J-P. SERRE

Faisceaux analytiques sur l'espace projectif

Séminaire Henri Cartan, tome 6 (1953-1954), exp. n° 18, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1953-1954__6__A18_0>

FAISCEAUX ANALYTIQUES SUR L'ESPACE PROJECTIF

(Exposé de J-P. Serre, 10-5-54)

§1. La d''-cohomologie

1. Un lemme.

LEMME 1. *Soit $f(z)$ une fonction différentiable dans le disque $|z| < R$. Si $R' < R$, il existe une fonction différentiable g telle que*

$$\partial g/\partial \bar{z} = f, \quad \text{dans le disque } |z| < R' .$$

Si f est en outre fonction différentiable, ou analytique, de paramètres λ_i, on peut choisir pour g une fonction différentiable, ou analytique, de ces paramètres.

Soit φ une fonction différentiable, égale à 1 pour $|z| \leq R'+\varepsilon$, à 0 pour $|z| \geq R - \varepsilon$, ε étant assez petit. La fonction $f\varphi$ est à support compact. On peut donc en faire le produit de composition avec la fonction $1/\pi z$, qui est localement sommable. Soit

$$g = \frac{1}{\pi z} * (f\varphi) ,$$

ce produit de composition, qui est une fonction différentiable sur $\mathbf{C}$. Si l'on considère $1/\pi z$ comme une distribution, on a:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{\pi z} \right) = \delta,$$ mesure de Dirac à l'origine (cf. Schwartz, Distributions, (II, 3;28)) .

D'où $\partial g/\partial \bar{z} = f\varphi$, qui est égal à f pour $|z| < R'$.

En outre, la continuité du produit de composition montre que si f dépend différentiablement, ou analytiquement, de paramètres, il en est de même de g.

Note. Un résultat tout analogue vaut pour les distributions: on remplace f par une distribution sur le produit direct de $|z| < R$ par l'espace des paramètres, et l'on fait un produit de composition avec

$\frac{1}{\pi z} \times \delta_\lambda$, δ_λ désignant la mesure de Dirac de l'espace des paramètres.

2. La d"-cohomologie locale.

On sait (cf. Séminaire 1951-1952, exposé 1) que sur toute variété analytique complexe, on a la notion de forme différentielle de type (p, q): c'est une forme dont l'expression au moyen de coordonnées locales complexes z_i fait intervenir p différentielles dz_i et q différentielles $d\bar{z}_j$. Si ω est de type (p, q), $d\omega$ est somme d'une forme de type $(p+1, q)$ et d'une forme de type $(p, q+1)$, que l'on note respectivement $d'\omega$ et $d''\omega$. On peut aussi définir d'' comme la différentiation par rapport aux coordonnées $\bar{z}_i$.

On observera que $d''\circ d'' = 0$, autrement dit que d'' peut être considéré comme un opérateur de cobord.

PROPOSITION 1. *Dans l'espace C^k, considérons le polycylindre D (resp. D') défini par les inégalités $|z_1| < R_1, \ldots, |z_k| < R_k$ (resp. $|z_1| < R'_1, \ldots, |z_k| < R'_k$, avec $|R'_i| < R_i$ pour tout i).*

Soit ω une forme différentielle, différentiable sur D, de type (p, q) avec $q \geq 1$, et telle que $d''\omega = 0$. Il existe alors une forme différentielle, différentiable sur D, de type $(p, q-1)$, soit α, telle que $\omega = d''\alpha$ sur D'.

Nous montrerons, par récurrence sur i, la proposition suivante qui coïncide avec la Proposition 1 pour $i = k$: (A_i) Soit ω une forme différentielle de type (p, q), $q \geq 1$, vérifiant les conditions suivantes:

a) $d''\omega = 0$ pour $|z_j| < R_j$ $(j \leq i)$ et $|z_j| < R'_j$ $(j > i)$,

b) ω ne contient pas $d\bar{z}_{i+1}, \ldots, d\bar{z}_k$ (pour les valeurs ci-dessus des z_i).

Il existe alors α telle que $d''\alpha = \omega$ sur D'.

Pour $i = 0$, l'hypothèse b) entraîne $\omega = 0$, puisque $q \geq 1$. Donc (A_0) est vraie.

Montrons que $(A_{i-1}) \Longrightarrow (A_i)$:

Ecrivons ω sous la forme $\omega = d\bar{z}_i \wedge \beta + \gamma$, où β et γ ne contiennent pas $d\bar{z}_i, \ldots, d\bar{z}_k$. Si f désigne l'un des coefficients de β, on peut, d'après le Lemme 1, trouver une fonction g telle que $\partial g/\partial \bar{z}_i = f$ pour $|z_j| < R_j$ $(j \leq i-1)$, $|z_j| < R'_j$ $(j > i-1)$. En outre, les conditions a) et b) entraînent évidemment que les coefficients de ω, donc de β et γ, sont des fonctions holomorphes de $z_{i+1}, \ldots, z_k$; on pourra donc prendre pour g une fonction holomorphe de ces mêmes variables. Au moyen des fonctions g, on construit de façon évidente une forme ω_1 telle que:

$$d''\omega_1 = d\bar{z}_i \wedge \beta + \gamma', \quad \text{pour} \quad |z_j| < R_j \quad (j < i), \quad |z_j| < R'_j \quad (j \geq i),$$

où γ' ne contient pas $d\bar{z}_i, \ldots, d\bar{z}_k$ (pour les valeurs ci-dessus des z_i).

On a donc $\omega = d''\omega_1 + (\gamma - \gamma')$, et, en appliquant (A_{i-1}) à la forme $\gamma - \gamma'$, on obtient le résultat chercé.

COROLLAIRE. Toute forme différentielle de type (p, q), qui est d"-fermée, est localement un d"-cobord si $q \geq 1$.

Remarques.

1) La Proposition 1 et son corollaire sont également valables pour les courants de type (p, q), c'est-à-dire pour les formes différentielles à coefficients distributions. La démonstration est la même.

2) Les résultats précédents sont dûs à Grothendieck (non publié). On en trouvera une démonstration un peu différente dans une note de Dolbeault (C-R, 236 (1953), p. 175-177)).

3. Un théorème de Dolbeault.

Soit X une variété analytique complexe, de dimension complexe égale à k. Nous désignerons par $\mathcal{A}^{p,q}$ le faisceau des germes de formes de type (p, q) sur X. L'opération d" étant de caractère local définit un homomorphisme de $\mathcal{A}^{p,q}$ dans $\mathcal{A}^{p,q+1}$.

Soit d'autre part Ω^p le faisceau des germes de formes holomorphes de degré p sur X; Ω^p est un sous-faisceau de $\mathcal{A}^{p,0}$.

PROPOSITION 2. <u>La suite d'homomorphismes de faisceaux</u>:

$$0 \to \Omega^p \to \mathcal{A}^{p,0} \xrightarrow{d''} \mathcal{A}^{p,1} \xrightarrow{d''} \cdots \to \mathcal{A}^{p,k} \to 0 .$$

<u>est une suite exacte</u>.

Cela résulte du corollaire à la Proposition 1 et du fait évident que les formes de type (p, o) qui sont d"-fermées sont holomorphes.

Soit maintenant $A^{p,q}$ l'espace vectoriel des formes de type (p, q) définies sur X tout entier (autrement dit, $A^{p,q} = H^0(X, \mathcal{A}^{p,q})$); l'opération d" applique $A^{p,q}$ dans $A^{p,q+1}$, et $d''\circ d'' = 0$. Si l'on désigne par A la somme directe des $A^{p,q}$, on voit que A est un complexe bigradué, l'opérateur cobord étant homogène et de bidegré égal à (o, 1). Nous désignerons le groupe de cohomologie de bidegré (p, q) de A par $H^{p,q}(A)$.

Puisque les $\mathcal{A}^{p,q}$ sont des faisceaux fins, on peut appliquer à la suite exacte de la Proposition 2 un résultat élémentaire de théorie des faisceaux (cf. Exp. 17, Prop.1), et l'on obtient ainsi (Dolbeault, loc.cit.):

PROPOSITION 3. $H^q(X, \Omega^p)$ <u>est isomorphe à</u> $H^{p,q}(A)$.

Bien entendu, un résultat analogue vaut pour la cohomologie à supports dans une "famille Φ" et pour les formes différentielles à coefficients distributions; on peut également considérer des formes à coefficients dans un espace fibré analytique à fibres vectorielles.

4. <u>Applications</u>.

La Proposition 3 a de nombreuses applications. Par exemple, si X est une variété de Stein, on sait que $H^q(X, \Omega^p) = 0$ pour $q \geq 1$, puisque Ω^p est un faisceau analytique cohérent; donc $H^{p,q}(A) = 0$. Autrement dit:

<u>Sur une variété de Stein, toute forme de type</u> (p, q), $q \geq 1$, <u>qui est</u> d"-<u>fermée, est un</u> d"-<u>cobord</u>.

En particulier, on voit que l'on peut améliorer la Proposition 1 en prenant $R'_i = R_i$ pour tout i. A vrai dire, il serait facile d'obtenir cette amélioration sans passer par la théorie des variétés de Stein: il suffirait de faire un "passage à la limite," analogue à celui utilisé dans la démonstration des théorèmes du type Mittag-Leffler.

Mais les applications les plus intéressantes de la Proposition 3 concernent les variétés <u>kählériennes</u> compactes. On sait en effet (cf. Séminaire 1951-1952, Exposé 1) que, sur une telle variété, $H^{p,q}(A)$ est isomorphe à l'espace vectoriel des <u>formes harmoniques de type</u> (p, q). Il en résulte en particulier que $H^{p,q}(A)$ est symétrique en p et q; par exemple, $H^q(X, \mathcal{O}) = H^{0,q}(A)$ est isomorphe à $H^{q,0}(A) = H^0(X, \Omega^q)$, espace des formes holomorphes de degré q (nous avons noté $\mathcal{O}$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur X, identifié au faisceau Ω^0 des germes de formes holomorphes de degré 0). Si X est l'espace projectif complexe de dimension k, il est immédiat que toute forme différentielle holomorphe sur X, de degré ≥ 1, est identiquement nulle (passer à l'espace vectoriel dont X est un quotient, par exemple). D'où le résultat suivant, qui sera utilisé plus loin:

$H^q(X, \mathcal{O}) = 0$ <u>pour</u> $q \geq 1$, <u>si</u> X <u>est un espace projectif</u>.

§2. Les théorèmes fondamentaux

5. Le faisceau $\mathcal{O}(n)$.

Soit k un entier ≥ 0, et soit Y le complémentaire de l'origine dans l'espace C^{k+1}. Le quotient X de Y par la relation d'équivalence définie dans Y par les homothéties est l'espace projectif complexe $P_k(C)$. Nous noterons π la projection: $Y \to X$; si U est une partie de X, on posera $D_U = \pi^{-1}(U)$; par exemple, si $x \in X$, D_x est une droite (privée de l'origine).

Sur C^{k+1}, les fonctions coordonnées seront notées $z_0, \ldots, z_k$. Pour $0 \leq i \leq k$, l'ensemble V_i des points de C^{k+1} où $z_i \neq 0$ est un ouvert contenu dans Y; soit $U_i = \pi(V_i) \subset X$. L'ensemble des points de Y où $z_i = 1$, soit W_i, est un espace affine, analytiquement isomorphe à C^k, et π est un isomorphisme de W_i sur U_i. En particulier, les U_i sont des variétés de Stein, et nous avons ainsi défini un recouvrement $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ de X par des variétés de Stein, qui est de dimension k (puisqu'il est formé de $k+1$ ouverts d'intersection non vide). Appliquant alors un théorème de Leray (cf. Exposé 17), on obtient:

PROPOSITION 4. Pour tout faisceau analytique cohérent $\mathfrak{F}$ sur X, on a $H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) = H^q(X, \mathfrak{F})$ pour tout q.

COROLLAIRE. $H^q(X, \mathfrak{F}) = 0$ pour $q > k$.

Note. La même démonstration montre que $H^q(X, \mathfrak{F}) = 0$ pour $q > \dim X$, si X est une variété projective; j'ignore si ce résultat s'étend à toute variété analytique complexe.

Nous allons maintenant définir un faisceau qui jouera dans la suite un rôle important. Soit n un entier (positif ou négatif), et soit U un ouvert de X. Nous désignerons par $\mathcal{O}(n)_U$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur D_U qui sont homogènes de degré n, c'est-à-dire qui vérifient l'identité:

$$f(tz_0, \dots, tz_k) = t^n f(z_0, \dots, z_k) \quad \text{pour} \quad t \in \mathbf{C}^*, \quad (z_0, \dots, z_k) \in D_U.$$

L'ensemble $\mathcal{O}(n)_U$ est un espace vectoriel complexe. Si $V \subset U$, la restriction à V d'un élément f de $\mathcal{O}(n)_U$ est un élément de $\mathcal{O}(n)_V$, d'où un homomorphisme $\mathcal{O}(n)_U \to \mathcal{O}(n)_V$ vérifiant une condition de transitivité évidente. Pour n fixé, les $\mathcal{O}(n)_U$ définissent donc un faisceau, que nous noterons $\mathcal{O}(n)$. Pour $x \in X$, un élément de $\mathcal{O}(n)_x$ peut être identifié à une fonction holomorphe au voisinage de D_x, homogène de degré n. Il est clair que $\mathcal{O}(n)_U$ est identique à l'espace des sections de $\mathcal{O}(n)$ sur U.

Lorsque $n = 0$, un élément de $\mathcal{O}(n)_U$ correspond biunivoquement à une fonction holomorphe sur U; autrement dit, le faisceau $\mathcal{O}(0)$ est isomorphe au faisceau $\mathcal{O}$ des germes de fonctions holomorphes sur X.

Si $f \in \mathcal{O}(n)_U$ et $g \in \mathcal{O}(m)_U$, on a $f \cdot g \in \mathcal{O}(n+m)_U$; en particulier, pour $m = 0$, on voit que $\mathcal{O}(n)_U$ est un module sur $\mathcal{O}(0)_U$, autrement dit que $\mathcal{O}(n)$ est un faisceau analytique sur X.

Nous allons préciser ce résultat: notons ${}^i\mathcal{O}$ la restriction du faisceau $\mathcal{O}$ à l'ouvert U_i, et θ_i: ${}^i\mathcal{O} \to \mathcal{O}(n)$ l'homomorphisme de faisceaux défini par la multiplication par z_i^n (multiplication qui transforme bien une fonction homogène de degré 0 en une fonction homogène de degré n). Il est clair que θ_i est <u>un isomorphisme de</u> ${}^i\mathcal{O}$ <u>sur la restriction de</u> $\mathcal{O}(n)$ à U_i; d'autre part, sur $U_i \cap U_j$, $\theta_j^{-1} \circ \theta_i = \mu_{ij}$ est égal à la multiplication par $(z_i/z_j)^n$ (c'est bien un automorphisme de $\mathcal{O}$, puisque z_i/z_j est holomorphe inversible sur $U_i \cap U_j$). Donc:

<u>Le faisceau</u> $\mathcal{O}(n)$ <u>peut être défini à partir des faisceaux</u> ${}^i\mathcal{O}$ <u>par recollement au moyen des isomorphismes</u> μ_{ij}: ${}^i\mathcal{O} \to {}^j\mathcal{O}$. (Pour la notion de recollement de faisceaux, cf. Séminaire 51-52, Exposé 20, No. 13).

On peut également identifier $\mathcal{O}(n)$ au faisceau des germes de sections holomorphes du fibré à fibre vectorielle de dimension 1, défini par les changements de cartes $(z_i/z_j)^n$ (cf. Exposé 17). Bien entendu, ces diverses définitions montrent que $\mathcal{O}(n)$ est <u>cohérent</u>.

Déterminons enfin les sections de $\mathcal{O}(n)$ sur X tout entier, en nous bornant au cas $k \geq 1$; une telle section est une fonction holomorphe sur Y, et homogène de degré n; son développement de Laurent montre que c'est <u>un polynôme homogène de degré</u> n <u>en</u> $z_0, \ldots, z_k$.

6. <u>Les faisceaux</u> $\mathfrak{F}(n)$.

Soit $\mathfrak{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X, et soit ${}^i\mathfrak{F}$ la restriction de $\mathfrak{F}$ à U_i. La multiplication par $(z_i/z_j)^n$ est évidemment un isomorphisme μ_{ij}: ${}^i\mathfrak{F} \to {}^j\mathfrak{F}$ au-dessus de $U_i \cap U_j$.

<u>Nous noterons</u> $\mathfrak{F}(n)$ <u>le faisceau obtenu à partir des faisceaux</u> ${}^i\mathfrak{F}$ <u>par recollement au moyen des isomorphismes</u> μ_{ij}.

Le faisceau $\mathfrak{F}(n)$ est donc isomorphe à $\mathfrak{F}$ au-dessus de chaque U_i, et c'est en particulier un faisceau analytique <u>cohérent</u>. Pour $\mathfrak{F} = \mathcal{O}$, on retrouve évidemment le faisceau $\mathcal{O}(n)$ défini plus haut. Vu la définition de $\mathfrak{F}(n)$, une section de $\mathfrak{F}(n)$ au-dessus d'un ouvert $U \subset X$ peut être identifiée à un système de k+1 sections $s_0, \ldots, s_k$, s_i étant une section de $\mathfrak{F}$ au-dessus de $U \cap U_i$, qui vérifient les relations: $s_j = (z_i/z_j)^n \cdot s_i$ au-dessus de $U \cap U_i \cap U_j$.

On peut donner une caractérisation commode de $\mathcal{F}(n)$ au moyen de la notion de *produit tensoriel* de deux faisceaux analytiques: soient d'abord $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux faisceaux analytiques, et posons, pour tout $x \in X$, $\mathcal{H}_x = \mathcal{F}_x \otimes \mathcal{G}_x$, le produit tensoriel étant pris *sur l'anneau* $\mathcal{O}_x$. Si $\mathcal{H}$ désigne la collection des $\mathcal{H}_x$, on montre facilement qu'il existe une structure de faisceau analytique sur $\mathcal{H}$ et un seule, telle que, si $x \to s(x)$ et $x \to t(x)$ sont des sections de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{G}$ respectivement sur un ouvert $U \subset X$, l'application $x \to s(x) \otimes t(x) \in \mathcal{H}_x$ soit une section de $\mathcal{H}$ sur U. Le faisceau $\mathcal{H}$ est appelé *produit tensoriel* des faisceaux $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, et noté $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{G}$, ou simplement $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$; il jouit de toutes les propriétés du produit tensoriel usuel. Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont cohérents, $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{G}$ est cohérent. (Pour plus de détails sur cette opération, cf. J-P. Serre, *Un Théorème de Dualité*, Com. Math. Helv.).

PROPOSITION 5. $\mathcal{F}(n)$ *est canoniquement isomorphe à* $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(n)$.

Sur chaque U_i, on a un isomorphisme canonique α_i: ${}^i\mathcal{F} \to {}^i\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} {}^i\mathcal{O}$, et il est clair que $\mu_{ij} \circ \alpha_i = \alpha_j \circ \mu_{ij}$, d'où la proposition.

Signalons également une propriété de l'opération $\mathcal{F}(n)$ qui résulte immédiatement de la définition (ou bien de la Prop. 5):

PROPOSITION 6. *Si* $\mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ *est une suite exacte de faisceaux analytiques cohérents* (les homomorphismes étant analytiques), *la suite* $\mathcal{A}(n) \to \mathcal{B}(n) \to \mathcal{C}(n)$ *est exacte pour tout* $n \in Z$.

7. Enoncé des théorèmes fondamentaux.

Voici les théorèmes qui, dans le cas de l'espace projectif, jouent le même rôle que les théorèmes A et B de la théorie des variétés de Stein:

Soit $\mathcal{F}$ *un faisceau analytique cohérent sur l'espace projectif* X. *Il existe un entier* $n_0(\mathcal{F})$ *tel que, pour tout* $n \geq n_0(\mathcal{F})$, *on ait*:

Théorème A. $H^0(X, \mathcal{F}(n))$ *engendre* $\mathcal{F}(n)_x$, *considéré comme* $\mathcal{O}_x$*-module, pour tout* $x \in X$.

Théorème B. $H^q(X, \mathcal{F}(n)) = 0$ *pour tout* $q \geq 1$.

La démonstration sera donnée dans l'exposé suivant. Nous allons nous borner ici à démontrer un résultat préliminaire:

PROPOSITION 7. $H^q(X, \mathcal{O}(n)) = 0$ pour $q \geq 1$ et $n \geq 0$.

Nous raisonnerons par récurrence sur $k = \dim X$, le théorème étant trivial pour $k = 0$. Supposons-le démontré pour $k-1$, et démontrons-le pour k. Nous raisonnerons alors par récurrence sur n; pour $n = 0$, on a $\mathcal{O}(0) = \mathcal{O}$, cas qui a été traité au No. 4; supposons-le démontré pour $n-1$, et démontrons-le pour n.

Soit H l'hyperplan de C^{k+1} défini par l'équation $z_0 = 0$, et soit $E = \pi(H - \{0\})$ l'image de $H \cap Y$ dans X, qui est un hyperplan projectif de X, donc qui peut être considéré comme un espace projectif de dimension $k-1$. On peut définir sur E un faisceau analogue au faisceau $\mathcal{O}(n)$ de X, faisceau que nous noterons $\mathcal{O}_E(n)$; si W est un ouvert de E, une section de $\mathcal{O}_E(n)$ sur W est une fonction holomorphe de $z_1, \ldots, z_k$ sur D_W, qui est homogène de degré n. Nous noterons $\mathcal{O}_E(n)'$ le faisceau <u>sur</u> X qui coïncide avec $\mathcal{O}_E(n)$ sur E, et est nul sur le complémentaire U_0 de E (cf. Séminaire 50-51, Exposé 17). Soit ρ: $\mathcal{O}(n) \to \mathcal{O}_E(n)'$ l'homomorphisme de faisceaux qui fait correspondre à une fonction holomorphe homogène de degré n sa restriction à $H \cap Y$. Soit d'autre part σ: $\mathcal{O}(n-1) \to \mathcal{O}(n)$ l'homomorphisme de faisceaux qui fait correspondre à une fonction holomorphe homogène de degré $n-1$ son produit par la fonction z_0.

LEMME 2. <u>La suite d'homomorphismes de faisceaux:</u>

$$0 \to \mathcal{O}(n-1) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{O}(n) \xrightarrow{\rho} \mathcal{O}_E(n)' \longrightarrow 0,$$

<u>est une suite exacte</u>.

Il est évident que σ est injectif, et que $\rho \circ \sigma = 0$. Si $f \in \mathcal{O}_E(n)'_x$, on peut considérer f comme une fonction f' de $z_0, \ldots, z_k$, indépendante de z_0, et $\rho(f') = f$, ce qui montre que ρ est surjectif. Enfin, si $\rho(f) = 0$, $f \in \mathcal{O}(n)_x$, cela signifie que f s'annule sur H, donc est divisible par z_0, et le quotient sera un élément $g \in \mathcal{O}(n-1)_x$

tel que $\sigma(g) = f$, ce qui achève de prouver le lemme.

Appliquant la suite exacte de cohomologie, on obtient alors la suite exacte:

$$H^q(X, \mathcal{O}(n-1)) \to H^q(X, \mathcal{O}(n)) \to H^q(E, \mathcal{O}_E(n)),$$

puisque l'on sait que $H^q(X, \mathcal{O}_E(n)') = H^q(E, \mathcal{O}_E(n))$, cf. Séminaire 50-51, loc. cit.

Or $H^q(X, \mathcal{O}(n-1)) = 0$ d'après l'hypothèse de récurrence sur n, et $H^q(E, \mathcal{O}_E(n)) = 0$ d'après l'hypothèse de récurrence sur k. D'où $H^q(X, \mathcal{O}(n)) = 0$, cqfd.

Remarques.

1) Il serait facile de calculer complètement les $H^q(X, \mathcal{O}(n))$ ($n \geq 0$ ou < 0) par la méthode précédente. On trouve $H^q(X, \mathcal{O}(n)) = 0$ pour $q \neq 0$ et $\neq k$, $\dim H^0(X, \mathcal{O}(n)) = \binom{n+k}{k}$, et $\dim H^k(X, \mathcal{O}(n)) = \binom{-n-1}{k}$.

2) On peut obtenir les résultats précédents par une méthode directe, utilisant la Proposition 4 (Frenkel, non publié).

La Proposition 7 a la conséquence suivante:

COROLLAIRE. *Le théorème B est vrai pour tout faisceau $\mathfrak{F}$ isomorphe à une somme directe d'un nombre fini de faisceau $\mathcal{O}(m)$.*

On se ramène d'abord au cas d'*un seul* faisceau $\mathcal{O}(m)$, en utilisant le fait que l'opération $\mathfrak{F}(n)$ commute à la somme directe (et que les groupes de cohomologie d'une somme directe de faisceaux sont isomorphes à la somme directe des groupes de cohomologie de chaque facteur). Ensuite, on remarque que $\mathcal{O}(m)(n)$ est isomorphe à $\mathcal{O}(m+n)$, donc a des groupes de cohomologie nuls pour $n \geq -m$.

(De façon générale, $\mathfrak{F}(m)(n)$ est isomorphe à $\mathfrak{F}(m+n)$.)