J-P. Serre

Faisceaux analytiques sur l'espace projectif (suite)

Séminaire Henri Cartan, tome 6 (1953-1954), exp. n° 19, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1953-1954__6__A19_0>

FAISCEAUX ANALYTIQUES SUR L'ESPACE PROJECTIF (Suite)

(Exposé de J-P. Serre, 17-5-54)

§3. Démonstration des théorèmes fondamentaux.

Nous allons démontrer les théorèmes A et B énoncés au No. 7 de l'exposé précédent. Nous désignerons par (A_r) et (B_r) les propositions suivantes:

(A_r) Si X est un espace projectif complexe de dimension r, et si $\mathfrak{F}$ est un faisceau analytique cohérent sur X, $H^0(X, \mathfrak{F}(n))$ engendre $\mathfrak{F}(n)_x$ pour tout $x \in X$ si n est assez grand.

(B_r) Avec les mêmes hypothèses, $H^q(X, \mathfrak{F}(n)) = 0$ pour $q \geq 1$ si n est assez grand.

Nous allons démontrer (A_r) et (B_r) par récurrence sur r (le cas $r = 0$ étant trivial). De façon plus précise, nous verrons que (A_{r-1}) et $(B_{r-1}) \Longrightarrow (A_r)$ et que $(A_r) \Longrightarrow (B_r)$.

8. Démonstration de (A_{r-1}) et $(B_{r-1}) \Longrightarrow (A_r)$.

On observe d'abord que, si $H^0(X, \mathfrak{F}(n_0))$ engendre $\mathfrak{F}(n_0)_x$ pour un $x \in X$, alors $H^0(X, \mathfrak{F}(n_0+ n))$ engendre $\mathfrak{F}(n_0+ n)_x$ pour tout $n \geq 0$. En effet, supposons que $x \in U_0$, par exemple. L'application:

$$m \rightarrow (z_0/z_i)^n.m \quad \text{de} \quad {}^i\mathfrak{F} \quad \text{dans} \quad {}^i\mathfrak{F},$$

commute aux identifications qui definissent respectivement $\mathfrak{F}(n_0)$ et $\mathfrak{F}(n_0+ n)$, donc définit un homomorphisme de faisceaux

$$\varphi: \quad \mathfrak{F}(n_0) \rightarrow \mathfrak{F}(n_0+ n) \ ,$$

qui est un isomorphisme au-dessus de U_0, donc en particulier en x, ce qui démontre évidemment notre affirmation.

D'autre part, si $H^0(X, \mathfrak{F}(n_0))$ engendre $\mathfrak{F}(n_0)_x$, alors $H^0(X, \mathfrak{F}(n_0))$ engendre $\mathfrak{F}(n_0)_y$ pour tout y assez voisin de x, puisque le faisceau $\mathfrak{F}(n_0)$ est cohérent.

Ces deux remarques permettent de montrer, par un raisonnement facile de compacité, que (A_r) est entraînée par la proposition en apparence plus faible que voici:

(A'_r) Pour tout faisceau analytique cohérent $\mathfrak{F}$ sur X, et tout point $x \in X$, $H^0(X, \mathfrak{F}(n))$ engendre $\mathfrak{F}(n)_x$ pour n assez grand (i.e., pour $n \geq n_0(\mathfrak{F}, x)$).

Nous allons maintenant démontrer (A'_r).

Soit donc $x \in X$. Quitte à changer de système de coordonnées dans C^{r+1}, nous pouvons supposer que $z_0 = 0$ en x, autrement dit que $x \in E$, E désignant l'hyperplan d'équation $z_0 = 0$.

Considérons de nouveau l'homomorphisme φ: $\mathfrak{F}(-1) \to \mathfrak{F}$ défini plus haut (sur chaque U_i, c'est la multiplication par z_0/z_i), et soient $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{G}$ le noyau et le conoyau de φ, respectivement. On a donc la suite exacte:

$$0 \to \mathfrak{A} \to \mathfrak{F}(-1) \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{F} \to \mathfrak{G} \to 0 .$$

D'où, en tenant compte de la Proposition 6, et du fait que $\mathfrak{F}(-1)(n)$ est isomorphe à $\mathfrak{F}(n-1)$, la suite exacte:

$$0 \to \mathfrak{A}(n) \to \mathfrak{F}(n-1) \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{F}(n) \to \mathfrak{G}(n) \to 0 .$$

Dans cette suite exacte, l'homomorphisme φ est encore donné, sur chaque U_i, par la multiplication par z_0/z_i.

Examinons les propriétés des faisceaux $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{G}$. Comme φ est évidemment un isomorphisme de $\mathfrak{F}(-1)$ sur $\mathfrak{F}$ au-dessus de $U = \complement E$, on a $\mathfrak{A}_y = \mathfrak{G}_y = 0$ si $y \notin E$. D'autre part, si $y \in E$, et si f est un élément de $\mathcal{O}_y$ qui induit 0 sur E, on a $f \cdot m = 0$ pour tout $m \in \mathfrak{A}_y$ et tout $m \in \mathfrak{G}_y$ (en effet, si $y \in U_i$, f est un multiple de z_0/z_i, et notre affirmation résulte de la définition de $\mathfrak{A}_y$ et $\mathfrak{G}_y$ comme noyau et conoyau de la multiplication par z_0/z_i). Il en résulte que, si l'on note $\mathcal{O}_y(E)$ l'anneau des germes de fonctions holomorphes sur E au point y, $\mathfrak{A}_y$ et $\mathfrak{G}_y$ sont des $\mathcal{O}_y(E)$-modules. Notons $\mathfrak{A}^*$ et $\mathfrak{G}^*$ les faisceaux induits par $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{G}$ sur E; d'après ce qui précède, ce sont des faisceaux analytiques <u>sur</u> E, et il est facile de voir qu'ils sont cohérents. D'après le Séminaire 50-51, Exposé 17, on a $H^q(X, \mathcal{H}) = H^q(E, \mathcal{H}^*)$, et de même pour $\mathcal{G}$.

Tout ceci s'applique également aux faisceaux $\mathcal{H}(n)$ et $\mathcal{G}(n)$: les faisceaux $\mathcal{H}(n)^*$ et $\mathcal{G}(n)^*$ qu'ils induisent sur E sont analytiques cohérents, et d'ailleurs isomorphes aux faisceaux $\mathcal{H}^*(n)$ et $\mathcal{G}^*(n)$ (comme d'habitude, l'isomorphisme est évident sur chaque U_i, et commute aux identifications sur $U_i \cap U_j$).

On a donc, pour $q \geq 1$,

$$H^q(X, \mathcal{G}(n)) = H^q(E, \mathcal{G}(n)^*) = H^q(E, \mathcal{G}^*(n)) = 0 \quad \text{pour} \quad n \geq n_0 \ ,$$

d'après (B_{r-1}) appliqué au faisceau $\mathcal{G}^*$ sur E.

Résultat identique pour $\mathcal{H}(n)$.

Soit alors $\mathcal{J}_n$ l'image de φ, qui est un sous-faisceau de $\mathcal{F}(n)$. On a les deux suites exactes de faisceaux:

$$0 \to \mathcal{H}(n) \to \mathcal{F}(n-1) \to \mathcal{J}_n \to 0 \ ,$$
$$0 \to \mathcal{J}_n \longrightarrow \mathcal{F}(n) \longrightarrow \mathcal{G}(n) \to 0 \ ,$$

d'où les deux suites exactes de cohomologie:

$$H^1(X, \mathcal{F}(n-1)) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{J}_n) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{H}(n)) \ ,$$
$$H^1(X, \mathcal{J}_n) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}(n)) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{G}(n)) \ .$$

D'après ce qui précède, $H^1(X, \mathcal{G}(n))$ et $H^2(X, \mathcal{H}(n))$ sont nuls pour $n \geq n_0$, d'où les inégalités:

$$\dim H^1(X, \mathcal{F}(n-1)) \geq \dim H^1(X, \mathcal{J}_n) \geq \dim H^1(X, \mathcal{F}(n)), \qquad n \geq n_0 .$$

Ces inégalités entraînent que $\dim H^1(X, \mathcal{F}(n))$ est une fonction <u>décroissante</u> de n, pour $n \geq n_0$. Comme $\dim H^1(X, \mathcal{F}(n)) < +\infty$, d'après l'exposé 17, on en conclut que $\dim H^1(X, \mathcal{F}(n))$ est <u>indépendant</u> de n, pour $n \geq n_1$, d'où:

$$\dim H^1(X, \mathcal{F}(n-1)) = \dim H^1(X, \mathcal{J}_n) = \dim H^1(X, \mathcal{F}(n)), \qquad n \geq n_1 .$$

Mais alors l'homomorphisme: $H^1(X, \mathcal{J}_n) \to H^1(X, \mathcal{F}(n))$ applique un espace de dimension finie sur un espace de même dimension, donc est injectif.

La suite exacte de cohomologie montre alors que:

<u>pour</u> $n \geq n_1$, <u>l'homomorphisme</u> $H^0(X, \mathcal{F}(n)) \to H^0(X, \mathcal{G}(n))$ <u>est surjectif</u>.

Mais on sait que $H^0(X, \mathcal{G}(n)) = H^0(E, \mathcal{G}^*(n))$, et, d'après (A_{r-1}), $H^0(E, \mathcal{G}^*(n))$ engendre $\mathcal{G}^*(n)_x = \mathcal{G}(n)_x$, pour $n \geq n_2$. On peut toujours supposer que $n_2 \geq n_1$. Nous allons voir maintenant que, <u>pour</u> $n \geq n_2$, $H^0(X, \mathcal{F}(n))$ <u>engendre</u> $\mathcal{F}(n)_x$, ce qui achèvera de montrer que (A_{r-1}) et $(B_{r-1}) \Longrightarrow (A_r)$.

Nous supposerons que $x \in U_i$, ce qui permet d'identifier $\mathcal{F}(n)$ à $\mathcal{F}$ au-dessus de U_i, et en particulier $\mathcal{F}(n)_x$ à $\mathcal{F}_x$. Cette identification transforme, on l'a vu, l'homomorphisme φ en la multiplication par $t_0 = z_0/z_i$: $\mathcal{F} \to \mathcal{F}$. Donc $\mathcal{G}(n)_x$ se trouve identifié au quotient de $\mathcal{F}_x$ par $t_0 \cdot \mathcal{F}_x$. Soit alors $\mathcal{D}_x \subset \mathcal{F}_x$ le sous-module de $\mathcal{F}_x$ engendré par les éléments de $H^0(X, \mathcal{F}(n))$, $n \geq n_2$. D'après ce que nous venons de voir, l'image de $\mathcal{D}_x$ dans $\mathcal{F}_x/t_0 \cdot \mathcal{F}_x$ est égale à $\mathcal{F}_x/t_0 \cdot \mathcal{F}_x$ tout entier. Autrement dit, $\mathcal{F}_x = t_0 \cdot \mathcal{F}_x + \mathcal{D}_x$; posons $\mathcal{Q}_x = \mathcal{F}_x / \mathcal{D}_x$; l'égalité précédente signifie que $\mathcal{Q}_x = t_0 \cdot \mathcal{Q}_x$; appliquant alors le lemme du bas de la page 7-2 (avec $A = \mathcal{O}_x$, $F = \mathcal{Q}_x$, I = idéal engendré par t_0 dans $\mathcal{O}_x$), on voit que $\mathcal{Q}_x = 0$, d'où $\mathcal{F}_x = \mathcal{D}_x$, ce qui achève la démonstration.

La démonstration précédente est inspirée d'une démonstration analogue de Kodaira-Spencer (<u>Divisor class groups on algebraic varieties</u>, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1953). Le théorème de finitude de l'Exposé 17 y joue un rôle essentiel.

9. Démonstration de $(A_r) \Longrightarrow (B_r)$.

Pour $q > r$, on a $H^q(X, \mathcal{F}(n)) = 0$ quel que soit n, d'après la Proposition 4 de l'Exposé 18. Nous démontrerons alors (B_r) par récurrence descendante sur q, $q \geq 1$.

D'après (A_r), il existe un entier m tel que $H^0(X, \mathcal{F}(m))$ engendre $\mathcal{F}(m)_x$ pour tout $x \in X$. Soit alors $s_1, \ldots, s_p$ une base de l'espace vectoriel $H^0(X, \mathcal{F}(m))$; à tout système $(f_1, \ldots, f_p)$ de p éléments de $\mathcal{O}_x$, faisons correspondre l'élément $\Sigma f_i \cdot s_i \in \mathfrak{F}(m)_x$. On obtient ainsi un homomorphisme analytique $\theta : \mathcal{O}^p \to \mathfrak{F}(m)$, qui est <u>surjectif</u> puisque $s_1, \ldots, s_p$ engendrent $\mathfrak{F}(m)_x$ pour tout $x \in X$. Si $\mathcal{G}$ est le noyau de θ, on a donc une suite exacte:

$$0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{O}^p \xrightarrow{\theta} \mathfrak{F}(m) \to 0 .$$

D'où, en appliquant la Proposition 6, une suite exacte:

$$0 \to \mathcal{G}(n) \to \mathcal{O}^p(n) \to \mathfrak{F}(m+n) \to 0$$

D'où la suite exacte de cohomologie:

$$H^q(X, \mathcal{O}^p(n)) \to H^q(X, \mathfrak{F}(m+n)) \to H^{q+1}(X, \mathcal{G}(n)) .$$

Or, d'après la Proposition 7 de l'Exposé 18, on a $H^q(X; \mathcal{O}^p(n)) = 0$ pour $n \geq 0$, et d'après l'hypothèse de récurrence descendante sur q, $H^{q+1}(X, \mathcal{G}(n)) = 0$ pour n assez grand. Donc $H^q(X, \mathfrak{F}(m+n)) = 0$ pour n assez grand, ce qui achève la démonstration des théorèmes fondamentaux.

<u>Note</u>. Il serait très facile de montrer directement que $(B_r) \Longrightarrow (A_r)$; malheureusement, cela ne permettrait de simplifier aucune des démonstrations précédentes. La même situation se retrouve dans la théorie des variétés de Stein: le théorème B entraîne trivialement le théorème A.

§4. <u>Faisceaux cohérents d'idéaux</u>.

10. <u>Idéaux de polynômes, et faisceaux d'idéaux</u>.

Soit P un polynôme homogène de degré n en les variables $z_0, \ldots, z_n$. Soit $x \in X$, et soit t une forme linéaire en $z_0, \ldots, z_r$, non nulle en x. Puisque P/t^n est homogène de degré 0, c'est une fonction rationnelle, holomorphe en x, donc c'est un élément de $\mathcal{O}_x$. Si l'on remplace t par une autre forme linéaire t' jouissant des mêmes propriétés, $P/t'^n = P/t^n \cdot (t^n/t'^n)$, et t^n/t'^n est un élément <u>inversible</u> de $\mathcal{O}_x$. Ainsi l'application $P \to P/t^n$ fait correspondre à tout polynôme homogène P un élément de $\mathcal{O}_x$, défini à la multiplication près par un élément inversible de $\mathcal{O}_x$. En particulier, si $\mathfrak{I}_x$ est un idéal de $\mathcal{O}_x$, la propriété $P/t^n \in \mathfrak{I}_x$

est indépendante de t. Nous dirons alors, par abus de langage, que P <u>appartient</u> à $\mathfrak{I}_x$. De même, si $P_1, \dots, P_k$ sont des polynômes homogènes de degrés $n_1, \dots, n_k$, l'idéal de $\mathcal{O}_x$ engendré par les $P_1/t^{n_1}, \dots, P_k/t^{n_k}$ ne dépend pas de t; on dit que c'est l'idéal <u>engendré par</u> les $P_1, \dots, P_k$ <u>en</u> x.

Si $\mathfrak{I} \subset \mathcal{O}$ est un faisceau cohérent d'idéaux sur X, nous dirons qu'un polynôme homogène P <u>appartient</u> à $\mathfrak{I}$ sur X si P appartient à $\mathfrak{I}_x$ pour tout $x \in X$.

<u>Proposition 8. Pour qu'un polynôme homogène</u> P, <u>de degré</u> n, <u>appartienne au faisceau cohérent d'idéaux</u> $\mathfrak{I}$ <u>sur</u> X, <u>il faut et il suffit que</u> P <u>soit une section de</u> $\mathfrak{I}(n)$.

Tout d'abord, puisque $\mathfrak{I} \subset \mathcal{O}$, on a $\mathfrak{I}(n) \subset \mathcal{O}(n)$; or l'on sait qu'une section de $\mathcal{O}(n)$ n'est pas autre chose qu'un polynôme homogène de degré n en $z_0, \dots, z_r$; de façon plus précise, un polynôme homogène P de degré n définit sur chaque U_i une fonction holomorphe $f_i = P/z_i^n$, avec $f_j = (z_i/z_j)^n \cdot f_i$, c'est-à-dire une section de $\mathcal{O}(n)$, et l'on obtient ainsi toutes les sections de $\mathcal{O}(n)$.

Donc les sections de $\mathfrak{I}(n)$ peuvent s'identifier aux sections de $\mathcal{O}(n)$ qui appartiennent à $\mathfrak{I}(n)_x$ pour tout $x \in X$, c'est-à-dire aux polynômes P, homogènes de degré n, tels que $P/z_i^n \in \mathfrak{I}_x$ pour tout $x \in U_i$, ce qui signifie bien que P appartient à $\mathfrak{I}$, au sens défini plus haut .

<u>Proposition 9. Tout faisceau cohérent d'idéaux sur l'espace projectif</u> X <u>est engendré par les polynômes homogènes qui lui appartiennent</u>.

Soit $\mathfrak{I}$ le faisceau d'idéaux en question; d'après le Th. A, il existe un n tel que $H^0(X, \mathfrak{I}(n))$ engendre $\mathfrak{I}(n)_x$ pour tout $x \in X$. D'après ce qui precède, on peut identifier tout élément de $H^0(X, \mathfrak{I}(n))$ à un polynôme homogène P, de degré n, appartenant à $\mathfrak{I}$ sur X. Soit $P_1, \dots, P_k$ une base de l'espace vectoriel de ces polynômes. Si $x \in U_i$, dire que $H^0(X, \mathfrak{I}(n))$ engendre $\mathfrak{I}_x$ équivaut à dire que $P_1/z_i^n, \dots, P_k/z_i^n$ engendrent $\mathfrak{I}_x$, donc $\mathfrak{I}$ est bien engendré par les $P_1, \dots, P_k$, au sens défini plus haut, cqfd.

<u>Corollaire</u> (théorème de Chow). <u>Tout sous-ensemble analytique de</u> X <u>est algébrique</u>.

Soit V ce sous-ensemble, $\mathcal{I}(V)$ le faisceau d'idéaux qu'il définit (et qui est cohérent, d'après un théorème de H. Cartan — cf. Séminaire 51-52, Exposé 16). D'après la Proposition 9, $\mathcal{I}(V)$ est engendré par des polynômes $P_1, \ldots, P_k$, ce qui entraîne évidemment que V est le lieu des zéros de ces polynômes, cqfd.