Séminaire Henri Cartan

H. Cartan

Un théorème d'immersion

Séminaire Henri Cartan, tome 6 (1953-1954), exp. n° 15, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1953-1954__6__A15_0>

UN THÉORÈME D'IMMERSION

(Exposé de H. Cartan, 5-4-1954)

§1. Position du problème

X désigne, comme dans l'exposé 1, un domaine borné de l'espace numérique complexe C^s, et G un groupe discret d'automorphismes analytiques de X. Alors les conditions (I) et (II) de l'exposé 12 sont satisfaites (cf. Exp. 1, §2). Soit Y l'espace-quotient X/G. D'après 12, l'espace Y porte une structure d'espace analytique normal (de dimension s), définie par le faisceau $\mathfrak{F}$ que voici: si $y \in Y$, et si $x \in X$ a pour image y, l'application canonique $p: X \rightarrow Y$ définit un isomorphisme de l'anneau $\mathfrak{F}_y$ sur l'anneau des germes holomorphes au point x et invariants par le groupe d'isotropie G(x), groupe qui est fini.

D'une façon plus précise, voici ce qu'on a démontré au théorème 5 de l'Exposé 12: soit $x_0 \in X$, et $y_0 = p(x_0) \in Y$. Choisissons, au point x_0, des coordonnées locales de manière que le groupe $G(x_0)$ soit linéaire. Soit (Q_i) $1 \leq i \leq p$ un système fini de polynômes homogènes (par rapport à ces coordonnées locales) qui soient invariants par $G(x_0)$ et engendrent l'anneau de tous les polynômes $G(x_0)$-invariants. Soit (f_i) un système de fonctions holomorphes au point x_0, invariantes par $G(x_0)$, tel que $f_i - Q_i$ soit d'ordre $> d_i$ au point x_0 (on note d_i le degré de Q_i). Alors, dans un voisinage ouvert U assez petit de x_0 (stable pour $G(x_0)$), l'application

$$x \rightarrow (f_i(x)) \qquad (1 \leq i \leq p) \tag{1}$$

définit, par passage au quotient, un isomorphisme de $V = p(U)$ sur un sous-ensemble analytique normal dans un voisinage de l'origine de C^p.

Supposons maintenant que l'espace-quotient $X/G = Y$ soit compact. Avec cette hypothèse, on se propose de définir un plongement global de Y comme <u>sous-ensemble</u> <u>algébrique</u> <u>normal</u> dans un espace projectif convenable. Ce plongement s'effectuera au moyen de <u>séries</u> <u>de</u> <u>Poincaré</u> d'un même poids (voir ci-dessous, le théorème énoncé au §3).

§2. Rappel de résultats antérieurs.

Dans les hypothèses précédentes (et sans qu'il soit besoin encore de supposer X/G compact), on note $J_g(x)$ la valeur, au point $x \in X$, du jacobien (au sens analytique-complexe) de la transformation $x \to g \cdot x$ (pour $g \in G$), cette transformation étant rapportée aux coordonnées de l'espace ambiant C^s. Pour tout entier $m \geq 2$, soit L_m l'espace vectoriel des séries de Poincaré

$$\sum_{g \in G} \varphi(g \cdot x)(J_g(x))^m \quad ,$$

où $\varphi(x)$ est un <u>polynôme</u> (cf. Exposé 1, §3).

Pour chaque point $x_0 \in X$, on notera, comme dans l'Exposé 1, $k(x_0)$ le plus petit des entiers $k \geq 1$ tels que $(J_g(x_0))^k = 1$ pour tout $g \in G(x_0)$. <u>Si</u> x <u>est assez voisin de</u> x_0, <u>l'entier</u> $k(x)$ <u>divise</u> $k(x_0)$; en effet, $G(x)$ est un sous-groupe de $G(x_0)$ pour x assez voisin de x_0; de plus, on va montrer que $J_g(x) = J_g(x_0)$ si $g \in G(x)$, ce qui entraînera $(J_g(x))^k(x_0) = 1$, et prouvera bien que $k(x)$ divise $k(x_0)$. Pour voir cela, on fait un choix des coordonnées locales au voisinage de x_0, tel que $G(x_0)$ opèra linéairement (ce qui est possible d'après l'Exposé 12, Lemme 1); le changement de coordonnées locales ne change pas le jacobien $J_g(x)$ si $g \in G(x)$. Mais puisque g est linéaire, la valeur de son jacobien est la même en x_0 qu'en x. C.Q.F.D.

Nous aurons à utiliser les deux lemmes suivants, qui sont deux cas particuliers du Théorème 5 de l'Exposé 1:

<u>Lemme 1</u>. Soient x_0 et x_1 deux points non congrus modulo G. Pour tout entier m assez grand et multiple de $k(x_0)$ et de $k(x_1)$, il existe une $f \in L_m$ telle que $f(x_0) = 1$, $f(x_1) = 0$.

Lemme 2. Soit $x_0 \in X$, et soit d un entier ≥ 0. Il existe un entier $m(d, x_0)$ jouissant de la propriété suivante: pour tout entier m, multiple de $k(x_0)$ et $\geq m(d, x_0)$, et pour toute h holomorphe au voisinage de x_0 et satisfaisant à

$$h(g \cdot x)(J_g(x))^m = h(x) \text{ quel que soit } g \in G(x_0) , \tag{2}$$

il existe une $f \in L_m$ telle que la différence $f - h$ soit d'ordre $> d$ au point x_0.

§3. Le théorème d'immersion

L'espace-quotient $Y = X/G$ sera désormais supposé compact. On notera k le p.p.c.m. des entiers $k(x_0)$ attachés à tous les points $x_0 \in X$.

Soit **A** l'anneau gradué engendré par les espaces vectoriels L_m ($m \geq 2$), et soit A_m l'espace vectoriel des éléments de degré m de A. Les éléments de A_m sont des formes automorphes de poids m. Or l'espace D_m des formes automorphes de poids m est de dimension finie, puisque Y est compact (cf. Exposé 2, Th. 3). Ainsi A_m est un espace vectoriel de dimension finie, dimension qu'on notera a_m.

On se propose de prouver le théorème suivant:

Théorème. Pour tout entier m assez grand et multiple de k, les propriétés suivantes ont lieu:

(i) pour tout $x \in X$ existe une $f \in A_m$ telle que $f(x) \neq 0$.

(N.B: cette condition entraîne ce qui suit: le choix d'une base de l'espace vectoriel A_m définit une application analytique de X dans l'espace projectif P_{a_m-1}. D'ailleurs, eu égard aux propriétés des formes automorphes de poids m, cette application passe au quotient suivant G, et définit donc une application analytique F_m: $Y \to P_{a_m-1}$).

(ii) l'application F_m définie ci-dessus est un isomorphisme de l'espace analytique normal Y sur un sous-ensemble algébrique de P_{a_m-1}, normal en chacun de ses points.

Toute la fin de cet exposé est consacrée à la démonstration de ce théorème. On va d'abord prouver (i) sous une forme renforcée:

Proposition 1. Il existe un recouvrement ouvert fini $\mathfrak{R}$ de Y, jouissant de la propriété suivante: pour tout multiple m de k, assez grand, et tout ensemble V du recouvrement $\mathfrak{R}$, il existe une $f \in A_m$ qui ne s'annule en aucun point de l'image réciproque $p^{-1}(V)$.

Démonstration: appliquons le Lemme 1. Pour chaque point $x \in X$ il existe $h \in L_m$ telle que $h(x) = 1$, tout au moins si m est un multiple de $k(x)$ plus grand qu'un entier convenable (dépendant a priori du point x). Ceci vaut donc pour tout multiple m de k, plus grand qu'un entier dépendant du point x. A chaque x associons deux multiples consécutifs de k, soient $m'(x)$ et $m''(x) = m'(x) + k$; et soient $h'_x \in L_{m'(x)}$ et $h''_x \in L_{m''(x)}$ telles que $h'_x(x) = h''_x(x) = 1$. Alors h'_x et h''_x sont $\neq 0$ dans un voisinage ouvert de x, et aussi dans tous ses transformés par le groupe G. D'où, dans l'espace-quotient Y, un ouvert $V(x)$ tel que son image réciproque dans X contienne x, et que h'_x et h''_x soient $\neq 0$ dans cette image réciproque. Puisque Y est compact, il existe une famille finie de points $x_i \in X$ tels que les ouverts $V(x_i)$ recouvrent Y. Je dis que ces ouverts $V(x_i)$ constituent un recouvrement jouissant de la propriété de l'énoncé.

En effet, soit m un multiple de k, au moins égal à tous les produits $m'(x_i)(1 + m'(x_i)/k)$. Pour chaque i, il existe des entiers positifs a'_i et a''_i tels que $m = a'_i m'(x_i) + a''_i m''(x_i)$ (vérification élé-- mentaire: c'est une question de division euclidienne). Pour chaque i, la fonction

$$(h'_{x_i})^{a'_i}(h''_{x_i})^{a''_i}$$

appartient à A_m, et elle est $\neq 0$ en tout point de l'image réciproque $p^{-1}(V(x_i))$. Ceci démontre la Proposition 1.

§4. Démonstration du théorème d'immersion (Suite).

On va maintenant prouver:

Proposition 2. Il existe un recouvrement ouvert fini $\mathfrak{R}'$ de Y, plus fin que $\mathfrak{R}$ (cf. Prop. 1), et jouissant de la propriété suivante: pour tout multiple m de k, assez grand, l'application $Y \to P_{a_m-1}$, définie par le choix d'une base de A_m, définit, dans chaque ouvert $V \in \mathfrak{R}'$, un isomorphisme de V sur un sous-ensemble analytique normal d'un ouvert de P_{a_m-1}.

Démonstration: plaçons-nous en un point $x_0 \in X$, et choisissons des coordonnées locales telles que le groupe d'isotropie $G(x_0)$ soit linéaire. Soit (Q_i), $1 \leq i \leq p$, un système fini de polynômes homogènes invariants par $G(x_0)$, et engendrant l'anneau de tous les polynômes $G(x_0)$-invariants. Soit d_i le degré de Q_i. Choisissons, pour un multiple m assez grand de k, une $g \in L_m$ qui soit égale à un au point x_0 (cf. Lemme 1). Si m a été choisi assez grand, on peut, d'après le Lemme 2, choisir pour chaque produit gQ_i une $f_i \in L_m$ telle que $f_i - gQ_i$ soit d'ordre $> d_i$ au point x_0. Alors $(f_i/g) - Q_i$ est d'ordre $> d_i$ au point x_0; par suite, d'après le Théorème 5 de l'Exposé 12 rappelé au début du présent exposé, l'application $x \to (f_i(x)/g(x))$ définit, par passage au quotient suivant le groupe G, un isomorphisme d'un voisinage ouvert V de $p(x_0) \in Y$, sur un sous-ensemble analytique normal d'un voisinage ouvert de l'origine de C^p.

Ceci peut être fait pour chaque point $x_0 \in X$. En vertu de la compacité de Y, on peut trouver un recouvrement ouvert fini $\mathfrak{R}'$ de Y (qu'on peut choisir plus fin que le recouvrement $\mathfrak{R}$ de la Prop. 1), jouissant de la propriété suivante: pour chaque ouvert $V \in \mathfrak{R}'$, il existe un entier $m(V)$, multiple de k, et un système fini $(g, f_1, f_2, \ldots)$ de fonctions de $L_{m(V)}$, avec $g \neq 0$ en tout point de $p^{-1}(V)$, de manière que les fonctions f_1/g, $f_2/g, \ldots$ définissent un plongement normal de V dans un ouvert d'un espace numérique. Soit maintenant m un multiple de k assez grand pour qu'on puisse appliquer la Proposition 1 à tous les entiers $m - m(V)$. Alors, pour chaque $V \in \mathfrak{R}'$, il existe un $f \in A_{m-m(V)}$ qui soit $\neq 0$ en tout point de $p^{-1}(V)$. La suite

$(fg, ff_1, ff_2, \ldots)$ est une suite finie d'éléments de A_m, dont la premier est $\neq 0$ dans V, et dont les quotients définissent un plongement normal de V dans un ouvert d'un espace numérique. A fortiori, le choix d'une base de A_m définit un plongement normal de V dans un ouvert de l'espace projectif P_{a_m-1}, ce qui prouve la Proposition 2.

§5. Démonstration du théorème d'immersion (Fin).

Pour achever de prouver le Théorème, il reste à montrer que, pour tout entier m multiple de k et assez grand, l'application $F_m \colon Y \to P_{a_m-1}$ (définie par le choix d'une base de A_m) sépare les points de Y. En effet, s'il en est ainsi, F_m est une application continue biunivoque de l'espace compact Y dans l'espace compact P_{a_m-1}, donc est un homéomorphisme de Y sur l'image (fermée) de F_m; au voisinage de chacun de ses points, cette image est un sous-ensemble analytique (d'après la Prop. 2). Donc, d'après le théorème de CHOW (cf. Exposé 14, Prop. 6), c'est un sous-ensemble algébrique. Enfin, d'après la Proposition 2, ce sous-ensemble algébrique est normal en chacun de ses points.

On sait déjà que l'application F_m, pour m multiple de k assez grand, sépare les points dans chacun des ouverts V du recouvrement $\mathcal{R}'$ (Prop. 2). Soit W l'ensemble des couples $(y', y'') \in Y \times Y$ tels qu'il existe un $V \in \mathcal{R}'$ avec $y' \in V$, $y'' \in V$; W est un voisinage ouvert de la "diagonale" de $Y \times Y$. Soit K le complémentaire de W, qui est compact. Il suffit de prouver que, pour tout m, multiple assez grand de k, la propriété suivante a lieu: pour tout couple $(x', x'') \in X \times X$ dont l'image par p est dans K, il existe une $f \in A_m$ telle que $f(x') = 0$ et $f(x'') \neq 0$. C'est ce qu'on va montrer maintenant.

Soit $(x', x'') \in X \times X$ dont l'image est dans K. Les points x' et x'' ne sont pas congrus modulo G; donc, d'après le Lemme 1, il existe $h \in L_m$ telle que $h(x') = 0$ et $h(x'') = 1$; du moins, ceci est vrai si m, multiple de k, a été choisi assez grand. De même, il existe $\tilde{h} \in L_m$ telle que $\tilde{h}(x') = 1$ et $\tilde{h}(x'') = 0$. Alors il existe un voisinage ouvert

U' de $y' = p(x')$ et un voisinage ouvert U'' de $y'' = p(x'')$, tels que le quotient $h/\tilde{h}$ soit de valeur absolue < 1 dans U', et > 1 dans U''. Recouvrons le compact K avec une suite finie de tels produits $U'_i \times U''_i$: pour chaque i on aura un entier m_i (multiple de k), et des éléments h_i et $\tilde{h}_i \in L_{m_i}$ tells que $|h_i/\tilde{h}_i| < 1$ dans U'_i, $|h_i/\tilde{h}_i| > 1$ dans U''_i.

Soit maintenant m un multiple de k assez grand pour qu'on puisse appliquer la partie (i) de l'énoncé à chacun des entiers $m - m_i$. Soit $(y', y'') \in K$, et soit i tel que $y' \in U'_i$ et $y'' \in U''_i$. Choisissons x' et x'' tels que $p(x') = y'$ et $p(x'') = y''$. Il existe une constante c ($|c| < 1$) telle que $h_i - c\tilde{h}_i$ soit nulle au point x'; alors $h_i - c\tilde{h}_i$ est $\neq 0$ au point x''. D'après la partie (i) de l'énoncé, il existe une $f \in A_{m-m_i}$ non nulle au point x''. Alors le produit $(h_i - c\tilde{h}_i)f \in A_m$ est nul au point x', et non nul au point x''. Ceci achève la démonstration.