J-P. Serre

Fonctions automorphes d'une variable : application du théorème de Riemann-Roch

Séminaire Henri Cartan, tome 6 (1953-1954), exp. nº 4, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1953-1954__6__A4_0>

FONCTIONS AUTOMORPHES D'UNE VARIABLE: APPLICATION DU THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH

(Exposé de J-P. Serre, 21-12-53)

§1. Enoncé du théorème de Riemann-Roch

Soit X une variété analytique complexe de dimension 1 (i.e., une "surface de Riemann"), connexe et compacte. Au point de vue topologique X est une surface orientable, donc son 1er nombre de Betti est pair, soit $2g$. L'entier positif g est dit le genre de X.

Conformément aux définitions générales (cf. exposé 1, Appendice) un diviseur D sur X est un élément du groupe libre admettant comme base l'ensemble des points de X. Autrement dit, on a:

$$D = \sum_{P \in X} n_P \cdot P \quad ,$$

où les n_P sont des éléments de $\mathbf{Z}$ nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

Le diviseur D est dit positif si $n_P \geq 0$ pour tout $P \in X$; ainsi le groupe des diviseurs est un groupe ordonné (partiellement).

Le degré du diviseur D est l'entier:

$$\deg(D) = \sum_{P \in X} n_P \quad .$$

Soit P un point de X et soit t_P une uniformisante locale en P, c'est-à-dire une carte locale en P appliquant P sur 0. Si f est une fonction méromorphe au voisinage de P, on peut définir l'ordre n de f en P: c'est l'unique entier tel que $f = (t_P)^n \cdot g$, où g est holomorphe et non nulle au voisinage de P (si $f = 0$, on prend $n = +\infty$, par convention); l'entier n dépend de P et de f, nous le noterons $o_P(f)$; on a $o_P(f_1 + f_2) \geq \mathrm{Inf}(o_P(f_1), o_P(f_2))$ et $o_P(f_1 f_2) = o_P(f_1) + o_P(f_2)$. Si $f \neq 0$, les $o_P(f)$ sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux, et l'expression:

$$(f) = \sum_{P \in X} o_P(f) \cdot P$$

est un diviseur, appelé le <u>diviseur de</u> f (f étant une fonction méromorphe sur X tout entier, bien entendu). Cette définition est en accord avec la définition générale donnée dans l'exposé 1, Appendice.

Un diviseur de la forme (f) est dit linéairement équivalent à 0. Les diviseurs linéairement équivalents à 0 forment un sous-groupe du groupe des diviseurs; le groupe quotient est appelé groupe des <u>classes de diviseurs</u>; deux diviseurs D_1 et D_2 sont dits linéairement équivalents (ce que l'on écrira $D_1 \sim D_2$) si $D_1 - D_2$ est linéairement équivalent à 0, c'est-à-dire si D_1 et D_2 appartiennent à la même classe.

<u>Si</u> $D_1 \sim D_2$, <u>on a</u> $\deg(D_1) = \deg(D_2)$. Il suffit de voir que $\deg(f) = 0$ pour toute fonction méromorphe $f \neq 0$, définie sur X tout entier; or $\deg(f)$ n'est autre que la somme des résidus de la différentielle méromorphe $\omega = df/f$, et la formule $\deg(f) = 0$ résulte alors du théorème des résidus (cf. plus bas). On peut également démontrer que $\deg(f) = 0$ en prouvant tout d'abord (par un raisonnement local classique) que le nombre de points P tels que $f(P) = \lambda$ $(\lambda \in \mathbf{C} \cup \{\infty\})$ est localement constant quand λ varie, donc constant (à condition de compter ces points avec leur ordre de multiplicité) et en appliquant ceci à $\lambda = 0$ et $\lambda = \infty$, on trouve bien $\deg(f) = 0$.

On peut donc parler du degré d'une classe de diviseurs.

Si $D = \sum_{P \in X} n_P \cdot P$ est un diviseur, nous noterons $L(D)$ l'espace vectoriel des fonctions méromorphes f telles que $o_P(f) \geq - n_P$ pour tout $P \in X$; pour qu'une fonction $f \neq 0$ appartienne à $L(D)$, il faut et il suffit que le diviseur de f vérifie $(f) \geq - D$, ou encore $(f) + D \geq 0$. Inversement, si D' est un diviseur ≥ 0 linéairement équivalent à D, on peut écrire $D' = (f) + D$, où $f \in L(D)$ est déterminé à un facteur constant près. Si l'on note $\ell(D)$ la dimension de l'espace vectoriel $L(D)$, on voit donc que $\ell(D) \geq 1$ signifie qu'il existe un diviseur $D' \geq 0$, $D' \sim D$; dans ce cas, on a évidemment $\deg(D) \geq 0$.

Si $D_1 \sim D_2$, $L(D_1)$ est isomorphe à $L(D_2)$, d'où $\ell(D_1) = \ell(D_2)$. Si $\ell(D) > 1$, il existe $D' \sim D$, $D' \geq 0$, et l'on a $\ell(D') = \ell(D)$; or $L(0)$ est de dimension 1, donc $D' \neq 0$, et $\deg(D) = \deg(D') > 0$. Ainsi, pour que $\ell(D) > 1$, il est nécessaire (mais non suffisant en général, si $g \neq 0$) que $\deg(D) > 0$.

Sur X, on a la notion de différentielle méromorphe: c'est une forme différentielle ω de degré 1 qui, au voisinage de chaque point $P \in X$, peut s'écrire $\omega = f \cdot dt_P$, où f est méromorphe, et où t_P désigne une uniformisante locale en P. L'ordre de ω en P, $o_P(\omega)$, est égal par définition à $o_P(f)$. Le diviseur (ω) de ω est

$$(\omega) = \sum_{P \in X} o_P(\omega) \cdot P \quad .$$

Le résidu en P de ω est le coefficient de $1/t_P$ dans le développement de f en série de Laurent; on le note $\mathrm{res}_P(\omega)$. Le théorème des résidus affirme que

$$\sum_{P \in X} \mathrm{res}_P(\omega) = 0 \quad .$$

(Pour démontrer le théorème des résidus, on peut, par exemple, appliquer la formule de Stokes à ω et au domaine formé en retirant de X des petits disques contenant les pôles de ω. On peut aussi appliquer la formule $\int_X d\omega = 0$, $d\omega$ étant considérée comme une forme à coefficients distributions.)

Si $D = \Sigma_{P \in X}\, n_P \cdot P$ est un diviseur, nous noterons $I(D)$ l'espace vectoriel des formes méromorphes ω telles que $o_P(\omega) \geq n_P$ pour tout $P \in X$, et $i(D) = \dim I(D)$. Pour que $\omega \neq 0$ appartienne à $I(D)$ il faut et il suffit que $(\omega) \geq D$. Si $D \sim D'$, $I(D)$ est isomorphe à $I(D')$ et $i(D) = i(D')$.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de Riemann-Roch:

THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH. Pour tout diviseur D sur X, on a:

$$\text{(I)} \qquad \ell(D) - i(D) = \deg(D) + 1 - g \quad .$$

(Pour la démonstration, voir par exemple:

H. WEYL, Die Idee der Riemannschen Fläche, p. 122;

L. SCHWARTZ, Sur le mémoire de Kodaira, exposé au Sém. Bourbaki, Mai 1950.

La théorie des faisceaux analytiques permet de présenter ces démonstrations sous une forme plus agréable, et surtout mieux adaptée à une généralisation à n variables. Cf. des notes récentes de Kodaira et Spencer aux Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A., 1953.

Lorsque l'on sait déjà que le corps des fonctions méromorphes sur X a le degré de transcendance 1 et sépare les points de X (c'est le cas dans l'application que nous ferons au §2), on peut appliquer les démonstrations algébriques de Riemann-Roch; voir par exemple:

A. WEIL, Zur algebraischen Theorie der algebraischen Funktionen, J. Crelle, 179, 1938, p. 129-133;

C. CHEVALLEY, Introduction to the theory of algebraic functions of one variable, Math. Surveys, VI (Th. 7, page 33).

Si l'on procède ainsi, il faut en outre montrer que le genre de X (défini de façon purement algébrique) est bien la moitié du 1er nombre de Betti; cela peut se faire en remarquant que le nombre algébrique de zéros d'une différentielle holomorphe est égal à la caractéristique d'Euler-Poincaré de X, d'après un théorème classique de Hopf.)

Nous nous bornerons ici à donner quelques conséquences immédiates du théorème de Riemann-Roch:

a) Il existe une fonction méromorphe non constante sur X.

En effet, si $\deg(D)$ est assez grand, on a $\ell(D) > 1$, ce qui serait impossible si les seules fonctions méromorphes étaient les constantes.

Il s'ensuit, d'après l'exposé 2, que le corps k des fonctions méromorphes sur X est un corps de fonctions algébriques d'une variable.

b) Il existe une différentielle méromorphe ω non identiquement nulle sur X.

On prend $\omega = df$, ou f est méromorphe non constante (on peut aussi appliquer la formule de Riemann-Roch, avec $\deg(D)$ assez petit).

Toute différentielle méromorphe ω' peut alors s'écrire $\omega' = f\cdot\omega$ où f est méromorphe; d'où $(\omega') = (f) + (\omega)$, ce qui montre que les diviseurs des différentielles méromorphes $\neq 0$ forment une seule classe de diviseurs, appelée <u>classe canonique</u>.

c) Si $K = (\omega)$ appartient à la classe canonique, et si D est un diviseur sur X, <u>l'espace</u> $I(D)$ <u>est isomorphe à l'espace</u> $L(K-D)$.

En effet, pour que $\omega' = f\cdot\omega$ appartienne à $I(D)$, il faut et il suffit que $(\omega') = (f) + K \geq D$, c'est-à-dire $(f) \geq -(K-D)$, i.e., $f \in L(K-D)$.

On a donc $i(D) = \ell(K-D)$, et le théorème de Riemann-Roch peut s'écrire sous la forme équivalente:

(II) $$\ell(D) - \ell(K-D) = \deg(D) + 1 - g.$$

d) En faisant $D = 0$ dans (I), on voit que $i(0) = g$: <u>l'espace vectoriel des formes différentielles holomorphes est de dimension</u> g.

On a $\ell(K) = i(0) = g$, et $i(K) = \ell(0) = 1$. En faisant $D = K$ dans (I), on trouve donc:

$$\deg(K) = 2g - 2 .$$

e) <u>Si</u> $\deg(D) > 2g - 2$, <u>on a</u> $\ell(D) = \deg(D) + 1 - g$. (III)

En effet, on a alors $\deg(K-D) < 0$, d'où $\ell(K-D) = 0$ d'après ce qui a été dit plus haut, et on applique la formule (II).

La formule (III) montre donc que, si $\deg(D)$ est "assez grand," $\ell(D)$ est déterminé par $\deg(D)$, ce qui est très commode dans les applications. Par exemple:

f) <u>Si</u> $\deg(D) > 2g - 1$, <u>pour tout</u> $P \in X$ <u>il existe</u> $D' \sim D$, $D' \geq 0$, <u>avec</u> $P \notin D'$.

(Autrement dit, la série linéaire complète $|D|$, formée des diviseurs positifs D' équivalents à D, n'a pas de points fixes.)

Si n_P est le coefficient de P dans D, l'assertion f) revient à dire qu'il existe $f \in L(D)$ avec $o_P(f) = -n_P$; or, si une telle fonction n'existait pas, on aurait $L(D) = L(D-P)$, d'où $\ell(D) = \ell(D-P)$, ce qui est en contradiction avec (III).

g) Soit $f_0, \ldots, f_n$ une base de $L(D)$, D étant un diviseur tel que $\deg(D) > 2g$. Pour tout $x \in X$, soit $F(x)$ le point de l'espace projectif $P_h(\mathbf{C})$ de coordonnées homogènes $f_0(x), \ldots, f_h(x)$. L'application F est un isomorphisme analytique de X sur une sous-variété sans singularités de $P_h(\mathbf{C})$ et le diviseur D est équivalent à une section hyperplane de $F(X)$.

Il est évident que F ne change pas lorsque l'on remplace D par un diviseur équivalent; en particulier on peut supposer (d'après f)) que $D \geq 0$. La fonction constante $f = 1$ appartient à $L(D)$ et peut s'écrire $1 = \Sigma\, c_i \cdot f_i$; appliquant à nouveau f) on montre alors que la section de $F(X)$ par l'hyperplan $\Sigma\, c_i \cdot X_i = 0$ est $F(D)$.

Soit n_P le coefficient de P dans D; si $P \neq Q$, il y a $f \in L(D)$ tel que $o_P(f) \geq - n_P + 1$ et $o_Q(f) = - n_Q$ (appliquer f) au diviseur $D - P$); cela signifie qu'il existe un hyperplan de $P_h(\mathbf{C})$ passant par $F(P)$ mais pas par $F(Q)$: donc F est biunivoque.

Enfin, pour tout $P \in X$, il existe $f \in L(D)$ tel que $o_P(f) = - n_P + 1$ (appliquer encore f) à $D - P$); cela signifie qu'il existe un hyperplan de $P_h(\mathbf{C})$ passant par P et ayant une intersection simple avec $F(X)$ en P; donc tout point de $F(X)$ est simple, et F est bien un isomorphisme analytique.

A cause d'un théorème de Chow, $F(X)$ est une courbe algébrique (sans singularités).

§2. Application du théorème de Riemann-Roch aux fonctions automorphes.

Soit Y le disque unité $|z| < 1$ de $\mathbf{C}$, et G un groupe discret d'automorphismes de Y tel que $X = Y/G$ soit compact (nous étudierons un cas plus général dans l'exposé suivant). Nous noterons π la projection canonique $Y \to X$. Pour tout $y \in Y$ nous noterons G_y le stabilisateur de y dans G, i.e. l'ensemble des $\sigma \in G$ tels que $\sigma(y) = y$.

LEMME. Pour tout $y \in Y$, le groupe G_y est cyclique fini d'ordre e_y, et il existe une uniformisante locale z_y en y telle que les transformations

$\sigma \in G_y$ soient les transformations $z_y \to \varepsilon \cdot z_y$ où ε parcourt le groupe des racines e_y-ièmes de l'unité.

Par une transformation homographique, on est ramené au cas particulier où $y = 0$. Or les transformations de G laissant fixe 0 sont de la forme $z \to e^{2\pi i \varphi} \cdot z$ (appliquer le lemme de Schwarz, par exemple) et d'autre part, forment un sous-groupe fini de G. Le lemme résulte immédiatement de là.

(En fait, le lemme précédent n'est pas spécial au disque unité: H. Cartan a démontré que tout groupe compact d'automorphismes analytiques d'une variété analytique complexe Y admettant un point fixe 0 est localement, au voisinage de 0, isomorphe à un groupe linéaire.)

Si x est un point de X, les groupes G_y, $y \in \pi^{-1}(x)$, sont conjugués dans G et ont donc le même ordre, que nous noterons e_x et appellerons l'indice de ramification de x. Si $e_x > 1$, nous dirons que x est ramifié: cela signifie que $x = \pi(y)$ avec $G_y \neq \{e\}$; comme de tels points y sont isolés (à cause du lemme précédent, par exemple), l'ensemble des points ramifiés de X est fini.

Nous allons maintenant munir X d'une structure de variété analytique complexe de dimension 1 ; pour cela, il suffit de donner, pour tout point $x \in X$, une uniformisante locale en x, t_x, et de vérifier certains axiomes. Si $x = \pi(y)$, $y \in Y$, nous prendrons pour t_x la fonction $(z_y)^{e_y}$, où z_y et e_y ont les propriétés indiquées dans le lemme ci-dessus; cela a un sens, car la fonction $(z_y)^{e_y}$ est évidemment invariante par G_y, donc définit par passage au quotient une fonction sur X, définie au voisinage de x; pour qu'une fonction f, définie au voisinage de x, soit fonction holomorphe de t_x, il faut et il suffit que $\tilde{f} = f \circ \pi$, définie au voisinage de y, soit holomorphe; ainsi l'anneau $\mathcal{O}_x$ des fonctions holomorphes en x est isomorphe au sous-anneau de $\mathcal{O}_y$ formé des fonctions invariantes par le groupe G_y. Ceci montre en particulier que la structure analytique de X ne dépend pas du choix de z_y; quant à la vérification des axiomes des variétés analytiques, elle est immédiate.

L'application π: $Y \to X$ est analytique; c'est même localement un isomorphisme en dehors des points ramifiés; s'il n'existe aucun tel point, Y

est le revêtement universel de X, et G est isomorphe au groupe fondamental de X, $\pi_1(X)$.

Si P est un point de X, nous noterons, comme au §1, $o_P(f)$, resp. $o_P(\omega)$, l'ordre en P d'une fonction méromorphe f, resp. d'une différentielle méromorphe ω. D'autre part, soit h une fonction méromorphe sur Y, automorphe de poids quelconque; si $Q' = \sigma \cdot Q$, avec $\sigma \in G$, on a $o_Q(h) = o_{Q'}(h)$; donc $o_Q(h)$ ne dépend que de la projection $\pi(Q)$ de Q dans X, nous pouvons le noter $\tilde{o}_P(h)$, si $P = \pi(Q)$.

Les ordres o_P et $\tilde{o}_P$ ont des relations étroites:

a) Si f est méromorphe sur X, et si $\tilde{f} = f \circ \pi$ est la fonction automorphe de poids 0 définie par f sur Y, on a:

$$\tilde{o}_P(\tilde{f}) = e_P \cdot o_P(f), \quad e_P = \text{indice de ramification en } P.$$

b) Si ω est une différentielle méromorphe sur X, $\pi^*(\omega)$ est une différentielle sur Y invariante par G, donc (exposé 1, n°3) égale à $g \cdot dz$, où g est automorphe de poids 1, et l'on a:

$$\tilde{o}_P(g) = e_P \cdot o_P(\omega) + e_P - 1 \quad .$$

Les propriétés a) et b) se démontrent par un calcul local immédiat. Pour a), on écrit f sous la forme:

$$f = (t_P)^{o_P(f)} \cdot f_1, \quad \text{où } f_1 \text{ est holomorphe} \neq 0 \text{ en } P,$$

d'où:

$$\tilde{f} = (z_Q)^{e_P \cdot o_P(f)} \cdot \tilde{f}_1 \qquad (\pi(Q) = P),$$

ce qui montre bien que l'ordre de $\tilde{f}$ en Q est $e_P \cdot o_P(f)$. Démonstration analogue pour b).

Nous choisirons maintenant, une fois pour toutes, une différentielle ω sur X, méromorphe et non identiquement nulle et nous désignerons par g la fonction méromorphe de poids 1 sur Y telle que $\pi^*(\omega) = g \cdot dz$, $\pi^*(\omega)$ désignant, comme ci-dessus, l'image réciproque de la forme ω par l'application π. L'existence d'une telle forme résulte, soit du §1, b) qui est applicable puisque X est compact, soit plus simplement du théorème 4 de l'exposé 1.

La fonction méromorphe g^n, n entier ≥ 0, est donc de poids n, ce qui montre que toute fonction méromorphe h de poids n est de la forme:

$$h = \tilde{f}\cdot g^n \quad \text{avec} \quad \tilde{f} = f\circ\pi, \quad f \text{ méromorphe sur } X.$$

Pour que h soit <u>holomorphe</u>, il faut et il suffit que $\tilde{o}_P(h) \geq 0$ pour tout $P \in X$, c'est-à-dire;

$$\tilde{o}_P(\tilde{f}) = e_P\cdot o_P(f) \geq -n\cdot\tilde{o}_P(g) = -n\cdot e_P\cdot o_P(\omega) - n(e_P - 1),$$

ou encore:

$$o_P(f) \geq -n\cdot o_P(\omega) - \left[n(1 - \frac{1}{e_P})\right],$$

le symbole $[x]$ désignant la partie entière du nombre x.

Soit $K = \Sigma\, o_P(\omega)\cdot P$ le diviseur de ω, et posons:

$$E_n = n\cdot K + \sum_{P\in X}\left[n(1 - \frac{1}{e_P})\right]\cdot P,$$

le Σ ne portant d'ailleurs que sur les points <u>ramifiés</u> de X. L'inégalité ci-dessus équivaut alors à la suivante:

$$(f) \geq -E_n, \text{ autrement dit } f \in L(E_n).$$

En résumé:

PROPOSITION 1. <u>Soit</u> D_n <u>l'espace vectoriel des fonctions holomorphes de poids</u> n <u>sur</u> Y. <u>L'application</u> $f \to \tilde{f}\cdot g^n$ <u>est un isomorphisme de</u> $L(E_n)$ <u>sur</u> D_n.

COROLLAIRE. <u>Si</u> $d_n = \dim D_n$, <u>on a</u> $d_n = \ell(E_n)$.

La proposition précédente est valable même si X n'est pas compacte (car l'hypothèse que X est compacte n'a pas encore été utilisée); mais dans ce cas il résulte d'un théorème de Behnke-Stein que X est une variété de Stein (au sens du Séminaire 1951-52, exposé 9) et la dimension de $L(E_n)$ est infinie: si l'on veut des propriétés raisonnables il faut donc imposer aux fonctions automorphes certaines conditions à la frontière, cf. exposé 5.

Bornons-nous donc au cas où X est compact. Pour appliquer le théorème de Riemann-Roch au diviseur E_n, nous avons besoin de connaître le degré de E_n. Mais K étant le diviseur d'une différentielle, on a $\deg(K) = 2g - 2$, g étant le genre de X (§1, d)). Donc:

$$\deg(E_n) = 2n(g-1) + \sum_{P \in X} \left[n(1 - \frac{1}{e_P}) \right].$$

LEMME. <u>Le nombre</u> $A = 2g - 2 + \sum (1 - \frac{1}{e_P})$ est > 0.

En effet, soit n un entier, multiple de tous les e_P, et assez grand pour que $d_n \geq 2$ (un tel n existe d'après le théorème 3 de l'exposé 1); comme $\ell(E_n) = d_n \geq 2$, on a $\deg(E_n) > 0$, et puisque n est multiple des e_P, $\deg(E_n) = nA$, d'où $A > 0$.

C.Q.F.D.

(Autre démonstration: on montre que $2\pi A$ est l'aire de X calculée à partir de l'élément d'aire "non-euclidien" de Y.)

Comme application du lemme précédent, montrons que $\deg(E_n) > 2g - 2$ dès que $n \geq 2$:

On a $\deg(E_n) - (2g - 2) = (n - 1)(2g - 2) + \sum \left[n(1 - \frac{1}{e_P}) \right]$. Or on montre aisément que $[n(1 - 1/e_P)] \geq (n - 1)(1 - 1/e_P)$. D'où:

$$\deg(E_n) - (2g - 2) \geq (n - 1)A > 0 \quad \text{si} \quad n \geq 2.$$

On peut donc appliquer la formule III de §1, e), et l'on obtient:

$$d_n = \ell(E_n) = \deg(E_n) + 1 - g \quad \text{si} \quad n \geq 2,$$

d'où en résumé:

PROPOSITION 2. <u>Si</u> $X = Y/G$ <u>est compact et de genre</u> g, <u>on a</u>:

$$d_n = (2n - 1)(g - 1) + \sum_{P \in X} \left[n(1 - \frac{1}{e_P}) \right] \quad \text{si} \quad n \geq 2.$$

(Si $n = 0$, $E_0 = 0$, et $d_0 = 1$; si $n = 1$, $E_1 = K$, et $d_1 = g$.)

On peut donner d'autres applications de la proposition 1; par exemple, on peut chercher dans quel cas on a $\deg(E_n) > 2g$; en appliquant le lemme ci-dessus, on voit que cette condition est réalisée lorsque:

a) $g = 0$, $n \geq 2$,
b) $g = 1$, $n \geq 6$,
c) $g = 2$, $n \geq 3$,
d) $g > 2$, $n \geq 2$.

Quand il en est ainsi, le §1, g) montre que toute base $f_0, \ldots, f_j$ de $L(E_n)$ définit un plongement $F: P \to (f_0(P), \ldots, f_j(P))$ de X sur une courbe sans singularités de l'espace projectif $P_j(\mathbf{C})$. Or les fonctions $f_0, \ldots, f_j$ définissent des fonctions holomorphes de poids n, $g_0, \ldots, g_j$; l'application $G: Q \to (g_0(Q), \ldots, g_j(Q))$ de Y dans $P_j(\mathbf{C})$ est constante sur les classes suivant G et l'on a $G = F \circ \pi$. En résumé;

Si n est assez grand (les valeurs précises étant indiquées dans a), b), c), d) ci-dessus) toute base $g_0, \ldots, g_j$ de l'espace D_n des fonctions holomorphes de poids n définit une application

$$G: \quad Q \to (g_0(Q), \ldots, g_j(Q)) \in P_j(\mathbf{C})$$

qui, par passage au quotient, définit un isomorphisme analytique de $X = Y/G$ sur une courbe sans singularités de l'espace projectif complexe $P_j(\mathbf{C})$, $j = d_n - 1$.

BIBLIOGRAPHIE

H. PETERSSON, Nombreux articles depuis 1930. Notamment: Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen, II, Math. Annalen, 115, 1938, p. 175-204 (Calcul de d_n au moyen du th. de Riemann-Roch, mais sous des hypothèses bien plus larges que celles du présent exposé et du suivant.)

H. POINCARÉ, Oeuvres, tome II, p. 169, §6 (on y trouvera notamment la proposition 2).

A. WEIL, Généralisation des fonctions abéliennes, J. de Maths., 17, 1938, p. 47-87 (Chap. I) ainsi qu'une Note dans Hamb. Abh., Bd. 11. (Extension du théorème de Riemann-Roch aux diviseurs "matriciels".)