H. Cartan

Constructions multiplicatives itérées cohomologie

Séminaire Henri Cartan, tome 7, n° 1 (1954-1955), exp. n° 5, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1954-1955__7_1_A5_0>

CONSTRUCTIONS MULTIPLICATIVES ITÉRÉES COHOMOLOGIE

(Exposé de H. CARTAN, 8.12.1954)

1.- Constructions itérées.

Définition : Une construction itérée $\mathfrak{A}$, d'algèbre initiale A, est une suite de constructions multiplicatives (Cf Exposé 4, n° 4) :

$$(A^{(n)}, A^{(n+1)}, M^{(n+1)}), \quad n = 0,1,2,\ldots$$

avec $A^{(o)} = A$. L'algèbre $A^{(n+1)}$ s'appelle la n-ième algèbre finale, et aussi la $(n+1)$-ième algèbre initiale de la construction.

Homomorphisme: Soit une autre construction itérée $\mathcal{C}$, formée d'une suite $(C^{(n)}, C^{(n+1)}, P^{(n+1)})$. Un homomorphisme $g : \mathcal{C} \to \mathfrak{A}$ consiste dans la donnée de DGA-homomorphismes d'algèbres

$$g^{(n+1)} : P^{(n+1)} \longrightarrow M^{(n+1)}, \quad n = 0,1,\ldots,$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

1) pour chaque n, $g^{(n+1)}$ applique la sous-algèbre $C^{(n)}$ de $P^{(n+1)}$, dans la sous-algèbre $A^{(n)}$ de $M^{(n+1)}$. On notera $f^{(n)}$ le DGA-homomorphisme $C^{(n)} \to A^{(n)}$ ainsi obtenu ;

2) l'homomorphisme $\bar{g}^{(n+1)} : C^{(n+1)} \longrightarrow A^{(n+1)}$ déduit de $g^{(n+1)}$ par passage aux algèbres quotients, est identique à $f^{(n+1)}$.

Lorsqu'il en est ainsi, on dit que l'homomorphisme g de la construction itérée $\mathcal{C}$ dans la construction itérée $\mathfrak{A}$, est compatible avec le DGA-homomorphisme $f^{(o)} : C \to A$.

Construction spéciale itérée : une construction spéciale itérée consiste dans la donnée d'une construction itérée $\mathfrak{A}$ et, pour chaque $n \geqslant 0$, d'une structure de construction spéciale pour $(A^{(n)}, A^{(n+1)}, M^{(n+1)})$. On doit donc se donner, pour chaque n, un opérateur d'homotopie $s^{(n+1)}$ dans $M^{(n+1)}$, satisfaisant aux conditions (6) et (7) de l'Exposé 4 ; ou encore se donner une sous-algèbre

$\tilde{A}^{(n+1)}$ de $M^{(n+1)}$, contenant $A^{(n+1)}$, et satisfaisant à la condition (S) de l'Exposé 4 (n° 5) .

Exemple : la bar construction itérée (Exp. 4, n° 3) est une construction spéciale itérée.

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{A}$ deux constructions itérées, dont la seconde est spéciale. Un homomorphisme $g : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ sera dit spécial si, pour chaque $n \geq 0$, $g^{(n+1)}$ est un homomorphisme spécial de $P^{(n+1)}$ dans $M^{(n+1)}$; autrement dit, si $g^{(n+1)}(C^{(n+1)}) \subset \tilde{A}^{(n+1)}$.

Par application itérée du théorème 5 (Exp.4, n° 6), on obtient :

Théorème 5 bis.- Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{A}$ deux constructions itérées, dont la seconde est spéciale et anticommutative (i.e : les $A^{(n)}$ sont des algèbres anticommutatives). Etant donné un DGA-homomorphisme $f : C \to A$ des algèbres initiales, il existe un homomorphisme spécial $g : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$, compatible avec f ; et un tel g est unique.

2.- Un diagramme de compatibilité.

Théorème 6.- Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{A}$ deux constructions itérées, dont les algèbres initiales C et A sont anticommutatives. Supposons que $\mathcal{A}$ soit spéciale et anticommutative. Soit donné un DGA-homomorphisme $f : C \to A$. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} C^{(n)} & \xrightarrow{f^{(n)}} & A^{(n)} \\ \downarrow g^{(n)} & & \uparrow h^{(n)} \\ \bar{\mathcal{B}}^{(n)}(C) & \xrightarrow{\varphi(n)} & \bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A) \end{array}$$

où $f^{(n)}$ désigne l'homomorphisme spécial défini par $f : C \to A$;
$\varphi^{(n)}$ désigne l'homomorphisme fonctoriel défini par $f : C \to A$;
$g^{(n)}$ désigne l'homomorphisme spécial défini par l'identité $C \to C$;
$h^{(n)}$ désigne l'homomorphisme spécial défini par l'identité $A \to A$.

Alors ce diagramme est commutatif.

Démonstration : par récurrence sur n . C'est trivial pour $n = 0$. Supposons-le démontré pour $n - 1$ $(n \geq 1)$. Soit $G : P^{(n)} \to \mathcal{B}^{(n)}(C)$ l'unique homomorphisme spécial défini par $g^{(n-1)} : C^{(n-1)} \to \bar{\mathcal{B}}^{(n-1)}(C)$.
Soit de même F (resp. Φ , resp. H) l'unique homomorphisme spécial défini par $f^{(n-1)}$ (resp. $\varphi^{(n-1)}$, resp. $h^{(n-1)}$) . Le composé

$$H \circ \Phi \circ \quad : \quad P^{(n)} \to M^{(n)}$$

est compatible avec $h^{(n-1)} \circ \varphi^{(n-1)} \circ g^{(n-1)}$, qui, d'après l'hypothèse de récurrence, est égal à $f^{(n-1)}$. Or une simple inspection montre que $H \circ \Phi \circ G$ envoie $C^{(n)}$ dans $\tilde{A}^{(n)}$, donc est <u>spécial</u>. C'est donc l'unique homomorphisme spécial compatible avec $f^{(n-1)}$; en passant au quotient, on obtient donc $f^{(n)} : C^{(n)} \to A^{(n)}$, mais on obtient aussi le composé des quotients $h^{(n)} \circ \varphi^{(n)} \circ g^{(n)}$. C.Q.F.D.

<u>Corollaire</u> du théorème 6 : prenons $\mathcal{C} = \mathcal{O}\!\mathcal{L}$, f étant l'application identique $A \to A$. Alors <u>le composé des deux homomorphismes spéciaux</u> $A^{(n)} \to \overline{\mathcal{B}}^{(n)}(A) \to A^{(n)}$ <u>est l'identité</u>. Ainsi : <u>toute construction spéciale anticommutative</u> $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$, <u>d'algèbre initiale</u> A, <u>est</u> (canoniquement) <u>facteur direct de la bar construction itérée d'algèbre initiale</u> A.

3.- <u>Applications</u>.

<u>Première application</u> : soit A une DGA-algèbre <u>anticommutative</u>, et soit $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ une construction itérée, d'algèbre initiale A. Il existe un unique homomorphisme spécial (compatible avec l'identité $A \to A$) de $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ dans la bar construction itérée d'algèbre initiale A ; d'où des homomorphismes, dits <u>canoniques</u> :

$$f^{(n)} : A^{(n)} \longrightarrow \overline{\mathcal{B}}^{(n)}(A), \quad f_*^{(n)} : H_*(A^{(n)}) \longrightarrow H_*(\overline{\mathcal{B}}^{(n)}(A)).$$

Si de plus la construction $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ est acyclique (i.e. les $M^{(n+1)}$ sont acycliques), et si chaque $A^{(n)}$ possède une Λ-base homogène contenant l'élément unité, alors $f_*^{(n)}$ est un <u>isomorphisme</u> pour tout n. (La dernière assertion résulte d'une application répétée du théorème 2 de l'Exp. 2).

Ainsi, pour "calculer" les algèbres d'homologie $H_*(\overline{\mathcal{B}}^{(n)}(A))$, on pourra utiliser n'importe quelle construction acyclique itérée $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$, d'algèbre initiale A, pourvu que les $A^{(n)}$ aient chacune une Λ-base homogène contenant 1 (ce qui exige que A satisfasse déjà à cette condition).

<u>Deuxièpe application</u> : Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ des constructions itérées, dont les algèbres initiales C et A soient <u>anticommutatives</u>. Supposons que $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ soit une construction <u>spéciale</u>, et que, pour tout n, $A^{(n)}$ soit anticommutative et possède une Λ-base homogène contenant l'élément unité. Soit donné un DGA-homomorphisme $f : C \to A$ desalgèbres initiales. Alors le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
H_*(C^{(n)}) & \xrightarrow{\quad f_*^{(n)} \quad} & H_*(A^{(n)}) \\
\Big\downarrow u^{(n)} & & \Big\downarrow w^{(n)} \\
H_*(\overline{\mathcal{B}}^{(n)}(C)) & \xrightarrow{\quad v^{(n)} \quad} & H_*(\overline{\mathcal{B}}^{(n)}(A))
\end{array}$$

où $f_*^{(n)}$ est déduit de l'homomorphisme <u>spécial</u> défini par f, $v^{(n)}$ est l'homomorphisme fonctoriel défini par f, et où $u^{(n)}$ et $w^{(n)}$ sont les homomorphismes <u>canoniques</u> (dont le second, $w^{(n)}$, est un <u>isomorphisme</u>).

(Démonstration : puisque $A^{(n)}$ est canoniquement facteur direct de $\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A)$, l'isomorphisme $w^{(n)}$ est l'isomorphisme réciproque de l'isomorphisme $H_*(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A)) \to H_*(A^{(n)})$ défini par l'unique homomorphisme spécial de la bar construction dans la construction $\mathcal{A}$. Il suffit alors d'utiliser la commutativité du diagramme du théorème 6).

<u>Remarque</u> : supposons en outre que la construction $\mathcal{C}$ soit acyclique et que chaque $C^{(n)}$ possède une Λ-base homogène contenant 1. Alors $u^{(n)}$ est aussi un isomorphisme. Si l'on identifie $H_*(C^{(n)})$ et $H_*(A^{(n)})$ à $H_*(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(C))$ et $H_*(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A))$ grâce aux isomorphismes canoniques $u^{(n)}$ et $w^{(n)}$, on voit que l'homomorphisme $f_*^{(n)}$ permet de "calculer" l'homomorphisme fonctoriel $v^{(n)}$. Mais, pour obtenir ce résultat, on a dû supposer que $f_*^{(n)}$ a été obtenu à partir de l'unique homomorphisme <u>spécial</u> de la construction $\mathcal{C}$ dans la construction $\mathcal{A}$.

Cette remarque trouvera notamment à s'appliquer dans le cas suivant : on se donne deux groupes abéliens Π et Π', et un homomorphisme $\theta : \Pi \to \Pi'$. On prend $C = \Lambda(\Pi)$, $A = \Lambda(\Pi')$, f étant l'homomorphisme $C \to A$ défini par θ. La méthode précédente permettra alors de "calculer" les homomorphismes $H_*(\Pi, n ; \Lambda) \to H_*(\Pi', n ; \Lambda)$ définis par θ.

4.- <u>Cohomologie des constructions</u>.

Rappelons d'abord des notions élémentaires. Soit un complexe $X = \sum_q X_q$ (avec $X_q = 0$ pour $q < 0$), muni d'un opérateur différentiel d tel que $dd = 0$, $dX_q \subset X_{q-1}$. On suppose que les X_q sont des Λ-modules, et que d est Λ-linéaire. On notera $\mathrm{Hom}'(X, \Lambda)$ le complexe $X' = \sum_q X'^q$, où l'on pose $X'^q = \mathrm{Hom}_\Lambda(X_q, \Lambda)$, et où $\delta : X'^q \to X'^{q+1}$ est transposé de d. Le <u>module</u> de "cohomologie" du complexe X' :

$$H^*(\mathrm{Hom}'(X, \Lambda)) = \sum_q H^q(\mathrm{Hom}'(X, \Lambda))$$

se notera aussi, par abus de langage, $H^*(X) = \sum_q H^q(X)$. C'est un Λ-module gradué.

Un homomorphisme de complexes $f : X \to Y$ (f étant une application Λ-linéaire telle que $f(X_q) \subset Y_q$, $fd = df$) définit un homomorphisme de complexes $\mathrm{Hom}'(Y, \Lambda) \to \mathrm{Hom}'(X, \Lambda)$, transposé de f ; d'où un homomorphisme des modules de cohomologie

$$f^* : H^*(Y) \to H^*(X),$$

qui conserve les degrés.

Si l'homomorphisme $f_* : H_*(X) \to H_*(Y)$ des modules d'<u>homologie</u> est un isomorphisme, alors f^* est un <u>isomorphisme</u> des modules de <u>cohomologie</u>, tout au moins si on suppose que X et Y ont des Λ-bases homogènes.

<u>Démonstration</u> : le "mapping cylinder" M de $f : X \to Y$ (Exp.3, page 2) est acyclique et Λ-libre. Il possède donc un opérateur d'homotopie, qui par transposition définit un opérateur d'homotopie dans $\mathrm{Hom}'(M , \Lambda)$; ce dernier complexe est donc acyclique, et comme il s'identifie au mapping cylinder de l'application $\mathrm{Hom}'(Y , \Lambda) \to \mathrm{Hom}'(X , \Lambda)$ (transposée de f) , il s'ensuit bien que f^* est un isomorphisme.

Revenons au cas d'une construction itérée $\mathcal{O}\mathcal{l}$ (cf n° 1). On a des modules de cohomologie $H^*(A^{(n)}) = H^*(\mathrm{Hom}'(A^{(n)} , \Lambda))$. Si l'algèbre initiale A est anti commutative, les homomorphismes canoniques $f^{(n)} : A^{(n)} \to \bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A)$ induisent des homomorphismes

$$H^*(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A)) \to H^*(A^{(n)}) ,$$

qu'on qualifie encore de canoniques. Lorsque la construction $\mathcal{O}\mathcal{l}$ est acyclique et que les $A^{(n)}$ ont une Λ-base homogène contenant 1 , les homomorphismes précédents sont des <u>isomorphismes</u>.

Dans les mêmes hypothèses que la "deuxième application" du n° 3 , le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^*(C^{(n)}) & \longleftarrow & H^*(A^{(n)}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^*(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(C)) & \longleftarrow & H^*(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A)) \end{array}$$

où les homomorphismes verticaux sont les homomorphismes "canoniques" , et les homomorphismes horizontaux sont déduits des homomorphismes spéciaux. Cette commutativité résulte de la commutativité exprimée au théorème 6 ; il suffit de renverser le sens d'une flèche (en remplaçant un isomorphisme par l'isomorphisme réciproque).

5.- <u>Structure multiplicative de la cohomologie</u>.

Supposons donné un DGA-homomorphisme d'algèbres

$$\Delta : A \to A \otimes_\Lambda A ,$$

A étant une DGA-algèbre <u>anticommutative</u>. (Par exemple, si $A = \Lambda(\Pi)$ est l'algèbre d'un groupe abélien, considérons l'application "diagonale" $x \to (x , x)$ de Π dans $\Pi \times \Pi$, d'où un DGA-homomorphisme $\Lambda(\Pi) \longrightarrow \Lambda(\Pi \times \Pi)$, qui est bien compatible avec les augmentations. D'ailleurs $\Lambda(\pi \times \pi)$ s'identifie canoniquement à $\Lambda(\pi) \otimes_\Lambda \Lambda(\pi)$).

La donnée de Δ définit des homomorphismes

$$\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A) \longrightarrow \bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A \otimes A) \longrightarrow \bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A) \otimes \bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A) ,$$

dont le premier est l'homomorphisme fonctoriel défini par Δ , et le second est l'homomorphisme spécial de deux constructions ayant même algèbre initiale $A \otimes A$. Le composé de ces homomorphismes

$$\Delta^{(n)} : \bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A) \longrightarrow \bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A) \otimes \bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A)$$

est l'homomorphisme spécial défini par l'homomorphisme $\Delta : A \longrightarrow A \otimes A$ des algèbres initiales.

Par dualité, on obtient un homomorphisme de Λ-complexes

$$\mathrm{Hom}'(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A), \Lambda) \otimes_\Lambda \mathrm{Hom}'(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A), \Lambda) \longrightarrow \mathrm{Hom}'(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A), \Lambda) .$$

Passons à la cohomologie, et observons que $H^*(X') \otimes H^*(X')$ s'envoie canoniquement dans $H^*(X' \otimes X')$: en appliquant cette remarque au complexe $X' = \mathrm{Hom}'(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A), \Lambda)$, on obtient une application

(1) $\quad H^*(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A)) \otimes_\Lambda H^*(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A)) \longrightarrow H^*(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A))$.

Cette application envoie $H^k(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A)) \otimes H^h(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A))$ dans $H^{k+h}(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A))$. Ainsi (1) définit une <u>multiplication</u> dans $H^*(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A))$, dans laquelle les degrés s'ajoutent.

Les propriétés de cette multiplication dépendent, bien entendu, de celles de l'application Δ . Signalons-en quelques-unes, sans démonstration :

(i) considérons l'application $\varepsilon \otimes 1$ de $A \otimes A$, qui transforme $a \otimes a'$ dans $(\varepsilon a)a'$ (rappelons que ε désigne l'augmentation $A \longrightarrow \Lambda$) . Supposons que le composé de Δ et de $\varepsilon \otimes 1$ soit l'application identique de A (il en est bien ainsi dans le cas de l'application diagonale d'un groupe) . Alors la même propriété est vraie pour toutes les applications $\Delta^{(n)} : \bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A) \longrightarrow \bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A) \otimes \bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A)$. Dans ces conditions, l'élément de degré 0 de $\mathrm{Hom}'(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A), \Lambda)$, défini par l'augmentation $\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A) \longrightarrow \Lambda$, est <u>élément unité à gauche</u> pour la multiplication ; comme c'est un cocycle, il définit un élément de degré 0 de $H^*(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A))$, qui est unité à gauche pour la multiplication (1) . Si maintenant le composé de Δ et de $1 \otimes \varepsilon$ est l'application identique de A , le même élément que ci-dessus est unité à droite pour la multiplication.

(ii) Supposons que l'application Δ soit "associative", c'est-à-dire que l'application de A dans $A \otimes A \otimes A$, composée de $\Delta : A \longrightarrow A \otimes A$ et de $\Delta \otimes 1 : A \otimes A \longrightarrow (A \otimes A) \otimes A$, soit identique à la composée de $\Delta : A \longrightarrow A \otimes A$ et de $1 \otimes \Delta : A \otimes A \longrightarrow A \otimes (A \otimes A)$. Alors on montre que chaque application $\Delta^{(n)}$ est associative. Il en résulte que la multiplication de $\mathrm{Hom}'(\overline{\mathcal{B}}^{(n)}(A), \Lambda)$ est associative, et cette associativité se conserve en passant à la cohomologie.

(iii) Supposons que l'application Δ soit "anticommutative", c'est-à-dire que Δ soit égal au composé de Δ et de l'automorphisme de $A \otimes A$ qui envoie $a \otimes a'$ dans $(-1)^{kh} a' \otimes a$ pour $\deg(a) = k$ et $\deg(a') = h$. Cette propriété cesse d'être vraie pour les $\Delta^{(n)}$, mais quand on passe à la cohomologie on peut montrer que la multiplication (1) est anticommutative. Par exemple, si $A = \Lambda(\Pi)$ et si Δ est l'application diagonale, $H^*(\overline{\mathcal{B}}^{(n)}(A))$ est une algèbre anticommutative.

Remarque : on définira plus tard des DGA-homomorphismes canoniques $\overline{\mathcal{B}}^{(n)}(A) \longrightarrow K(\Pi, n)$, lorsque $A = Z(\Pi)$, en désignant par $K(\Pi, n)$ le complexe d'Eilenberg-MacLane du groupe abélien Π (cf. Exp.2, n° 2). Ces applications définissent des isomorphismes $H_*(\overline{\mathcal{B}}^{(n)}(A)) \approx H_*(\Pi, n)$; il en résulte que si $C = \Lambda(\Pi)$, on a des isomorphismes canoniques $H^*(\Pi, n ; \Lambda) \approx H^*(\overline{\mathcal{B}}^{(n)}(C))$. On verra que ces isomorphismes sont compatibles avec les structures multiplicatives : celle de $H^*(\overline{\mathcal{B}}^{(n)}(C))$ comme définie ci-dessus, et celle de $H^*(\Pi, n ; \Lambda)$ comme on la définit en Topologie.

6.- Calcul de la multiplication en cohomologie.

Soit $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ une construction spéciale itérée, d'algèbre initiale A. On suppose que chaque algèbre $A^{(n)}$ de la construction est anticommutative et possède une Λ-base homogène contenant 1. Alors le produit tensoriel $\mathcal{O}\!\mathcal{l} \otimes \mathcal{O}\!\mathcal{l}$ de ces deux constructions est une construction spéciale itérée, anticommutative, dont la n-ième algèbre initiale est $A^{(n)} \otimes A^{(n)}$; son algèbre initiale est $A \otimes A$. Un DGA-homomorphisme $\Delta : A \longrightarrow A \otimes A$ définit un unique homomorphisme spécial

$$\delta^{(n)} : A^{(n)} \longrightarrow A^{(n)} \otimes A^{(n)} .$$

Proposition 4.- Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
A^{(n)} \arrow[r, "\delta^{(n)}"] \arrow[d, "g^{(n)}"] & A^{(n)} \otimes A^{(n)} \\
\overline{\mathcal{B}}^{(n)}(A) \arrow[r, "\Delta^{(n)}"] & \overline{\mathcal{B}}^{(n)}(A) \otimes \overline{\mathcal{B}}^{(n)}(A) \arrow[u, "h^{(n)} \otimes h^{(n)}"']
\end{tikzcd} .$$

où $g^{(n)}$ désigne l'homomorphisme "canonique", et $h^{(n)}$ désigne l'homomorphisme spécial $\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A) \to A^{(n)}$.

Démonstration : considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A^{(n)} \arrow[r, "\delta^{(n)}"] \arrow[d, "g^{(n)}"] & A^{(n)} \otimes A^{(n)} & \\
\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A) \arrow[r, "\text{défini par } \Delta"'] & \bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A \otimes A) \arrow[u, "\text{spécial}"] \arrow[r, "\text{spécial}"'] & \bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A) \otimes \bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A) \arrow[ul, dashed, "h^{(n)} \otimes h^{(n)}"']
\end{tikzcd}$$

Le carré de gauche est commutatif d'après le théorème 6. On montre que le triangle de droite est commutatif, en procèdant par récurrence sur n , comme pour la démonstration du théorème 6. Le composé des deux homomorphismes de la ligne inférieure du diagramme est $\Delta^{(n)}$, ce qui démontre la proposition.

Prenons le diagramme de la prop. 4 ; transposons-le, puis passons à la cohomologie : on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H^*(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A)) \otimes H^*(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A)) \arrow[r] & H^*(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A)) \arrow[d, "v"] \\
H^*(A^{(n)}) \otimes H^*(A^{(n)}) \arrow[u, "u \otimes u"] \arrow[r] & H^*(A^{(n)})
\end{tikzcd}$$

où la première flèche horizontale désigne la multiplication de $H^*(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A))$ définie par $\Delta^{(n)}$, et la deuxième flèche horizontale désigne la multiplication de $H^*(A^{(n)})$ définie par $\delta^{(n)}$. Quant à $u : H^*(A^{(n)}) \to H^*(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A))$, c'est l'isomorphisme réciproque de l'isomorphisme canonique v . Il en résulte :

Théorème 7.- Soit $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ une construction spéciale itérée anticommutative, d'algèbre initiale A , de n-ième algèbre initiale $A^{(n)}$ (ayant une Λ-base homogène contenant 1). Soit $\Delta : A \to A \otimes A$ un DGA-homomorphisme, et soient $\delta^{(n)} : A^{(n)} \to A^{(n)} \otimes A^{(n)}$, et $\Delta^{(n)} : \bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A) \to \bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A) \otimes \bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A)$ les homomorphismes qu'il détermine. Alors l'isomorphisme canonique des modules de cohomologie $H^*(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A)) \simeq H^*(A^{(n)})$ est compatible avec les structures multiplicatives définies, sur $H^*(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A))$ et $H^*(A^{(n)})$ respectivement, par $\Delta^{(n)}$ et par $\delta^{(n)}$.

D'un point de vue pratique, on peut donc "calculer" la structure multiplicative de $H^*(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A))$ en utilisant une construction spéciale anticommutative, la multiplication de $H^*(A^{(n)})$ étant calculée à l'aide de $\delta^{(n)}$.

Remarque : si Λ est un corps, on peut interpréter comme suit la multiplication de $H^*(A^{(n)}) = H^*(\mathrm{Hom}'(A^{(n)}, \Lambda))$ définie par $\delta^{(n)}$: en passant à l'homologie, $\delta^{(n)}$ définit $H_*(A^{(n)}) \to H_*(A^{(n)} \otimes A^{(n)})$, et ce dernier module est isomorphe (canoniquement) à $H_*(A^{(n)}) \otimes H_*(A^{(n)})$. En séparant les degrés, on obtient, pour tout couple d'entiers k et h, un homomorphisme $H_{k+h}(A^{(n)}) \longrightarrow H_k(A^{(n)}) \otimes H_h(A^{(n)})$. Par transposition, et compte tenu du fait que le dual de $H_k(A^{(n)})$ est canoniquement isomorphe à la cohomologie $H^k(\mathrm{Hom}'(A^{(n)}, \Lambda))$ notée $H^k(A^{(n)})$, on obtient une application

$$H^k(A^{(n)}) \otimes H^h(A^{(n)}) \longrightarrow H^{k+h}(A^{(n)}) ,$$

qui n'est autre que la multiplication cherchée.