Séminaire Henri Cartan

H. Cartan

Théorie de la convexité (II)

Séminaire Henri Cartan, tome 4 (1951-1952), exp. n° 9, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1951-1952__4__A9_0>

THÉORIE DE LA CONVEXITÉ (II)

(Exposé de H. Cartan, le 4-2-1952)

1. Les H-enveloppes des compacts d'une variété analytique-complexe.

Soit E une variété analytique-complexe de dimension n (abstraite, c'est-à-dire non supposée étalée dans C^n). Soit $H(E)$ l'espace vectoriel (et même: l'algèbre) des fonctions holomorphes (à valeurs scalaires) dans E. Nous inspirant d'une définition donnée dans l'Exposé 8 pour le cas d'une variété étalée, nous associons à chaque compact K de E l'ensemble (fermé) des $x \in E$ tels que

$$|f(x)| \leq \sup_{y \in K} |f(y)| \text{ quelle que soit } f \in H(E) .$$

Nous noterons $\overline{K}$ cet ensemble, et l'appellerons la H-enveloppe de K.

On peut donner une caractérisation intéressante des H-enveloppes de compacts de E, tout au moins lorsque E est réunion dénombrable de compacts (ce qui est toujours le cas quand E connexe est étalée dans C^n):

Théorème 1. *Soit E une variété analytique complexe, réunion dénombrable de compacts. Pour qu'un sous-ensemble A de E soit tel que toute fonction holomorphe dans E soit bornée sur A, il faut et il suffit que A soit contenu dans la H-enveloppe d'un compact de E.*

(Ici, "f bornée sur A" signifie simplement que la borne sup. de $|f|$ sur A est finie, et non pas, comme dans les exposés précédents, que f est bornée sur chaque compact de A, ce qui serait trivial).

Démonstration: on prouvera seulement que la condition est nécessaire. Munissons $H(E)$ de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de E; cette topologie est métrisable, et $H(E)$ est complet. Donc $H(E)$ est un espace de Baire. Si chaque élément de $H(E)$ est borné sur un ensemble A, associons à chaque $f \in H(E)$ la borne sup. de $|f|$ sur A; ceci définit sur $H(E)$ une fonction numérique $f \to \varphi(f)$, à valeurs finies

≥ 0, semi-continue inférieurement. D'après le théorème de Baire, il existe un ouvert non vide $U \subset H(E)$ sur lequel φ est uniformément majorée. Par translation dans l'espace vectoriel $H(E)$, on peut supposer que U est un voisinage de 0. Il existe donc un compact $K \subset E$ tel que l'inégalité $|f| \leq 1$ sur K entraîne $|f| \leq M$ sur A pour toute $f \in H(E)$; M désigne un nombre fixe, indépendant de f. Appliquons ceci aux puissances entières de f: on trouve que $|f| \leq 1$ sur K entraîne $|f| \leq 1$ sur A; ceci exprime que A est contenu dans la H-enveloppe de K.

2. Diverses conditions relatives aux H-enveloppes des compacts.

Considérons les conditions suivantes:

(α) pour tout compact $K \subset E$, la H-enveloppe $\overline{K}$ est compacte;

(α') tout compact $K \subset E$ possède un voisinage ouvert V tel que l'intersection $V \cap \overline{K}$ soit compacte.

Il est clair que (α) entraîne (α'). Lorsque E est étalé par une φ dans C^n, (α') entraîne la condition suivante:

(α'') pour tout compact $K \subset E$, la H-enveloppe $\overline{K}$ ne touche pas la frontière de (E, φ) (pour cette notion, voir 8, n° 3).

En effet, nous devons montrer que si $x \in E$ et si S désigne le plus grand polydisque ouvert de centre x contenu dans (E, φ), S n'est pas contenu dans $\overline{K}$. Or nous pouvons supposer que $x \in K$ (sinon, rajouter x à K). Supposons $S \subset \overline{K}$ et montrons une contradiction. S n'est pas relativement compact dans E, donc n'est pas contenu dans $V \cap \overline{K}$ qui est compact, et par suite n'est pas contenu dans V. Puisque $x \in V$ et que S est connexe, il existe dans S un point frontière de V, soit y; ce point est adhérent à $V \cap \overline{K}$, donc appartient à $V \cap \overline{K}$ qui est fermé, donc $y \in V$, ce qui est absurde puisque V est ouvert.

On a montré dans 8 (n° 3) que, pour un domaine étalé (E, φ), la condition (α'') équivaut à la suivante:

(α''') pour tout compact $K \subset E$, la distance de la H-enveloppe $\overline{K}$ à la frontière de (E, φ) est égale à la distance de K à la frontière de (E, φ).

Si on pouvait montrer que (α''') entraîne (α), les quatre conditions (α), (α'), (α''), (α''') seraient équivalentes pour un domaine étalé dans C^n.

C'est là un problème non résolu. On ne sait même pas si (α''') entraîne (α') (et lui est donc équivalent), et l'on ne sait pas non plus si (α') entraîne (α) (et lui est donc équivalent).

Il y a cependant un case où l'on peut prouver l'équivalence de ces quatre conditions. Posons la définition suivante:

Définition 1. Un domaine (E, φ) étalé dans C^n est dit de type fini si tout sous-ensemble fermé $A \subset E$, dont l'image par φ est bornée et dont la distance à la frontière de (E, φ) est $\neq 0$, est compact.

Par exemple, tout domaine univalent (c'est-à-dire pour lequel φ est biunivoque) est de type fini, comme cela résultera de la prop. 2 ci-dessous.

Proposition 1. Si (E, φ) est un domaine étalé dans C^n et de type fini, les conditions (α), (α'), (α'') et (α''') sont équivalentes.

Il suffit de prouver que (α''') entraîne (α). Or si K est un compact de E, $\varphi(\overline{K})$ est borné dans C^n, puisque les coordonnées du point $\varphi(x)$ ont même borne supérieure pour $x \in \overline{K}$ que pour $x \in K$. La condition (α''') implique que la distance de $\overline{K}$ à la frontière de (E, φ) n'est pas nulle. D'après la définition du type fini, $\overline{K}$ est compact.

La proposition suivante donne une condition suffisante pour que (E, φ) soit de type fini:

Proposition 2. Si (E, φ) n'est pas de type fini, il existe une infinité d'ouverts non vides de E, que φ applique biunivoquement et bicontinûment sur un même ouvert de C^n.

En effet, soit A un sous-ensemble fermé de E, non compact, tel que $\varphi(A)$ soit borné et que la distance de A à la frontière de (E, φ) soit égale à $r \neq 0$. Soit une suite de points $x_k \in A$, sans point d'accumulation dans E; la suite des $\varphi(x_k)$ a un point d'accumulation dans C^n; on peut supposer qu'elle converge vers un point $u \in C^n$. Alors, pour k assez grand, $\varphi(x_k)$ est dans le polydisque ouvert $S(u, r/2)$; puisque la distance de x_k à la frontière de (E, φ) est $\geq r$, il existe un polydisque ouvert S_k, de centre x_k, de rayon r, dont l'image par φ est biunivoque et bicontinue; cette image contient évidemment $S(u, r/2)$. Soit T_k l'image réciproque, dans S_k, de $S(u, r/2)$; il y a une infinité de T_k distincts, sinon la suite x_k aurait un point d'accumulation dans E. Ceci achève la démonstration.

3. Réalisation d'une variété analytique-complexe dans un espace-produit C^I.

Pour tout ensemble d'indices I (fini ou infini), on note C^I l'espace des applications de I dans C, muni de la topologie-produit.

Soit E une variété analytique-complexe. On a une application canonique

$$\Phi \ : \ E \to C^{H(E)} \ ,$$

à savoir celle qui, à un point $x \in E$, associe l'application $f \to f(x)$ de $H(E)$ dans C. Cette application Φ est continue.

Envisageons la condition:

(β) les fonctions holomorphes dans E séparent les points de E (cela signifie que si $x \neq y$, il existe un $f \in H(E)$ telle que $f(x) \neq f(y)$). Il est clair que (β) exprime que l'application Φ est biunivoque.

Lorsque E est étalée dans C^n par une φ, la condition (β) exprime que l'application $E \to \tilde{E}$ de E dans son enveloppe d'holomorphie $\tilde{E}$ est biunivoque.

En effet, supposons que $E \to \tilde{E}$ soit biunivoque, et soient x et y deux points distincts de E. Ou bien $\varphi(x) \neq \varphi(y)$; ou bien, si $\varphi(x) = \varphi(y)$, il existe une $f \in H(E)$ qui a des "déterminations" différentes en x et y; alors une dérivée partielle convenable de f prend des valeurs différentes en x et en y (il s'agit de dérivées par rapport aux coordonnées locales définies par φ).

Lorsque (E, φ) est une variété étalée dans C^n, on a (cf. 8, théor. 4):

La conjonction de (β) et de (α'') (ou, ce qui est équivalent, de (β) et de (α''')) exprime que (E, φ) est $H(E)$-convexe (VIII, défin. de la page 8). D'autre part (8, coroll. 2 du th. 5), cette condition est nécessaire et duffisante pour que (E, φ) soit un domaine d'holomorphie.

Nous allons maintenant interpréter la condition (α) en ce qui concerne l'application Φ ; il ne sera pas nécessaire de supposer E étalée dans C^n.

Théorème 2. Si l'application Φ est propre (i.e., l'image réciproque d'un compact de $C^{H(E)}$ est un compact de E), la condition (α) est remplie. Réciproquement, si la condition (α) est remplie, et si E est réunion dénombrable de compacts, Φ est une application propre.

Démonstration: les compacts de $C^{H(E)}$ sont les sous-ensembles fermés dont les projections sur les facteurs de $C^{H(E)}$ sont bornées. Pour que Φ soit propre, il faut et il suffit que tout sous-ensemble fermé A de E, sur lequel chaque $f \in H(E)$ est bornée, soit compact. On en déduit aussitôt le théorème 2, compte tenu du théorème 1.

Corollaire: pour qu'une variété (E, φ) étalée dans C^n, de type fini, soit un domaine d'holomorphie, il faut et il suffit que l'application Φ soit biunivoque et propre.

4. Les variétés de Stein.

(Cette catégorie de variétés analytiques-complexes a été introduite, à une légère variante près, par K. STEIN: Math. Annalen, 1951.)

Définition 2. Une variété analytique-complexe E (connexe ou non) est une variété de Stein si elle est réunion dénombrable de compacts, satisfait aux conditions (α') et (β) ci-dessus, et en outre à la condition suivante:

(γ) tout point de E possède un système de coordonnées locales constitué par des éléments de $H(E)$.

En particulier, toute variété, réunion dénombrable de compacts, qui satisfait à (α), (β) et (γ), est une variété de Stein. (La réciproque est vraie.)

Proposition 3. Si une variété (E, φ) étalée connexe est une variété de Stein, c'est un domaine d'holomorphie. Réciproquement, tout domaine d'holomorphie de type fini est une variété de Stein.

La première partie de l'énoncé résulte du fait que (α') entraîne (α''); la seconde résulte du corollaire du théorème 2.

Nous allons introduire une autre catégorie importante de variétés analytiques-complexes:

Définition 3. Une variété analytique-complexe E (de dimension n) s'appellera une variété d'Oka-Weil si elle est susceptible d'être plongée comme sous-variété analytique dans un polydisque ouvert

$$(S) \qquad |y_k| < 1 \quad (k = 1, \ldots, p; \quad p > n) .$$

Un sous-ensemble V du polydisque S est une sous-variété plongée de dimension n si c'est un sous-ensemble fermé de S, et si, au voisinage de chacun de ses points, elle peut être définie en exprimant $p - n$ des variables y_k en fonctions holomorphes des n autres (qui constituent alors un système de coordonnées locales pour V).

Dire que E se plonge comme sous-variété V dans S, c'est dire que l'on a p fonctions holomorphes $y_k = f_k(x)$ définies sur E, et qui appliquent biunivoquement et bicontinûment B sur V. Etant donné un système de p fonctions holomorphes f_k sur une variété analytique-complexe E de dimension n, telles que $|f_k| < 1$ dans E, pour qu'il définisse une application biunivoque et bicontinue de E sur une variété plongée dans S, il faut et il suffit que:

1° l'application f (définie par les f_k) soit biunivoque et propre;

2° le rang de f, en chaque point de E, soit égal à la dimension n de E.

L'existence d'une telle application f est nécessaire et suffisante pour que E soit une variété d'Oka-Weil.

Proposition 4. Toute variété d'Oka-Weil est une variété de Stein.

D'une façon précise, si E est une variété d'Oka-Weil, elle satisfait aux conditions (α), (β), (γ). Pour (α) et (β), cela tient au fait que l'application f ci-dessus est biunivoque et propre; pour (γ), au fait que, en chaque point de E, il existe un système de coordonnées locales formé de n des fonctions f_k. De plus, puisque f est propre et que S est réunion dénombrable de compacts, E est réunion dénombrable de compacts, ce qui achève la démonstration.

Nous admettrons sans démonstration le fait fondamental suivant, qui sera démontré plus tard dans la théorie des idéaux de fonctions analytiques (cf. H. Cartan, Bull. Soc. Math. de France 1948):

Propriété fondamentale des variétés d'Oka-Weil: si E est appliquée par des f_k sur une sous-variété plongée dans un polydisque ouvert S, toute fonction holomorphe g sur E peut se mettre sous la forme

$$g(x) = F(f_1(x), \dots, f_p(x)),$$

où $F(y_1, \dots, y_p)$ est holomorphe dans le polydisque S. Il en résulte: *Toute fonction holomorphe dans E est limite (uniformément sur tout compact de E) de polynômes par rapport aux fonctions f_k.*

5. *Théorèmes fondamentaux concernant les variétés de Stein.*

Théorème 3. *Toute variété de Stein est réunion d'une suite croissante d'ouverts relativement compacts E_k, dont chacun est une variété d'Oka-Weil jouissant de la propriété que toute fonction holomorphe dans E_k est limite (uniformément sur tout compact de E_k) de fonctions holomorphes dans E.*

Réciproquement, *si une variété analytique-complexe E est réunion d'une suite croissante d'ouverts E_k, dont chacun est une variété de Stein et jouit de la propriété que toute fonction holomorphe dans E_k est limite (uniformément sur tout compact de E_k) de fonctions holomorphes dans E, alors E est une variété de Stein.*

Démonstration: prouvons d'abord la réciproque. Si E est réunion des E_k comme il est dit, E est réunion dénombrable de compacts. E satisfait à (β): car si x et y sont deux points distincts de E, soit E_k contenant x et y, et soit une f holomorphe dans E_k telle que $f(x) \neq f(y)$; approchons f par une fonction holomorphe dans E: on trouve une g holomorphe dans E, telle que $g(x) \neq g(y)$. E satisfait à (γ): soit $x \in E$; prenons E_k contenant x, et des fonctions $f_1, \ldots, f_n$ holomorphes dans E_k, constituant un système de coordonnées locales au point x. Approchons les f_i, uniformément au voisinage de x, par $g_1, \ldots, g_n$ holomorphes dans E; au voisinage de x, les g_i s'expriment comme fonctions holomorphes des f_i, et leur déterminant fonctionnel tend vers un; à partir du moment où il est $\neq 0$ en x, les g_i constituent un système de coordonnées locales en x. Montrons enfin que E satisfait à (α'): soit K un compact de E; soit E_k contenant K; soit K' la H-enveloppe de K pour les fonctions holomorphes dans E_k; K' est compact et contenu dans E_k. Soit maintenant $\overline{K}$ la H-enveloppe de K pour les fonctions holomorphes dans E; je dis que $E_k \cap \overline{K} = K'$, ce qui prouvera (α'). Or K' est trivialement contenu dans $E_k \cap \overline{K}$; inversement, soit x un point de E_k n'appartenant pas à K'; il existe une f holomorphe dans E_k, telle que $|f(x)| > \sup_{y \in K} |f(y)|$; approchons f par une g holomorphe dans E, uniformément sur le compact $K \cup \{x\}$; on trouve une g telle que $|g(x)| > \sup_{y \in K} |g(y)|$, d'où $x \notin \overline{K}$.

Ainsi, la partie "réciproque" du théorème 3 est établie. Prouvons maintenant la partie directe. Il suffira de montrer ceci: soit K un compact arbitraire de E, et V un ouvert contenant K et tel que $V \cap \overline{K}$ soit compact; alors $V \cap \overline{K}$ possède un système fondamental de voisinages ouverts, dont chacun U est une variété d'Oka-Weil qui se plonge comme sous-variété analytique dans un polydisque ouvert, au moyen de fonctions f_k holomorphes dans E. Le théorème en résultera, car toute fonction holomorphe dans U sera limite (uniformément sur tout compact de U) de polynômes par rapport aux f_k.

L'assertion à prouver va résulter du lemme suivant:

Lemme. Soit V une variété analytique-complexe; soit A un compact de V, $\mathcal{F}$ un espace vectoriel de fonctions holomorphes dans V, tel que, pour tout $x \notin A$, existe un $f \in \mathcal{F}$ telle que $|f(x)| > \sup_{y \in A} |f(y)|$. Supposons en outre que les fonctions de $\mathcal{F}$ séparent les points de V, et que tout point de V possède un système de coordonnées locales formé de fonctions de $\mathcal{F}$. Alors A possède un système fondamental de voisinages ouverts, dont chacun U est une variété d'Oka-Weil qui se plonge comme sous-variété analytique dans un polydisque ouvert, au moyen de fonctions $f_k \in \mathcal{F}$. En particulier, toute fonction holomorphe au voisinage de A est limite, uniformément sur A, de polynômes par rapport aux fonctions de $\mathcal{F}$.

Il suffira d'appliquer ce lemme à la situation du th. 3, en y prenant $A = \overline{K} \cap V$, $\mathcal{F} = H(E)$, et le théorème sera démontré.

Reste à démontrer le lemme. Soit V' un voisinage ouvert de A, dont l'adhérence V'' soit compacte. A chaque point x de la frontière W de V' on peut associer une $f \in \mathcal{F}$ telle que $|f(x)| > \sup_{y \in K} |f(y)|$. Puisque W est compact, on peut trouver un nombre fini de $f_i \in \mathcal{F}$, telles que

$$|f_i(y)| < 1 \text{ pour } y \in A, \quad \sup_i |f_i(x)| \geq 1 \text{ pour } x \in W.$$

Soit U l'ensemble des $z \in V'$ tels que $|f_i(z)| < 1$ pour tout i; c'est un ouvert de V contenant A. Je dis que, pour tout r tel que $0 < r < 1$, l'ensemble A_r des $z \in A$ tels que $|f_i(z)| \leq r$ est <u>compact</u>. En effet, A_r est contenu dans le compact V'', et son adhérence ne rencontre pas W, donc est contenue dans V', donc se réduit à A_r. Ainsi: l'application de U dans le polydisque $|y_i| < 1$, définie par les fonctions f_i, est <u>propre</u>. Pour plonger U comme sous-variété analytique dans un polydisque ouvert, il suffit d'adjoindre aux f_i un nombre <u>fini</u> de fonctions de $\mathcal{F}$, qui séparent les points de V'' et fournissent, pour chaque point de V'', un système de coordonnées locales. On voit facilement que c'est possible, à cause de la compacité de V''.

En même temps, ce lemme prouve le <u>théorème d'approximation</u> que voici:

Théorème 4. Soient E une variété analytique-complexe, et $\mathcal{F}$ une famille de fonctions holomorphes dans E, jouissant des propriétés suivantes:

1) chaque compact K possède un voisinage ouvert V tel que $K_{\mathcal{F}} \cap V$ soit compact ($K_{\mathcal{F}}$ désigne, comme dans l'exposé 8, l'ensemble des $x \in E$ tels que $|f(x)| \leq \sup_{y \in K} |f(y)|$ pour toute $f \in \mathcal{F}$);

2) les fonctions de $\mathcal{F}$ séparent les points de E;

3) tout point de E possède un système de coordonnées locales formé de fonctions de $\mathcal{F}$.

Alors toute fonction holomorphe sur E est limite (uniformément sur tout compact de E) de polynômes par rapport aux éléments de $\mathcal{F}$.

En particulier: si E connexe est étalée par φ dans C^n, de type fini, et fortement $\mathcal{F}$-convexe, alors toute fonction holomorphe dans E est limite (uniformément sur tout compact de E) de polynômes par rapport aux fonctions de $\mathcal{F}$ et aux coordonnées de $\varphi(x)$ dans C^n. (Ce théorème est dû à A. Weil dans le cas où E est univalent, et $\mathcal{F}$ est la famille des polynômes par rapport aux coordonnées de $\varphi(x)$.)

6. Critères pour les variétés de Stein et les domaines d'holomorphie.

Théorème 5. Soit E une variété analytique-complexe, telle que tout ouvert relativement compact de E satisfasse à (β) et (γ). Supposons que E soit réunion d'une suite de compacts K_p, tels que

1° K_p soit intérieur à K_{p+1} ;

2° K_p se compose des $x \in K_{p+1}$ tels que $|f(x)| \leq \sup_{y \in K_p} |f(y)|$ pour toute f holomorphe au voisinage de K_{p+1}.

Alors E est une variété de Stein.

Démonstration: montrons d'abord que E satisfait à (α'). Toute fonction holomorphe au voisinage de K_p est limite uniforme, sur K_p, de fonctions holomorphes au voisinage de K_{p+1}: cela résulte du lemme appliqué au cas où V est l'intérieur de K_{p+1}, $\mathcal{F}$ l'espace des fonctions holomorphes au voisinage de K_{p+1}, et $A = K_p$. Il s'ensuit alors, de proche en proche, que tout fonction holomorphe au voisinage de K_p est limite uniforme, sur K_p, de fonctions holomorphes dans E. Appliquons ce résultat à K_{p+1}: on voit que si $x \in K_{p+1} - K_p$, il existe une f holomorphe dans E, telle que $|f(x)| > \sup_{y \in K_p} |f(y)|$. Donc si $\overline{K}_p$ désigne la H-enveloppe de K_p, on a $\overline{K}_p \cap K_{p+1} = K_p$, ce qui prouve ($\alpha'$). Enfin, E satisfait à (β) et (γ), parce que toute fonction holomorphe aur un compact de E est limite uniforme de fonctions holomorphes dans E.

Le théorème 5 s'applique notamment à une variété étalée connexe (E, φ) telle que les fonctions holomorphes dans E séparent les points de E. Si E satisfait aux conditions du th. 5, on peut conclure que E est une domaine d'holomorphie (cf. prop. 3).

Théorème 6 (Théorème de Behnke-Stein). Soit (E, φ) une variété étalée de type fini, réunion d'une suite croissante de sous-ensembles ouverts E_k tels que chaque (E_k, φ) soit un domaine d'holomorphie. Alors (E, φ) est un domaine d'holomorphie.

Démonstration: pour chaque entier p, soit X_p l'ensemble des points de E dont la distance à la frontière de (E, φ) est $\geq 1/p$ et dont l'image par φ est dans le polydisque fermé de centre origine et rayon p. Puisque (E, φ) est de type fini, X_p est compact. Il existe donc un entier k, soit k_p, tel que $E_{k_p} \supset X_p$. On peut supposer $k_p < k_{p+1}$, et écrire désormais E_p au lieu de E_{k_p}. Soit K_p l'ensemble des points de E_{p+1} dont la distance à la frontière de (E_{p+1}, φ) est $\geq 1/p$ et dont l'image par φ est dans le polydisque fermé de centre origine et de rayon p. K_p est compact, et contenu dans X_p donc dans E_p. Puisque E_{p+1} est un domaine d'holomorphie, K_p est identique à son $H(E_{p+1})$-enveloppe (en effet, l'intersection de E_{p+1} et du polydisque de rayon p est un domaine d'holomorphie, donc est $H(E_{p+1})$-convexe). D'autre part, K_p est intérieur à $K_{p+1} \subset E_{p+1}$. Ainsi toutes les conditions d'application du théorème 5 sont remplies. Donc E est une variété de Stein, et par suite (prop. 3) un domaine d'holomorphie.

N.B. Depuis la rédaction de cet Exposé, de nouveaux résultats sur les variétés de Stein ont été obtenus. Au sujet de la proposition 3, K. OKA démontré (Jap. Journal Math., 23, 1953, p. 97-155) que tout domaine d'holomorphie (de type fini ou non) est une variété de Stein. D'autre part, pour une variété analytique complexe E, réunion dénombrable de compacts, la condition (γ) est une conséquence des conditions (α) et (β); de plus, si E est une variété analytique complexe connexe satisfaisant à (β), elle est réunion dénombrable de compacts (ces résultats ont été prouvés par H. GRAUERT, Math. Ann. 129, 1955, p. 233-259).

Par ailleurs, R. REMMERT (Comptes Rendus, 243, 1956, p. 118-121) a prouvé que toute variété de Stein peut être plongée comme sous-variété (fermée) dans un espace numerique $\mathbb{C}^N$ de dimension N assez grande. Pour la démonstration de ce résultat, voir R. NARASIMHAN (Amer. Journ. Math., 82, 1960, p. 917-934); dans ce travail, le théorème de plongement de Remmert est précisé et généralisé au cas des espaces analytiques de Stein.