H. CARTAN

Variétés analytiques complexes et espaces analytiques

Séminaire Henri Cartan, tome 6 (1953-1954), exp. n° 6, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1953-1954__6__A6_0>

VARIÉTÉS ANALYTIQUES COMPLEXES ET ESPACES ANALYTIQUES

(Exposé de H. Cartan, 18-1-1954)

Cet exposé a pour but de donner une généralisation convenable de la notion de variété analytique complexe (cf.BEHNKE-STEIN, Math. Annalen, 124 (1951) p. 1-16; et Séminaire 1951-52, Exp. 13, §2), afin de pouvoir démontrer plus tard que le quotient d'une variété analytique complexe par un groupe discontinu d'automorphismes analytiques est un "espace analytique général."

1. Faisceau de germes de fonctions.

Soit X un espace topologique. Pour tout ouvert $U \subset X$, soit $\mathcal{C}_U$ l'anneau des fonctions définies dans U et continues (à valeurs complexes). Soit V ouvert $\subset U$; on a un homomorphisme naturel $\mathcal{C}_U \to \mathcal{C}_V$, qui associe à chaque fonction définie dans U sa restriction à V. Soit $x \in X$; on notera $\mathcal{C}_x$ la <u>limite inductive</u> des anneaux $\mathcal{C}_U$ (lorsque U parcourt l'ensemble des voisinages ouverts de x); $\mathcal{C}_x$ est un anneau; un élément de $\mathcal{C}_x$ s'appelle un <u>germe de fonction continue</u> au point x. Pour tout ouvert U contenant x, on a un homomorphisme $\mathcal{C}_U \to \mathcal{C}_x$; $\mathcal{C}_x$ est la réunion des images de ces homomorphismes; pour que $f \in \mathcal{C}_U$ et $f' \in \mathcal{C}_{U'}$ définissent le même germe au point x, il faut et il suffit que f et f' coïncident dans tout un voisinage de x.

Soit $\mathcal{C} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{C}_x$. Dans $\mathcal{C}$, définissons la topologie que voici: pour tout couple (U, f), où U est un ouvert non vide de X, et $f \in \mathcal{C}_U$, soit $W(U, f)$ l'ensemble des germes définis par f aux points $x \in U$; par définition, $W(U, f)$ est un sous-ensemble <u>ouvert</u> de $\mathcal{C}$, et les $W(U, f)$ forment un système fondamental d'ouverts de la topologie de $\mathcal{C}$, qui se trouve ainsi définie. $\mathcal{C}$ est un <u>faisceau</u> d'anneaux (sur la notion de faisceau en général, voir Sém. 1950-51, exp. 14; et H. Cartan, Colloque de Bruxelles

1953, p. 41-55). Conformément à une définition générale, une section de $\mathcal{C}$ au-dessus de $U \subset X$ est une application continue $s\colon\ U \to \mathcal{C}$, telle que $s(x) \in \mathcal{C}_x$ pour tout $x \in U$; ici, l'ensemble (ou plutôt anneau) des sections au-dessus de U s'identifie à l'ensemble $\mathcal{C}_U$ des fonctions continues dans U (supposé ouvert).

On sait qu'étant donné un faisceau $\mathcal{F}$ de groupes abéliens (resp. d'anneaux) sur un espace topologique X, on a la notion de sous-faisceau: c'est un sous-ensemble $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ tel que $\mathcal{G} \cap \mathcal{F}_x = \mathcal{G}_x$ soit un sous-groupe (resp. sous-anneau) de $\mathcal{F}_x$, et que $\mathcal{G}$ soit ouvert dans $\mathcal{F}$. Cette dernière condition exprime que si, au voisinage d'un point $x \in X$, on a une fonction continue f qui induit un germe $\in \mathcal{G}_x$, alors f induit un germe $\in \mathcal{G}_y$ en tout point y assez voisin de x.

Exemple: soit X un ouvert de l'espace numérique complexe C^n; les germes de fonctions holomorphes (aux différents points $x \in X$) constituent un sous-faisceau $\mathcal{O}$ du faisceau $\mathcal{C}$; les sections du faisceau $\mathcal{O}$ ne sont autres que les fonctions holomorphes dans X.

2. Variétés analytiques complexes.

La définition (bien connue) d'une variété analytique complexe va être mise ici sous une forme commode en vue de généralisations ultérieures.

Considérons un espace topologique X (que nous supposerons toujours séparé). Sur X, considérons la structure définie par la donnée d'un sous-faisceau $\mathcal{O}$ du faisceau $\mathcal{C}$ des germes de fonctions continues. Etant donnés $(X, \mathcal{O})$ et $(X', \mathcal{O}')$, un isomorphisme de ces structures sera défini par un homéomorphisme φ de X sur X', tel que

$$f' \in \mathcal{O}'_{\varphi(x)} \iff f'\circ\varphi \in \mathcal{O}_x .$$

Plus généralement, une application φ de X dans X' s'appellera un homomorphisme si φ est continue, et si $f' \in \mathcal{O}'_{\varphi(x)}$ entraîne $f'\circ\varphi \in \mathcal{O}_x$. Si φ est un homomorphisme $X \to X'$, et ψ un homomorphisme $X' \to X$, si $\psi\circ\varphi$ est l'application identique de X, et $\varphi\circ\psi$ l'application identique de X', alors φ et ψ sont des isomorphismes, réciproques l'un de l'autre: c'est évident.

Le composé de deux homomorphismes est un homomorphisme.

Remarque: si $\mathcal{O}$ est un sous-faisceau de $\mathcal{C}$, sur X, alors, sur tout sous-espace $Y \subset X$, $\mathcal{O}$ induit un faisceau; donc Y est muni d'une structure de même espèce que X, qu'on appelle structure induite par celle de X.

Définition: un espace X, muni d'un sous-faisceau $\mathcal{O}$ de $\mathcal{C}$, est une variété analytique complexe (ou simplement variété analytique) si chaque $x \in X$ possède un voisinage ouvert isomorphe à un ouvert U d'un espace $\mathbf{C}^n$ (n convenable), muni du faisceau des germes de fonctions holomorphes.

Deux ouverts $U \subset \mathbf{C}^n$ et $U' \subset \mathbf{C}^{n'}$ ne peuvent être isomorphes que si $n = n'$ (et encore cela n'est-il pas suffisant). Les isomorphismes $U \to U'$ sont les applications analytiques de U sur U', à jacobien partout $\neq 0$. (Nota: en fait, tout homéomorphisme de U sur U' qui est défini par des fonctions holomorphes a automatiquement un jacobien partout $\neq 0$; ceci est démontré, par ex., dans Sém. 1951-52, exp. 14, §8. Ce résultat est loin d'être trivial.)

A chaque point $x \in X$ d'une variété analytique est ainsi attaché un entier n, qui est le même pour tous les points voisins de x, donc est constant sur chaque composante connexe de X. Lorsque toutes les composantes connexes de X ont le même n, n s'appelle la dimension (complexe) de X.

La définition générale d'un isomorphisme s'applique au cas particulier des variétés analytiques. Un homomorphisme s'appelle alors une application analytique. Les sections du faisceau $\mathcal{O}$ s'appellent les fonctions holomorphes sur X. Les éléments de $\mathcal{O}_x$ s'appellent les germes de fonctions holomorphes au point $x \in X$.

Tout isomorphisme f d'un ouvert $U \subset X$ sur un ouvert de $\mathbf{C}^n$ s'appelle une carte de U; les n coordonnées d'un point de $\mathbf{C}^n$ sont des fonctions holomorphes $x_1, \ldots, x_n$ dans U, qu'on appelle un système de <u>coordonnées</u> <u>locales</u> dans U. Pour définir, sur un espace topologique séparé X, une structure de variété analytique, il suffit de se donner un recouvrement de X par des ouverts U_i, et, pour chaque U_i, un homéomorphisme f_i de U_i sur un ouvert $V_i \subset \mathbf{C}^n$, de manière que $f_j \circ f_i^{-1}$ soit un isomorphisme de $f_i(U_i \cap U_j) \subset V_i$ sur $f_j(U_i \cap U_j) \subset V_j$.

Si x est un point d'une variété analytique complexe X, l'anneau $\mathcal{O}_x$ des germes holomorphes en x est un <u>anneau d'intégrité</u>, <u>noethérien</u> (Sém. 1951-52, Exp. 11, th. 2), <u>factoriel</u> (<u>ibid</u>., th. 1). Rappelons qu'un anneau d'intégrité est <u>factoriel</u> si tout idéal principal $\neq 0$ est, d'une seule manière, produit d'un nombre fini d'idéaux principaux premiers. Comme tout anneau factoriel, l'anneau $\mathcal{O}_x$ est <u>intégralement clos</u> (i.e., si un élément du corps des fractions de $\mathcal{O}_x$ est entier algébrique sur $\mathcal{O}_x$, il appartient à $\mathcal{O}_x$).

3. <u>Sous-ensembles analytiques d'une variété analytique</u>.

Dans l'ensemble des parties d'un espace topologique X, chaque point x définit une relation d'équivalence: deux parties A et A' sont équivalentes s'il existe un ouvert U contenant x, tel que $A \cap U = A' \cap U$. Soit $\mathcal{P}_x$ l'ensemble des classes d'équivalence; un élément de $\mathcal{P}_x$ s'appelle un <u>germe de sous-ensemble</u> au point $x \in X$.

La <u>réunion</u> de deux éléments de $\mathcal{P}_x$, l'<u>intersection</u> de deux éléments de $\mathcal{P}_x$, se définissent d'une manière évidente (on prend des représentants): ce sont des éléments de $\mathcal{P}_x$. Ces opérations jouissent des propriétés usuelles. De même, on définit dans $\mathcal{P}_x$ la relation d'inclusion $\subset$. La classe d'équivalence de la partie vide s'appelle le <u>germe vide</u>.

Soit X une <u>variété analytique</u>, et soit E_x un germe de sous-ensemble au point $x \in X$. On dit que E_x est un <u>germe d'ensemble analytique</u> (ou simplement: un germe analytique) s'il existe une partie $E \subset X$, définissant E_x, et un ouvert U contenant x, de manière que $E \cap U$ soit l'ensemble des solutions d'un système fini d'équations $f_i = 0$, les f_i

étant des fonctions holomorphes dans U. On peut donner à cette définition une forme légèrement différente: étant donné un nombre fini de germes de fonctions $g_i \in \mathcal{C}_x$, on définit d'une manière évidente le germe de sous-ensemble, défini au point x par les équations $g_i = 0$; alors un germe de sous-ensemble E_x est <u>analytique</u> s'il peut être défini par l'annulation d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{O}_x$ (germes de fonctions holomorphes en x). Un tel germe E_x peut être vide.

Un sous-ensemble $E \subset X$ sera dit <u>analytique</u> si, pour tout $x \in X$, le germe E_x défini par E est analytique. Il revient au même de dire que X peut être recouvert par des ouverts U_i, tels que, pour chaque i, $E \cap U_i$ soit l'ensemble des zéros communs à un nombre fini de fonctions holomorphes dans U_i.

Soit E_x un germe d'ensemble analytique au point x; l'ensemble des $f \in \mathcal{O}_x$ qui s'annulent identiquement sur E_x est évidemment un <u>idéal</u> de l'anneau $\mathcal{O}_x$; notation: $I(E_x)$. Inversement, soit I un idéal de $\mathcal{O}_x$; puisque l'anneau $\mathcal{O}_x$ est noethérien, I est engendré par un nombre fini d'éléments f_i; l'annulation des f_i définit un germe d'ensemble analytique E_x, qui est indépendant du choix des générateurs f_i de l'idéal I (ceci est évident); E_x s'appelle le <u>germe d'ensemble défini par l'idéal</u> I. Si on part d'un germe d'ensemble analytique E_x, le germe d'ensemble défini par l'idéal $I(E_x)$ est précisément E_x. Il en résulte que l'application $E_x \to I(E_x)$ applique <u>biunivoquement</u> l'ensemble des germes d'ensembles analytiques dans l'ensemble des idéaux de $\mathcal{O}_x$. Cette application est "décroissante": si $E_x \subset E'_x$, on a $I(E_x) \supset I(E'_x)$. On en déduit la propriété fondamentale suivante:

(ST) toute suite décroissante $E_x^1 \supset E_x^2 \supset \cdots \supset E_x^k \supset \cdots$ de germes analytiques au point x, est <u>stationnaire</u> (i.e., $E_x^{k+1} = E_x^k$ pour k assez grand).

(Cela résulte du fait que l'anneau $\mathcal{O}_x$ est noethérien.)

L'intersection de deux germes analytiques est un germe analytique; la réunion aussi: si E_x^1 est défini par l'annulation d'éléments $f_i \in \mathcal{O}_x$, et E_x^2 par l'annulation d'éléments $g_j \in \mathcal{O}_x$, alors $E_x^1 \cup E_x^2$ est défini par l'annulation des produits $f_i g_j$. Il est évident que

$$I(E_x^1 \cup E_x^2) = I(E_x^1) \cap I(E_x^2) .$$

Un germe d'ensemble analytique E_x est <u>réductible</u> (ou décomposable) s'il existe deux germes analytiques $E_x^1 \neq E_x$ et $E_x^2 \neq E_x$ tels que $E_x = E_x^1 \cup E_x^2$. On voit facilement, grâce à (ST), que <u>tout germe analytique</u> E_x <u>est réunion d'une famille finie de germes analytiques irréductibles</u> E_x^i; on peut de plus faire en sorte que l'on n'ait jamais $E_x^i \subset E_x^j$ pour $i \neq j$; avec cette condition, la décomposition de E_x comme réunion finie de germes irréductibles est <u>unique</u>, en vertu du lemme suivant: si un germe analytique <u>irréductible</u> est contenu dans une réunion finie de germes analytiques, il est contenu dans l'un d'eux.

Lorsque E_x est réunion de germes irréductibles E_x^i tels que l'on n'ait jamais $E_x^i \subset E_x^j$ pour $i \neq j$, les E_x^i s'appellent les <u>composantes irréductibles</u> du germe E_x.

Pour qu'un germe analytique E_x soit irréductible, il faut et il suffit que l'idéal $I(E_x)$ soit <u>premier</u>: c'est presque trivial. Il est vrai, mais c'est loin d'être évident, que tout idéal premier $I \subset \mathcal{O}_x$ est l'idéal $I(E_x)$ du germe E_x défini par l'idéal I (voir une démonstration dans le Sém. 1951-52, Exp. 14, th. 1; voir aussi l'Exposé 8 ci-après). De là résulte: pour qu'un idéal $I \subset \mathcal{O}_x$ ait la forme $I(E_x)$, il faut et il suffit que I soit intersection finie d'idéaux premiers.

4. <u>Structure d'un germe analytique irréductible</u>.

Soit E_x un germe d'ensemble analytique; on lui associe l'anneau-quotient $\mathcal{O}_x/I(E_x)$. Pour que E_x soit irréductible, il faut et il suffit que l'anneau associé soit un anneau d'intégrité.

<u>Définition</u>: un germe analytique E_x est dit <u>régulier</u> si l'on peut trouver, au voisinage du point $x \in X$, un système de coordonnées locales

$x_1, \ldots, x_n$ nulles au point x, telles que E_x soit défini par l'annulation de certains des x_i (cet ensemble de x_i pouvant être vide, ou contenir tous les x_i). Si E_x est défini par $x_{p+1} = 0, \ldots, x_n = 0$, l'anneau $\mathcal{O}_x/I(E_x)$ est isomorphe à l'anneau des germes de fonctions de p variables $x_1, \ldots, x_p$, holomorphes à l'origine. (On verra dans l'exposé 9, §1 une réciproque.) En particulier, tout germe régulier est irréductible.

Soit E un sous-ensemble analytique de la variété analytique X. Pour chaque $x \in E$, l'anneau $\mathcal{O}_x/I(E_x)$ s'identifie à un sous-anneau $\mathcal{O}'_x$ de l'anneau $\mathcal{C}'_x$ des germes de fonctions continues de l'espace topologique E. La réunion $\bigcup_{x \in E} \mathcal{O}'_x$ est un <u>sous-faisceau</u> du faisceau $\mathcal{C}'$, et définit donc sur E une structure, au sens du §2. Un point $x \in E$ est dit <u>régulier</u> si le germe E_x défini par E au point x est régulier. Si tous les points de E sont réguliers, alors E, muni de la structure définie ci-dessus, est évidemment une <u>variété analytique</u>; on dit alors que E est une <u>sous-variété</u> de la variété analytique X.

Choisissons une fois pour toutes un système de coordonnées locales $x_1, \ldots, x_n$ au voisinage d'un point a de la variété analytique X, nulles au point a. Si E_a est un germe analytique <u>régulier</u>, on peut numéroter les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ de manière que E_a soit défini par des équations

$$x_i = f_i(x_1, \ldots, x_p) \qquad (i = p+1, \ldots, n), \tag{1}$$

les f_i étant des germes de fonctions holomorphes de p variables, nuls à l'origine. Plus généralement, soit E_a un germe analytique <u>irréductible</u>; on démontre (cf. Sém. 1951-52, Exp. 14, th. 3; voir aussi ci-dessous, Exp. 8, §1) qu'on peut faire sur $x_1, \ldots, x_n$ une transformation linéaire homogène à coefficients constants (de déterminant $\neq 0$) de manière à réaliser les conditions suivantes:

(a) $x_1, \ldots, x_p$ ne sont liés par aucune relation sur E_a (i.e., si un germe holomorphe $f(x_1, \ldots, x_p)$ appartient à l'idéal $I(E_a)$, f est identiquement nul);

(b) l'idéal $I(E_a)$ contient un polynôme

(2) $$P(x_{p+1};\, x_1,\dots,\, x_p) = (x_{p+1})^h + a_1(x_{p+1})^{h-1} + \dots + a_h \;,$$

dont les coefficients $a_1,\dots,\, a_h$ sont holomorphes en $x_1,\dots,\, x_p$ et nuls à l'origine; ce polynôme est <u>irréductible</u> (i.e: n'est pas le produit de deux polynômes du même type, et de degrés strictement plus petits);

(c) l'idéal $I(E_a)$ contient, pour chaque i tel que $p+2 \leq i \leq n$, une fonction de la forme

(3) $$\frac{\partial P}{\partial x_{p+1}}\, x_i - Q_i \;,$$

où Q_i est un polynôme de degré $\leq h-1$ en x_{p+1}, à coefficients holomorphes en $x_1,\dots,\, x_p$, et nuls à l'origine;

(d) le germe E_a est défini par un sous-ensemble (de X) du type suivant: dans un voisinage U assez petit de a, on considère <u>l'adhérence</u> E de l'ensemble des zéros communs aux fonctions (2) et (3) pour lesquels $\frac{\partial P}{\partial x_{p+1}} \neq 0$.

On constate alors que tous les points x d'un sous-ensemble ouvert de E, dense dans E, sont des points <u>réguliers</u> de E en lesquels le germe E_x a la dimension p (en fait, tous les points de E où $\frac{\partial P}{\partial x_{p+1}}$ est $\neq 0$ sont des points réguliers). L'entier p est donc un invariant du germe irréductible E_a; on l'appelle la <u>dimension</u> du germe E_a. C'est aussi la dimension de chaque composante irréductible du germe E_x défini par E en tout point $x \in E$ assez voisin de a.

(<u>Remarque</u>: il ne faut pas perdre de vue que E_x peut être <u>réductible</u> en des points $x \in E$ arbitrairement voisins de a, même si E_a est irréductible.)

<u>Définition</u>: un germe analytique E_a (irréductible ou non) est dit <u>de dimension</u> p si toutes ses composantes irréductibles sont de dimension p; E_a est dit de dimension $\leq p$ si toutes ses composantes irréductibles sont de dimension $\leq p$. Un sous-ensemble analytique $E \subset X$ est de dimension p si tous les germes E_x définis par E aux points $x \in E$ sont de dimension p;

E est de dimension $\leq p$ si tous les germes E_x définis par E aux points $x \in E$ sont de dimension $\leq p$.

5. Sous-ensemble analytique normal; espace analytique général.

Revenons à l'anneau $\mathcal{O}_x/I(E_x)$ associé à un germe analytique E_x, irréductible. Cet anneau est noethérien (car c'est un quotient d'un anneau noethérien). Mais il n'est pas toujours intégralement clos (cf. Exp. 7, §4).

Par exemple, dans l'espace C^2 de deux variables complexes x et y, considérons le germe irréductible défini, aux points $x = 0$, $y = 0$, par l'équation

$$y^2 - x^3 = 0 .$$

Dans le corps des fractions de l'anneau A associé à ce germe, on a $(y/x)^2 - x = 0$, donc y/x est entier algébrique sur A, et cependant y/x n'est pas dans A.

Définition: un germe d'ensemble analytique E_x est dit normal si l'anneau associé $\mathcal{O}_x/I(E_x)$ est un anneau d'intégrité, intégralement clos. (En particulier, normal implique irréductible.) Un sous-ensemble analytique $E \subset X$ est dit normal si les germes E_x définis par E aux points $x \in E$ sont normaux.

On peut démontrer (OKA, cf. Exp. 10 et 11 ci-dessous) que si un sous-ensemble analytique E définit un germe E_a normal, les germes E_x définis par E aux points $x \in E$ suffisamment voisins de a, sont normaux.

Définition d'un espace analytique normal: un espace topologique séparé X, muni d'un sous-faisceau $\mathcal{O}$ du faisceau $\mathcal{C}$ des germes de fonctions continues, est un espace analytique normal si chaque $x \in X$ possède un voisinage ouvert isomorphe à un sous-ensemble analytique normal E d'un ouvert U d'un espace C^k (E étant muni du faisceau des anneaux associés aux germes E_a des points a de E, tel qu'il est défini au §4 ci-dessus).

La notion d'isomorphisme de deux espaces analytiques est un cas particulier de la notion d'isomorphisme, telle qu'elle est définie au début du §2.

De même pour la notion d'homomorphisme, appelé aussi <u>application analytique</u>. Si X est un espace analytique général, les sections du faisceau $\mathcal{O}$ qui définit la structure de X, s'appellent les <u>fonctions holomorphes</u> dans X. Les éléments de $\mathcal{O}_x$ s'appellent les <u>germes de fonctions holomorphes</u> au point $x \in X$. L'anneau $\mathcal{O}_x$ est noethérien, mais n'est pas en général factoriel (même s'il est intégralement clos).

Tout isomorphisme d'un ouvert $U \subset X$ sur un sous-ensemble analytique normal E d'un ouvert de $\mathbf{C}^k$ s'appelle une <u>carte</u> de U.

Soit X un espace analytique normal. La <u>dimension</u> de X en un point $x \in X$ est, par définition, la dimension d'un sous-ensemble analytique normal servant de carte dans un voisinage de x. Elle est la même en tous les points assez voisins de x. On peut donc définir la dimension de chaque composante connexe de X.

Pour terminer cet exposé préliminaire, annonçons l'un des théorèmes qui seront démontrés plus tard (Exp. 12):

<u>Soit G un groupe linéaire (homogène) fini opérant dans $\mathbf{C}^n$. Sur l'espace-quotient $\mathbf{C}^n/G = X$, qui est séparé, définissons un faisceau $\mathcal{O}$ comme suit: si $x \in X$ est l'image de $y \in \mathbf{C}^n$, $\mathcal{O}_x$ est l'image de l'anneau des germes holomorphes en y et invariants par le groupe d'isotropie de y. Alors $\mathcal{O}$ définit sur X une structure d'espace analytique normal.</u>