H. CARTAN

Points singuliers d'un ensemble analytique notion de dénominateur universel

Séminaire Henri Cartan, tome 6 (1953-1954), exp. n° 9, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1953-1954__6__A9_0>

POINTS SINGULIERS D'UN ENSEMBLE ANALYTIQUE
NOTION DE DÉNOMINATEUR UNIVERSEL

(Exposé de H. Cartan, 8-2-1954,
révisé ultérieurement)

§1. Points singuliers d'un ensemble analytique.

Soit V un germe de sous-ensemble analytique à l'origine 0 de $\mathbf{C}^n$. On dit que 0 est un point <u>régulier</u> (ou <u>simple</u>) de V s'il existe un entier k tel que l'algèbre analytique $A(V)$ soit isomorphe à l'algèbre H_k. Il revient au même de dire que le germe V est isomorphe au germe d'espace $\mathbf{C}^k$ à l'origine de $\mathbf{C}^k$. Pour qu'il en soit ainsi, <u>il faut et il suffit que V soit le germe (à l'origine) d'une sous-variété analytique de dimension k dans $\mathbf{C}^n$</u>. C'est évidemment suffisant; et c'est nécessaire, car si on a deux germes d'isomorphismes $\mathbf{C}^k \to V$ et $V \to \mathbf{C}^k$, réciproques l'un de l'autre, ils sont induits par deux germes d'applications holomorphes

$$f: \quad \mathbf{C}^k \to \mathbf{C}^n, \qquad g: \quad \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^k$$

telles que $g \circ f$ soit l'application identique de $\mathbf{C}^k$; il en résulte que f est de rang k à l'origine, et le théorème des fonctions implicites montre alors que l'image de f, qui est justement V, est un germe de sous-variété de $\mathbf{C}^n$.

Soit maintenant V un germe <u>quelconque</u> d'ensemble analytique à l'origine de $\mathbf{C}^n$. On a vu (Exposé 8, Prop. 5) que l'ensemble des points réguliers de V est un <u>ouvert partout dense</u>; si V est irréductible, l'ouvert des points réguliers est <u>connexe</u> (au sens des germes), cf. Exp. 8, §2. On se propose maintenant de démontrer le résultat plus précis:

<u>Théorème 1</u>. <u>L'ensemble $S(V)$ des points singuliers</u> (i.e. non réguliers) <u>d'un germe d'ensemble analytique V est un germe d'ensemble analytique</u>.

Ceci entraîne aussitôt:

Corollaire. Etant donné un sous-ensemble analytique V d'une variété analytique complexe X, l'ensemble S des points singuliers de V est un sous-ensemble analytique.

Observons d'abord que si le Théorème 1 est prouvé dans le cas d'un germe irréductible V, on en déduit qu'il est vrai dans le cas d'un germe quelconque, en raisonnant comme suit. Si V est un germe quelconque d'ensemble analytique, V est réunion d'une famille finie de germes irréductibles V^i tels que $V^i \not\subset V^j$ pour $i \neq j$ (cf. Exposé 4, §3). Pour qu'un point $x \in V$ soit régulier, il faut et il suffit que x appartienne à un seul V^i et qu'il soit régulier pour V^i; donc l'ensemble $S(V)$ des points singuliers de V est la réunion des $S(V^i)$ et des intersections $V^i \cap V^j$ pour $i \neq j$. Si on sait que les $S(V^i)$ sont des germes d'ensemble analytique, on conclut que $S(V)$ est un germe d'ensemble analytique.

Mais, dans le raisonnement précédent, on a admis que les points de $V^i \cap V^j$ (avec $i \neq j$) ne sont pas réguliers pour V. Or ceci n'est évident qu'à condition de savoir qu'en un point x commun à V^i et V^j les germes V^i_x et V^j_x sont tels qu'aucun n'est contenu dans l'autre, tout au moins dès que x est assez voisin de l'origine 0. Or cette dernière assertion a besoin d'être prouvée. Elle résulte aussitôt du lemme suivant:

Lemme 1. Soient V^1 et V^2 deux germes d'ensemble analytique à l'origine 0, tels que: 1° V^1 soit irréductible; 2° V^1 ne soit pas contenu dans V^2. Alors, pour tout x assez voisin de 0 et appartenant à V^1, le germe V^1_x n'est pas contenu dans le germe V^2_x .

Prouvons ce lemme. Il existe un systeme fini de fonctions f_α holomorphes au voisinage de 0, dont l'annulation définit V^2; donc, en tout point x voisin de 0, l'annulation des f_α définit le germe V^2_x. Puisque le germe V^1 est irréductible, il existe un voisinage ouvert U de 0 tel que l'ensemble des points réguliers de V^1 contenu dans U soit connexe. Soit alors x un point de $U \cap V^1$; si le germe V^1_x était contenu dans le germe V^2_x, toutes les f_α s'annuleraient sur le germe V^1_x, et il en serait donc de même en tout point $y \in V^1$ suffisamment voisin de x. Or il y a de tels y qui sont réguliers et appartiennent à U. Puisque l'ensemble des points réguliers de V^1 contenus dans U est connexe, il s'ensuit (par prolongement analytique) que les f_α s'annulent en tout point régulier de V^1 contenu dans U, donc, à la limite, les f_α s'annulent sur le germe V^1 à l'origine; ceci signifie que le germe V^1 est contenu dans le germe V^2, contrairement à l'hypothèse. C.Q.F.D.

§2. Démonstration du Théorème 1 dans le cas d'un germe irréductible.

Nous aurons besoin d'un lemme:

Lemme 2. *Soit Ψ une famille (non supposée finie) de fonctions holomorphes dans un voisinage ouvert U de l'origine 0 de C^n; alors il existe un voisinage ouvert U' de 0 $(U' \subset U)$ et un système fini de $f_i \in \Psi$ jouissant de la propriété suivante: toute $f \in \Psi$ s'écrit, dans U', sous la forme d'une combinaison linéaire des f_i à coefficients holomorphes dans U'.*

(Pour la démonstration voir Séminaire 1951-52, Exposé 11, Th. 2, et Exposé 18, §5, Coroll. 3.)

Ce lemme entraîne aussitôt le suivant:

Lemme 3. *Etant donnée une famille de fonctions holomorphes dans une variété analytique complexe X, l'ensemble de leurs zéros communs est un sous-ensemble analytique de X.*

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le Théorème 1 dans le cas où le germe V est irréductible (à l'origine 0 de C^n). Reprenons la description du germe V donne dans l'Exposé 8 (§§1 et 2). En désignant par k la dimension de V, on a un choix des cordonnées $x_1, \dots, x_n$ de l'espace ambiant C^n tel que $x_1, \dots, x_k$ ne s'annulent simultanément sur V qu'à l'origine. En outre cette description conduit à introduire un polynôme distingué irréductible $P(z)$ (à coefficients holomorphes en

$x_1, \ldots, x_k$), et on peut supposer que z est la coordonnée x_{k+1}; alors les points réguliers de V pour lesquels $x_1, \ldots, x_k$ forment un système de coordonnées locales sur V <u>sont exactement ceux où la dérivée</u> $P'(z)$ <u>est</u> $\neq 0$. Bien entendu, on n'obtient pas ainsi <u>tous</u> les points réguliers de V. Toutefois, en tout point régulier de V (voisin de 0), on peut choisir des constantes c_{ij} (arbitrairement petites) telles que les fonctions

$$x_i + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \qquad (1 \leq i \leq k)$$

forment un système de coordonnées locales en ce point.

Cette remarque conduit à introduire nk nouvelles variables y_{ij} $(1 \leq i \leq k,\ 1 \leq j \leq n)$, et à poser

(1)
$$X_i = x_i + \sum_{j=1}^{n} y_{ij} x_j \qquad (1 \leq i \leq k).$$

De (1) on tire inversement

(2)
$$x_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} X_j + \sum_{m=k}^{n} \mu_{im} x_m \quad ,$$

où les λ_{ij} et les μ_{im} sont des fonctions holomorphes des variables y_{ij} au voisinage de 0. Les formules (1) définissent un germe d'isomorphisme f de $\mathbf{C}^{(k+1)n}$ (coordonnées $x_1, \ldots, x_n, y_{ij}$) sur $\mathbf{C}^{(k+1)n}$ (coordonnées $X_1, \ldots, X_k, x_{k+1}, \ldots, x_n, y_{ij}$). Et les formules (2) définissent l'isomorphisme réciproque g. Alors f induit un isomorphisme du germe-produit $V \times \mathbf{C}^{kn}$ sur un germe d'ensemble analytique W de $\mathbf{C}^{(k+1)n}$; W, comme $V \times \mathbf{C}^{kn}$, est de dimension $k(n+1)$. Et g, suivi de la projection $\mathbf{C}^{(k+1)n} \to \mathbf{C}^n$ qui, au point $(x_1, \ldots, x_n, y_{ij})$, associe le point $(x_1, \ldots, x_n)$, définit une projection p du germe W sur le germe V. Puisque V est irréductible, on peut montrer sans peine que $V \times \mathbf{C}^{kn}$ est un germe irréductible dans $\mathbf{C}^{(k+1)n}$, donc W est un germe irréductible.

D'après ce qu'on a vu plus haut, tout point régulier de V (voisin de l'origine) est la projection, par p, d'un point régulier de W (voisin de l'origine) tel que $X_1, \ldots, X_k$ et les y_{ij} forment un système de coordonnées locales sur W. Autrement dit, l'ensemble $S(V)$ des points singuliers de V se compose des points $x \in V$ tels que, pour tout point de la fibre $p^{-1}(x)$, les fonctions $X_1, \ldots, X_k$ et y_{ij} ne soient pas un système de coordonnées locales pour ce point.

Sur le germe W, les fonctions $X_1, \ldots, X_k$ et les y_{ij} sont en nombre égal à la dimension de W et elles ne s'annulent simultanément qu'à l'origine. Il s'ensuit qu'on peut appliquer à W les résultats rappelés, au début de ce paragraphe, pour V. Il s'introduit donc un polynôme distingué irréductible $Q(z)$, à coefficients holomorphes en $X_1, \ldots, X_k$ et les y_{ij}; on peut supposer que z est la coordonnée x_{k+1}; et les points réguliers de W pour lesquels $X_1, \ldots, X_k$ et les y_{ij} forment un système de coordonnées locales sont ceux où le polynôme dérivé

$$Q'(x_{k+1}; X_1, \ldots, X_k, y_{ij})$$

est $\neq 0$. Finalement, il résulte de tout ce qui précède que les points singuliers de V sont ceux tels que l'on ait

$$Q'(x_{k+1}; x_i + \sum_j y_{ij}x_j, y_{ij}) = 0 \tag{3}$$

quels que soient les nombres y_{ij} voisins de zéro. Ce sont donc, parmi les points de C^n (coordonnées $x_1, \ldots, x_n$) ceux qui satisfont à un système infini d'équations holomorphes en $x_1, \ldots, x_n$, les premiers membres de ce système étant holomorphes dans un voisinage fixe de l'origine. D'après le Lemme 3, les solutions d'un tel système définissent un germe d'ensemble analytique à l'origine. Et ceci achève la démonstration du Théorème 1.

Remarque: si V est irréductible de dimension k, toutes les composantes irréductibles de $S(V)$ sont de dimension $\leq k-1$, puisque $S(V) \neq V$.

§3. La notion de dénominateur universel

Soit V un germe d'ensemble analytique à l'origine 0 de C^n, et soient V^i ses composantes irréductibles. Notons $A(V)$, resp. $A(V^i)$, l'algèbre des germes de fonctions induites sur V (resp. sur V^i) par les germes de fonctions holomorphes de l'espace ambiant. Soit $\tilde{A}(V)$, resp. $\tilde{A}(V^i)$, la clôture intégrale de $A(V)$, resp. de $A(V^i)$. Les Propositions 5 et 6 de l'Exposé 7 entraînent aussitôt le théorème suivant:

Théorème 2. Les projections $A(V) \to A(V^i)$ (définies par les inclusions $V^i \to V$) identifient l'algèbre $\tilde{A}(V)$ au produit des algèbres $\tilde{A}(V^i)$. L'algèbre $\tilde{A}(V)$ est un module de type fini sur $A(V)$, et c'est un anneau noethérien.

Puisque la clôture intégrale $\tilde{A}(V)$ est contenue, par définition, dans l'anneau complet des fractions de $A(V)$, tout élément de $\tilde{A}(V)$ peut s'écrire comme une fraction u/v, ou u et v sont dans $A(V)$, v étant pas diviseur de zéro dans $A(V)$; cette dernière condition exprime que le germe de fonction de l'espace ambiant qui induit v ne s'annule identiquement sur aucune des composantes irréductibles V^i.

Définition: on appelle dénominateur universel pour le germe d'ensemble analytique V, un élément $v \in A(V)$, non diviseur de zéro, tel que, pour tout $f \in \tilde{A}(V)$, le produit vf soit dans $A(V)$. Autrement dit, on demande que tout élèment de $\tilde{A}(V)$ puisse s'écrire sous la forme d'une fraction ayant v pour dénominateur (le numérateur étant, bien entendu, dans $A(V)$).

Proposition 1. Un germe d'ensemble analytique V possède toujours un dénominateur universel.

Cela résulte immédiatement du fait que $\tilde{A}(V)$ est un module de type fini sur $A(V)$. En effet, soit (f_α) un système fini de générateurs de ce module; on a $f_\alpha = u_\alpha/v_\alpha$, avec u_α et v_α dans $A(V)$, v_α non diviseur de zéro. Alors le produit v des v_α n'est pas diviseur de zéro, et il évident que c'est un dénominateur universel.

On étudiera plus loin (Théorèmes 3 et 4) les dénominateurs universels d'un germe d'ensemble analytique irréductible. Dès maintenant, on va voir comment la connaissance, pour chaque composante irréductible V^i de V (V non supposé irréductible), d'un dénominateur universel v^i, permet de construire un dénominateur universel pour V. Pour chaque i, il existe une fonction holomorphe g^i de l'espace ambiant qui induit la constante 0 sur chaque germe V^j $(j \neq i)$ et n'induit pas zéro sur V^i.

Proposition 2. Avec les notations précédentes, la fonction

$$v = \sum_i g^i v^i$$

est un dénominateur universel pour le germe V.

Démonstration: sur V^i, v induit le même germe de fonction que $g^i v^i$, donc V n'induit pas identiquement 0 sur V^i; ainsi v n'est pas diviseur de zéro dans $\mathbf{A}(V)$. Soit alors $f = (f^i)$ un élément de $\widetilde{A}(V) \approx \Pi_i \widetilde{A}(V^i)$, avec $f^i \in \widetilde{A}(V^i)$. On va montrer qu'il existe une φ holomorphe dans l'espace ambiant qui, sur chaque V^i, induit la même fonction que vf. Or vf induit sur V^i la même fonction que $g^i v^i f^i$; et $v^i f^i$ est, par hypothèse, induite par une fonction φ^i holomorphe dans l'espace ambiant. Donc vf induit sur V^i la même fonction que $g^i \varphi^i$, et aussi la même fonction que $\Sigma_j\, g^j \varphi^j$, puisque g^j induit zéro sur V^i pour $j \neq i$. Posons

$$\varphi = \sum_i g^i \varphi^i \quad ;$$

φ satisfait bien aux conditions exigées.

C.Q.F.D.

§4. Etude des dénominateurs universels d'un germe irréductible.

Soit maintenant V un sous-ensemble analytique dans un voisinage ouvert U de l'origine 0 de $\mathbf{C}^n$, et soit V_0 son germe à l'origine, supposé irréductible. Reprenons la description canonique de V_0 rappelée au §2 de cet Exposé: il s'introduit un polynôme distingué irréductible

$P(z; x_1, \ldots, x_k)$. L'Exposé 7 (Corollaire au Lemme 1) montre que le polynôme dérivé $P'(z; x_1, \ldots, x_k)$ est un dénominateur universel pour le germe V_0. Aux points $x \in V$ voisins de 0, le germe V_x n'est plus nécessairement irréductible; toutefois le même corollaire est encore applicable. Ainsi $P'(z)$ est un dénominateur universel en tout point de V suffisamment voisin de l'origine 0, du moment que V est irréductible à l'origine.

Revenons alors au polynôme Q de la fin du §2 ci-dessus. Pour chaque système de valeurs données aux y_{ij} (et voisines de zéro), le polynôme dérivé Q' est un dénominateur universel pour le germe V_x en tout point $x \in V$ suffisamment voisin de l'origine. Compte tenu des résultats de la fin du §2, on peut énoncer:

Théorème 3. Soit V un sous-ensemble analytique d'une variété analytique X, supposé irréductible en l'un de ses points a. Alors il existe un système fini de fonctions v_i, holomorphes au voisinage de a dans X, qui jouissent des propriétés suivantes:

(i) le germe S_a défini, au point a, par l'ensemble S des points singuliers de V, est l'ensemble des points du germe V_a défini par les équations $v_i = 0$;

(ii) chacune des fonctions v_i est un dénominateur universel pour V au point a et en chaque point $x \in V$ suffisamment voisin de a.

On va maintenant prouver le:

Théorème 4. Soit V un sous-ensemble analytique d'une variété analytique X, supposé irréductible en l'un de ses points a, et soit S l'ensemble des points singuliers de V. Si une fonction w holomorphe dans X au voisinage de a s'annule identiquement sur le germe S_a sans s'annuler identiquement sur le germe V_a, il existe un entier $h > 0$ tel que la puissance w^h soit un dénominateur universel pour V au point a et en chaque point $x \in V$ assez voisin de a.

Démonstration: soit I l'idéal (premier) du germe V_a; I et les fonctions v_i du Théorème 3 engendrent un idéal J, et S_a est le germe des zéros de l'idéal J, d'après le Théorème 3. En vertu du "Nullstellensatz" (Exp. 8, Théorème 1 et son corollaire), il existe un exposant h tel que $w^h \in J$. On a donc

$$w^h = \sum_i u_i v_i + \varphi_i ,$$

les u_i étant holomorphes au voisinage de a dans la variété ambiante X, et φ étant dans l'idéal I. En un point $x \in V$ assez voisin de a, les v_i sont des dénominateurs universels (Théorème 3). Donc si $f \in \tilde{A}(V_x)$, chaque produit $v_i f$ est égal à un élément $g_i \in A(V_x)$; donc on a

$$w^h f = \sum_i u_i g_i \quad \text{dans l'anneau} \quad \tilde{A}(V_x),$$

et comme $\Sigma_i\, u_i g_i \in \mathbf{A}(V_x)$, on a bien prouvé que w^h est un dénominateur universel au point x.

<u>Remarque finale</u>: soit, dans une variété analytique complexe X, un sous-ensemble analytique V, et soit $a \in V$. Soient V_a^i les composantes irréductibles du germe V_a. Chaque V_a^i est le germe d'un sous-ensemble analytique V^i dans un voisinage convenable de a; on peut choisir un voisinage U assez petit de a dans lequel tous les V^i sont définis, leur réunion étant $V \cap U$. Avec les notations de la Proposition 2, supposons que la fonction v^i (holomorphe au voisinage de a) soit un dénominateur universel pour V^i en chacun de ses points suffisamment voisins de a (cf. Théorème 3). Alors la démonstration de la Proposition 2 prouve, en fait, que <u>la fonction</u>

$$v = \sum_i g^i v^i$$

<u>est un dénominateur universel pour l'ensemble</u> V <u>en chaque point de</u> V <u>suffisamment voisin de</u> a.

BIBLIOGRAPHIE

Pour la notion de dénominateur universel, et le Théorème 4, voir K. OKA, Journal Math. Soc. Japan, 3(1951), p. 259-278. Voir notamment l'énoncé du haut de la page 265.

Le lecteur pourra aussi consulter le livre de M. HERVÉ, Several Complex Variables, Local Theory, Oxford Univ. Press 1963; voir Chap. IV, §6.