.$$

Définissons $\tau : \bar{W}_{q+1}(\Gamma) \longrightarrow \Gamma_q$ par $\tau(x_q, \dots, x_0) = x_q$.

Soit maintenant Y un CSS-complexe, et soit

$$f : Y \longrightarrow \bar{W}(\Gamma)$$

une CSS-application. De même qu'on a défini l'espace fibré induit par une application (Exposé 17, paragraphe 1), on définit ici le complexe $W_f(\Gamma)$ comme suit : ses éléments de dimension q sont les couples (x, y) tels que $x \in \Gamma_q$, $y \in Y_q$; on pose

$$\left\{ \begin{array}{l} d_0(x, y) = ((d_0 x)(\tau f y), d_0 y), \\ d_{i+1}(x, y) = (d_{i+1} x, d_{i+1} y), \\ s_i(x, y) = (s_i x, s_i y). \end{array} \right.$$

On fait opérer Γ à gauche dans $W_f(\Gamma)$, en posant

$$x' \cdot (x, y) = (x'x, y) \text{ pour } x', x \in \Gamma_q, y \in Y_q.$$

On notera encore $\tau : Y_{q+1} \longrightarrow \Gamma_q$ l'application composée $\tau \circ f$.

Théorème 1.- Soient Γ un complexe monoïdal, Y un complexe CSS, et $f : Y \longrightarrow \bar{W}(\Gamma)$ une CSS-application. Alors $(\Gamma, Y, W_f(\Gamma))$ est un produit cartésien tordu.

Démonstration : soit $(x, y) \in W_F(\Gamma)_{q+1}$. On a

$$d_0 d_{i+1}(x, y) = d_0(d_{i+1}x, d_{i+1}y) = ((d_0 d_{i+1}x)(\tau d_{i+1}fy), d_{i+1}y) .$$

Si $i > 0$, on a $\tau d_{i+1} = d_i \tau$, et par suite

$$d_0 d_{i+1}(x, y) = d_i d_0(x, y) .$$

Si $i = 0$, alors $\tau d_1 x = (d_0 \tau x)(\tau d_0 x)$, et on obtient la dernière identité des opérateurs de face d'un complexe. On achève la démonstration en observant que $\tau s_0 x = e_{q+1}$, $\tau s_{i+1} x = s_i \tau x$, et par suite

$$d_0 s_{i+1}(x, y) = s_i d_0(x, y) , \quad d_0 s_0(x, y) = (x, y) .$$

3.- Systèmes de Postnikov.

Définition 1 : Un complexe monoïdal avec homotopie $\Lambda = (\Lambda_q)$ sera dit de type (Π, n) si :

- (i) $\Pi_q(\Lambda) = 0$ pour $q \neq n$, et $\Pi_n(\Lambda) = \Pi$;
- (ii) $\Lambda_q = 0$ pour $q < n$.

Exemple : le complexe minimal $\Gamma(\Pi, n)$ défini dans l'Exposé 19, paragraphe 3 .

Si Λ est un complexe de type (Π, n) , la proposition 1 donne une application naturelle $\Lambda \longrightarrow \Gamma(\Pi, n)$.

Définition 2 : Un système de Postnikov est une suite

$$\mathfrak{K} = (\bar{W}(\Lambda(\Pi_0, 0), f^0, \Lambda(\Pi_1, 1), X^1, f^1, \dots, \Lambda(\Pi_n, n), X^n, f^n, \dots))$$

où $\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_n$ sont des groupes, tous abéliens sauf peut-être Π_0 , et où :

- 1) $\Lambda(\Pi_n, n)$ est un complexe de groupes de type (Π_n, n) ;
- 2) f^0 est une CSS-application $\bar{W}(\Lambda(\Pi_0, 0)) \longrightarrow \bar{W}(\Lambda(\Pi_1, 1))$;
- 3) pour $j \geq 1$, f^j est une CSS-application $X^j \longrightarrow \bar{W}(\Lambda(\Pi_{j+1}, j+1))$;
- 4) pour $j \geq 0$, X^{j+1} est le complexe induit par f^j , complexe qu'on note $W_{f^j}(\Lambda(\Pi_{j+1}, j+1))$ (cf. paragraphe 2).

L'application f^j définit une application

$$X^j \longrightarrow \bar{W}(\Gamma(\Pi_{j+1}, j+1)) = \Gamma(\Pi_{j+1}, j+2) , \text{ c'est-à-dire un } (j+2)\text{-cocycle de } X^j \text{ à valeurs dans } \Pi_{j+1} .$$

Un système de Postnikov est dit minimal si $\Lambda(\Pi_n, n) = \Gamma(\Pi_n, n)$

pour tout n ; dans ce cas, le $(j+2)$ -cocycle précédent détermine l'application f^j . Ce cocycle est ce qu'on appelle habituellement l'invariant k d'Eilenberg-MacLane [3]

Soit \mathcal{X}^1 le "produit cartésien tordu" $(\wedge(\pi_1, 1), \bar{w}(\wedge(\pi_0, 0), X^1))$; et soit, pour $n > 0$, \mathcal{X}^{n+1} le produit cartésien tordu $(\wedge(\pi_{n+1}, n+1), X^n, X^{n+1})$ défini par l'application f^n . Les complexes X^n et X^{n+1} ont mêmes faces de dimension q pour $q \leq n$; soit X^∞ le complexe-limite, tel que $X_q^\infty = X_q^n$ pour $q \leq n$. On notera $E^2(\mathcal{X}^n)$ le terme E^2 de la suite spectrale du produit cartésien tordu \mathcal{X}^n .

L'application f^0 définit un élément $\alpha \in H^2(\pi_0, 1; \pi_1)$ qui est l'image de la "classe fondamentale" de $H^2(\pi_1, 2; \pi_1)$ par l'homomorphisme défini par $f^0 : \bar{w}(\wedge(\pi_0, 0)) \rightarrow \bar{w}(\wedge(\pi_1, 1))$. Alors α détermine une extension de π_0 par π_1 :

$$0 \longrightarrow \pi_1 \longrightarrow \pi_1' \longrightarrow \pi_0 \longrightarrow 0 \quad (\text{suite exacte}),$$

définie à une équivalence d'extensions près. Posons

$$\pi_n(X^\infty) = \pi_n \quad \text{pour } n > 1, \quad \pi_1(X^\infty) = \pi_1'.$$

Soit un second système de Postnikov :

$$\mathcal{X}' = (\bar{w}(\wedge(\pi_0', 0), f'^0, \wedge(\pi_1', 1), X_1', f_1', \dots, \wedge(\pi_n', n), X'^n, f'^n, \dots)).$$

Un homomorphisme $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ consiste dans la donnée d'applications $h^0 : \bar{w}(\wedge(\pi_0, 0)) \rightarrow \bar{w}(\wedge(\pi_0', 0))$, $h^n : X^n \rightarrow X'^n$ (pour $n \geq 1$), telles que :

- (a) la restriction de h^{n+1} à X^n soit h^n ;
- (b) $h^{n+1}(\mathbb{F}_p X^{n+1}) \subset \mathbb{F}_p X'^n$ (\mathbb{F}_p désignant la filtration).

Alors les h^n induisent une application $h : X^\infty \rightarrow X'^\infty$.

Dans ce qui suit, on se propose de comparer un système de Postnikov donné à un système de Postnikov minimal.

Lemme 5 : Soit Λ un complexe de groupes de type (π, n) . Si $\varphi : \Lambda \rightarrow \Gamma(\pi, n)$ désigne l'application naturelle, il existe une CSS-application $\alpha : \Gamma(\pi, n) \rightarrow \Lambda$ telle que $\varphi\alpha$ soit l'identité. (Mais α n'est pas multiplicative, en général).

Démonstration : puisque $\Lambda_q = \{e_q\}$ pour $q < n$, α_q est bien définie pour $q < n$. Soit $\alpha_n : \pi \rightarrow \Lambda_n$ une application telle que

$\varphi_n \alpha_n$ soit l'identité. Si $x \in \Gamma_{n+1}(\Pi, n)$, alors, d'après le lemme 1, il existe un $y_x \in \widetilde{\Pi}_{n+1}(\wedge)$ tel que $d_{n+1} y_x = \prod_{j=0}^{n+1} \alpha_n(d_j x)^{\sigma(j)}$. Définissons

$$\alpha_{n+1}(x) = s_0(\alpha_n d_0 x) \cdot s_1(\alpha_n(d_0 x)^{-1} \alpha_n(d_1 x)) \dots \\ \dots s_n(\alpha_n(d_0 x)^{\sigma(n)} \alpha_n(d_1 x)^{\sigma(n-1)} \dots \alpha_n(d_n x)) \cdot (y_x)^{\sigma(n+1)},$$

dans le cas où x est non dégénéré ; sinon, si $x = s_i x'$, posons

$$\alpha_{n+1}(x) = s_i \alpha_n(x'). \text{ Alors } d_j \alpha_{n+1}(x) = \alpha_n d_j x.$$

Supposons α_i défini pour $i \leq n+k$ ($k \geq 1$), et soit $x \in \Gamma_{n+k+1}(\Pi, n)$ non dégénéré. Soit y_x un élément tel que

$d_i y_x = \alpha_{n+k}(d_i x)$ pour $i \leq n+k$; un tel y_x existe en vertu de la condition de Kan (Exp. 18, condition (ii) de la déf. 3). On a

$$d_j((d_{n+k+1} y_x)(\alpha_{n+k} d_{n+k+1} x)^{-1}) = e_{n+k-1} \text{ pour } 0 \leq j \leq n+k.$$

Donc $(d_{n+k+1} y_x)(\alpha_{n+k} d_{n+k+1} x)^{-1}$ représente un élément de $\pi_{n+k}(\wedge)$,

groupe qui est réduit à l'élément neutre puisque $k \geq 1$. Il existe donc

un $z_x \in \widetilde{\Pi}_{n+k+1}(\wedge)$ tel que $d_{n+k+1} z_x = (\alpha_{n+k} d_{n+k+1} x)(d_{n+k+1} y_x)^{-1}$.

On pose $\alpha_{n+k+1}(x) = z_x y_x$. Ceci achève la définition récurrente de l'application α . Comme $\varphi \alpha$ est l'identité en dimension n , il en est de même en toute dimension.

Lemme 6 : Soit Λ un complexe de groupes de type (Π, n) , et soit $\varphi : \Lambda \longrightarrow \Gamma(\Pi, n)$ l'application naturelle. Si (Λ, \bar{X}, X) est un produit cartésien tordu, il existe un unique produit cartésien tordu $(\Gamma(\Pi, n), \bar{X}, Y)$ tel que l'application $\psi : X \longrightarrow Y$ définie par $\psi(a \times b) = \varphi(a) \times b$ pour $a \in \Lambda$, $b \in \bar{X}$, soit une CSS-application. En outre, il existe une CSS-application $\beta : Y \longrightarrow X$ telle que $\psi \beta$ soit l'identité.

Démonstration : soit τ l'application composée

$$\bar{X}_{q+1} \xrightarrow{\tau} \Lambda_q \xrightarrow{\varphi} \Gamma_q(\Pi, n).$$

Y est déjà défini comme ensemble, et les applications d_i et s_i sont toutes connues sauf d_0 . Posons

$$d_0(a \times b) = (d_0 a)(\tau b) \times (d_0 b) \text{ pour } a \in \Gamma_{q+1}(\Pi, n), b \in \bar{X}_{q+1}.$$

Alors $(\Gamma(\Pi; n), \bar{X}, Y)$ est un produit cartésien tordu, le seul compatible avec ψ .

Soit maintenant $\alpha : \Gamma(\Pi, n) \longrightarrow \Lambda$ une CSS-application telle que $\varphi \alpha$ soit l'identité. Soit $\beta : Y_q \longrightarrow X_q$ l'identité pour $q < n$, et posons $\beta(a \times b) = (\alpha a) \times b$ en dimension n . Soit ensuite $a \times b \in Y_{n+1}$; on va définir $\beta(a \times b)$. Observons que

$$d_i((\alpha a) \times b) = \beta d_i(a \times b) \text{ pour } i > 0,$$

$$d_0((\alpha a) \times b) = (d_0 \alpha a)(\tau b) \times (d_0 b) = (\alpha d_0 a)(\tau b) \times (d_0 b).$$

De plus $\beta d_0(a \times b) = \alpha((d_0 a)(\tau' b)) \times (d_0 b)$;

$$\psi d_0((\alpha a) \times b) = \psi \beta d_0(a \times b) = d_0(a \times b) = (d_0 a)(\tau' b) \times (d_0 b).$$

Soit $a' = (\tau b)^{-1}(\alpha \tau' b)$. On a

$$\varphi(a') = (\varphi \tau b)^{-1}(\varphi \alpha \tau' b) = (\tau' b)^{-1}(\tau' b) = e_n.$$

Il existe donc un $a'' \in \Lambda_{n+1}$ tel que $d_0 a'' = a'$, $d_{i+1} a'' = e_n$. On définit

$\beta(a \times b) = (\alpha a) a'' \times b$ si $a \times b$ n'est pas dégénéré, sinon on se sert de l'opérateur de dégénérescence.

Supposons maintenant que β soit défini en dimensions $\leq n+k$ ($k \geq 1$), et soit $a \times b \in Y_{n+k+1}$. Soit $a_i \in \Lambda_{n+k}$ tel que

$$\beta(d_i(a \times b)) = a_i \times (d_i b), \quad 0 \leq i \leq n+k+1.$$

Soit $a' = s_0(a_0) \cdot s_1(a_0^{-1} a_1) \dots s_{n+k}(a_0^{\sigma(n+k)} \dots a_{n+k})$. Alors $d_i a' = a_i$ pour $i \leq n+k$, et $d_{n+k+1} a' = a_0^{\sigma(n+k)} a_1^{\sigma(n+k-1)} \dots a_{n+k}$; d'où

$$d_j((d_{n+k+1} a')^{-1} a_{n+k+1}) = e_{n+k-1} \text{ pour } 0 \leq j \leq n+k.$$

Puisque le groupe $\Pi_{n+k}(\Lambda)$ est réduit à l'élément neutre, il existe

$a'' \in \tilde{\Pi}_{n+k+1}(\Lambda)$ tel que $d_{n+k+1} a'' = (d_{n+k+1} a')^{-1} a_{n+k+1}$. Finalement, si

$a \times b$ n'est pas dégénéré, on pose $\beta(a \times b) = (a' a'') \times b$. Ceci achève la démonstration du lemme 6.

Lemme 7 : Soient f et g deux CSS-applications

$$X \longrightarrow \bar{W}(\Gamma(\Pi, n)) = \Gamma(\Pi, n+1)$$

telles que, pour tout $x \in X_{n+1}$, on ait

$$(fx)^{-1}(gx) = \prod_{j=0}^{n+1} h(d_j x)^{\sigma(j)},$$

où h désigne une application $X_n \longrightarrow \Pi$. Alors il existe une unique

CSS-application $\lambda_h : W_f(\Gamma(\Pi, n)) \longrightarrow W_g(\Gamma(\Pi, n))$ telle que :

- 1) λ_h soit l'identité en dimensions $< n$;
- 2) $\lambda_h(a \times b) = a(hb) \times b$ en dimension n ;
- 3) $\lambda_h(a \times b) = a(\xi_h b) \times b$ en dimension $q > n$, où ξ_h désigne

une application $X_q \longrightarrow \Gamma_q(\Pi, n)$.

Démonstration : λ_h est déjà ^{défini} en dimensions $\leq n$. En dimension $n+1$, tout revient à trouver ξ_h , sachant que

$$d_{i+1}(\xi_h b) = h(d_{i+1} b), \quad d_0(\xi_h b) = (hd_0 b)(fb)(gb)^{-1}.$$

Or, d'après la condition de Kan, il existe un $a' \in \Gamma_{n+1}(\Pi, n)$ tel que $d_{i+1} a' = h(d_{i+1} b)$, et un tel a' est unique puisque $\Gamma(\Pi, n)$ est minimal et que $\prod_{n+1}(\Gamma(\Pi, n)) = 0$. Puisque $\prod_{j=0}^{n+1} (d_j a')^{\sigma(j)} = e_n$,

on a

$$\begin{aligned} d_0 a' &= \left(\prod_{j=1}^{n+1} (d_j a')^{\sigma(j)} \right)^{-1} = \left(\prod_{j=0}^{n+1} (hd_j b)^{\sigma(j)} \right)^{-1} (hd_0 b) \\ &= (fb)(gb)^{-1} (hd_0 b). \end{aligned}$$

On peut donc prendre $\xi_h(b) = a'$, et λ_h sera une CSS-application en dimensions $\leq n+1$.

La démonstration s'achève facilement, comme celles des lemmes 5 et 6.

Remarque : l'application λ_h du lemme 7 est compatible avec les opérations à gauche de $\Gamma(\Pi, n)$, même si λ_h n'est pas compatible avec les structures de produit cartésien tordu. En outre, si Y est un sous-complexe de X et si h s'annule sur Y , alors

$$\lambda_h(a \times b) = a \times b \quad \text{pour } a \in \Gamma(\Pi, n), \quad b \in Y.$$

Théorème 2.- Soit un système de Postnikov

$$\mathfrak{X} = (\bar{W}(\wedge(\pi_0, 0), f^0, \wedge(\pi_1, 1), X^1, f^1, \dots))$$

et soit $\varphi^n : \wedge(\pi_n, n) \longrightarrow \Gamma(\pi_n, n)$ l'application naturelle.

Alors il existe un système de Postnikov minimal

$$\mathfrak{Y} = (\bar{W}(\Gamma(\pi_0, 0), g^0, \Gamma(\pi_1, 1), Y^1, g^1, \dots))$$

et des homomorphismes $\alpha : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{Y}$, et $\beta : \mathfrak{Y} \longrightarrow \mathfrak{X}$, tels que :

- 1) $\alpha^0 : \bar{W}(\wedge(\pi_0, 0)) \longrightarrow \bar{W}(\Gamma(\pi_0, 0))$ soit induit par φ^0 ;
- 2) $\alpha\beta$ soit l'identité ;

3) $(\beta^n \alpha^n)_* : H(X^n) \longrightarrow H(X^n)$ soit l'identité ;

4) si $a \in \wedge_q(\Pi_n, n)$ et $b \in X_q^n$, alors $\alpha^n(a.b) = (\varphi^n a).(\alpha^n b)$.

Démonstration : soit $\bar{\varphi}^n : \bar{W}(\wedge(\Pi_n, n)) \longrightarrow \bar{W}(\Gamma(\Pi_n, n))$ l'application induite par φ^n . Soit $\lambda^n : X^n \longrightarrow W_{\varphi}^{n-1, n-1}(\Gamma(\Pi_n, n))$ l'application naturelle, et soit ξ^n une CSS-application telle que $\lambda^n \xi^n$ soit l'identité.

L'application α^0 est déterminée par la condition 1) de l'énoncé. Soit β^0 une CSS-application telle que $\alpha^0 \beta^0$ soit l'identité ; prenons pour g^0 l'application $\bar{\varphi}^1 f^0 \beta^0$. Ceci définit Y^1 . Les applications $g^0 \alpha^0$ et $\bar{\varphi}^1 f^0$ sont homotopes ; d'après le lemme 7 , il existe donc une application

$$\eta^1 : W_{\varphi f^0}^{-1}(\Gamma(\Pi_1, 1)) \longrightarrow W_{g^0 \alpha^0}(\Gamma(\Pi_1, 1)) ,$$

et η^1 est un isomorphisme. Soit $\zeta^1 : W_{g^0 \alpha^0}(\Gamma(\Pi_1, 1)) \longrightarrow W_{g^0}(\Gamma(\Pi_1, 1)) = Y^1$ l'application naturelle .

Soit maintenant $\alpha^1 = \zeta^1 \eta^1 \lambda^1$. De plus, soit

$$\psi^1 = W_{g^0}(\Gamma(\Pi_1, 1)) = Y^1 \longrightarrow W_{\varphi f^0}^{-1}(\Gamma(\Pi_1, 1))$$

l'application naturelle. On a

$$\alpha^1 \beta^1 = \zeta^1 \eta^1 \lambda^1 \xi^1 \psi^1 = \zeta^1 \eta^1 \psi^1 ,$$

et on peut supposer que η^1 a été construit de manière à être l'identité sur l'image de ψ^1 . Par conséquent $\alpha^1 \beta^1$ est l'identité, et on voit facilement que $(\beta^1 \alpha^1)_*$ est l'identité.

Supposons enfin que $\alpha^k, \beta^k, g^{k-1}$ aient été définis pour $k \leq n$. Définissons g^n comme étant $\bar{\varphi}^{n+1} f^n \beta^n$, et recommençons la démonstration précédente en utilisant les lemmes 5, 6, 7 : on achève ainsi la démonstration du théorème 2 .

4.- Le système de Postnikov d'un complexe de groupes.

Définition 3 : pour tout complexe de groupes \wedge , on notera ${}^n \wedge$ le sous-complexe d'Eilenberg [4], se composant des simplexes dont toutes les faces de dimension $< n$ sont l'élément neutre.

Il est clair que ${}^n \wedge$ est un sous-complexe formé de sous-groupes invariants, et que le complexe quotient ${}^n \wedge / {}^{n+1} \wedge$ est un complexe de type $(\Pi_n(\wedge), n)$.

Définition 4 : soit Λ un complexe de groupes ; posons $\pi_n = \pi_n(\Lambda)$ et notons $\Lambda(\pi_n, n)$ le complexe ${}^n\Lambda / {}^{n+1}\Lambda$. Supposons que Λ soit connexe, i.e. que $\pi_0(\Lambda) = 0$, d'où $\Lambda = {}^1\Lambda$. Définissons $X^n = \Lambda / {}^{n+1}\Lambda$. Soit $\gamma : X^{n+1} \longrightarrow X^n$ l'application naturelle, et choisissons une application inverse de γ compatible avec les s_i , ainsi qu'avec les d_i pour $i \geq 1$. Alors X^{n+1} s'écrit comme un produit cartésien tordu $(\Lambda(\pi_{n+1}, n+1), X^n, X^{n+1})$. On notera f^n l'application naturelle $X^n \longrightarrow \bar{W}(\Lambda(\pi_{n+1}, n+1))$, et on définira le système de Postnikov $\mathcal{X}(\Lambda)$ comme étant

$$(0, 0, \Lambda(\pi_1, 1), X^1, f^1, \Lambda(\pi_2, 2), \dots).$$

Il dépend du choix des applications γ .

Théorème 3. - Soit Λ un complexe de groupes tel que $\Lambda = {}^1\Lambda$. Alors Λ est minimal si et seulement si $\mathcal{X}(\Lambda)$ est un système de Postnikov minimal.

Démonstration : évidente à partir de définitions.

On a vu, au paragraphe 3, que pour un système de Postnikov minimal, chaque application f^n est déterminée par la donnée du $(n+2)$ -cocycle correspondant de X^n à valeurs dans π_{n+1} . On voudrait maintenant voir comment sont faits les complexes de groupes minimaux.

Définition 5 : si Λ est un complexe de groupes tel que $\Lambda = {}^1\Lambda$, définissons $\xi^n : X^n \times X^n \longrightarrow \Lambda(\pi_{n+1}, n+1)$ comme suit : dans le produit cartésien tordu X^{n+1} , on a, pour $a, a' \in \Lambda_q(\pi_{n+1}, n+1)$, et $b, b' \in X_q^n$,

$$(a, b)(a', b') = (aa' \xi(b, b'), bb').$$

Si $\Lambda(\pi_{n+1}, n+1)$ est abélien, on définira $\lambda_{fn} : X^n \times X^n \longrightarrow \bar{W}(\Lambda(\pi_{n+1}, n+1))$ par $\lambda_{fn}(x, x') = f^n(xx')f^{n-1}(x)f^{n-1}(x')$. Si Λ est minimal, on notera $\lambda_{fn} \in Z^{n+2}((X^n \times X^n)_N; \pi_{n+1})$ le cocycle qui détermine λ_{fn} , et $\xi^n \in C^{n+1}((X^n \times X^n)_N; \pi_{n+1})$ la cochaîne qui détermine ξ^n .

Théorème 4. - Soit Γ un complexe minimal de groupes. Alors :

- 1) $\delta \xi^n = \lambda_{fn}$;
- 2) $\xi^n \in Z^2(X_{n+1}^n; \pi_{n+1})$, en considérant X_{n+1}^n comme un groupe.

Démonstration : on a

$$d_{i+1} \xi^n(x, x') = \xi^n(d_{i+1}x, d_{i+1}x'),$$

$$d_0 \xi^n(x, x') \tau(xx') = \xi(d_0x, d_0x') \tau(x) \tau(x').$$

Par suite, si x et x' sont dans X_{n+2}^n , on a $\delta \xi^n(x, x') = \lambda_{fn}(x, x')$, ce qui prouve 1).

De plus il est clair que, puisque X_{n+1}^{n+1} est un groupe, $\xi^n \in Z^{n+1}(X_{n+1}^n; \pi_{n+1})$ est le cocycle qui le détermine comme extension du groupe X_{n+1}^n . Et, en vertu de la proposition 2., les coefficients sont simples.

Bien que $\xi^n : X^n \times X^n \longrightarrow \Gamma(\pi_{n+1}; n+1)$ ne soit pas une CSS-application, on voit facilement qu'elle est déterminée par sa restriction $X_{n+1}^n \times X_{n+1}^n \longrightarrow \Gamma_{n+1}(\pi_{n+1}, n+1) = \pi_{n+1}$.

Ainsi on voit qu'un complexe minimal de groupes est entièrement déterminé par la donnée, pour chaque n , d'un élément $f^n \in Z^{n+2}(X_N^n; \pi_{n+1})$ et d'un élément $\xi^n \in C^{n+1}(X^n \times X^n; \pi_{n+1})$ tels que $\delta \xi^n = \lambda_{fn}$, et cela de manière que si on considère ξ^n comme une 2-cochaîne du groupe X_{n+1}^n avec coefficients (simples) dans π_{n+1} , ξ^n soit un 2-cocycle. Le fait que λ_{fn} est un cocycle exprime que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X^n \times X^n & \xrightarrow{f^n \times f^n} & \Gamma(\pi_{n+1}, n+1) \times \Gamma(\pi_{n+1}, n+1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^n & \xrightarrow{f^n} & \Gamma(\pi_{n+1}, n+1) \end{array}$$

est "presque commutatif" (cf. Exp. 14, paragraphe 5). D'après les théorèmes 3 et 4 de l'Exposé 14, il suffit pour cela que f^n soit dans l'image de la suspension. En fait, dans le cas qui nous occupe, f^n est bien dans l'image de la suspension, parce que $\delta \xi^n = \lambda_{fn}$ et qu'on a en même temps

$$\xi^n \in Z^{n+1}(X_{n+1}^n; \pi_{n+1}).$$

Proposition 3 : Si Γ est un complexe minimal de groupes, et si l'application $\xi^n : \bar{W}_{n+3}(X^n) \longrightarrow \pi_{n+1}$ est définie par

$$\xi^n(x_{n+2}, \dots, x_0) = f^n(x_{n+2}) (\xi^n(d_0x_{n+2}, x_{n+1}))^{-1},$$

alors :

$$1) \quad \xi^n \in Z^{n+3}(\bar{W}_N(X^n); \pi_{n+1});$$

2) la suspension de ζ^n est f^n .

La démonstration est laissée au lecteur.

Remarque finale : on ne sait pas grand chose au sujet de l'existence de complexes de groupes minimaux. Si ce ne sont pas des produits de complexes $\Gamma(\Pi, n)$, ils ne peuvent pas être abéliens (en vertu du théorème 6 de l'Exposé 19) ; mais pour le moment la question de caractériser les systèmes minimaux de Postnikov qui correspondent aux complexes de groupes minimaux semble à peine avoir été abordée.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] POSTNIKOV, M.M. ; Doklady 67-3, 66-4, 71-6 .
- [2] HELLER, Alex : Homotopy resolutions of semi-simplicial complexes (Trans. Amer. Math. Soc., à paraître).
- [3] ELLENBERG-MAC LANE : Relation between homology and homotopy groups of spaces II (Ann. of Math., 51, 1950, p.514-533).
- [4] ELLENBERG, Samuel : Singular homology theory (Ann. of Math., 45, 1944, p. 407-447).
-