Malatian

Faisceaux analytiques ; étude du faisceau des relations entre p fonctions holomorphes

Séminaire Henri Cartan, tome 4 (1951-1952), exp. n° 15, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1951-1952__4__A15_0>

FAISCEAUX ANALYTIQUES; ÉTUDE DU FAISCEAU DES RELATIONS ENTRE p FONCTIONS HOLOMORPHES

(Exposé de Malatian, 28-4-52).

Préambule. Ceci est le premier d'une série d'exposés consacrés à la théorie globale des idéaux de fonctions analytiques, pour laquelle on renvoie surtout à: H. Cartan, Bull. Soc. Math. de France 78 (1950), p. 29-64. On adoptera le langage des faisceaux (voir Séminaire 1950-51, exposés 14 et suivants). Dans le présent exposé, on utilise le langage des fonctions analytiques sur le corps complexe, mais les résultats sont valables pour le cas d'un corps valué complet non discret.

1. Le faisceau des fonctions analytiques.

Soit E une variété analytique-complexe. A chaque point $x \in E$ associons l'anneau $\mathcal{O}_x$ des fonctions (à valeurs scalaires) analytiques (ou holomorphes, ce qui est synonyme) au point x. Pour tout ouvert $U \subset E$, notons $\mathcal{O}_U$ l'anneau des fonctions holomorphes dans U; si $x \in U$, on a un homomorphisme canonique $\mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_x$, et la collection de ces homomorphismes identifie $\mathcal{O}_x$ à la limite inductive des anneaux $\mathcal{O}_U$ attachés aux ouverts U contenant x.

Dans la réunion $\mathcal{O}(E)$ des $\mathcal{O}_x$ (x parcourant E), on définit une topologie: à chaque ouvert non vide U de E, et à chaque $f \in \mathcal{O}_U$, on associe l'ensemble $V(U, f)$ des images de f dans les $\mathcal{O}_x$ attaches aux divers points $x \in U$. Par definition, les $V(U, f)$ sont des ensembles ouverts de l'espace topologique $\mathcal{O}(E)$, et engendrent sa topologie. Il est classique que cette topologie est séparée.

A chaque élément $f \in \mathcal{O}(E)$ associons le point $x \in E$ tel que $f \in \mathcal{O}_x$: ceci définit une application p de $\mathcal{O}(E)$ sur E. Il est évident que p est un "homéomorphisme local": tout $f \in \mathcal{O}(E)$ possède un voisinage ouvert V tel que la restriction de p à V soit un homéomorphisme de V sur $p(V)$. Ceci munit l'espace $\mathcal{O}(E)$ d'une structure de variété analytique-complexe.

Le triple $(\mathcal{O}(E), p, E)$ constitute un <u>faisceau</u> sur l'espace topologique E, au sens de l'exposé 14 (1950-51). En effet, $\mathbf{C}$ désignant le corps des nombres complexes:

1) $p^{-1}(x) = \mathcal{O}_x$ est une $\mathbf{C}$-module;
2) les lois de composition (non partout définies) de $\mathcal{O}(E)$ sont continues;
3) p est un homéomorphisme local.

Pour tout entier $q \geq 1$, on peut considérer le faisceau $\mathcal{O}^q(E)$, somme directe de q faisceaux isomorphes à $\mathcal{O}(E)$. Pour chaque point $x \in E$, $\mathcal{O}^q_x$ est le module des suites $(f_1,\ldots, f_q)$ de q fonctions holomorphes au point x.

2. <u>La notion de faisceau analytique</u>.

Non seulement $\mathcal{O}^q_x$ est un module sur le corps C, mais un module sur l'anneau $\mathcal{O}_x$ (qui varie d'un point à l'autre). Cette structure de $\mathcal{O}_x$-module est définie en associant à une $g \in \mathcal{O}_x$ et à $f = (f_1,\ldots, f_q) \in \mathcal{O}^q_x$ le produit

$$gf = (gf_1,\ldots, gf_q).$$

En langage savant, considérons le produit tensoriel $\mathcal{O}(E) \circ \mathcal{O}^q(E)$ qui est un faisceau sur E (cf. 1950-51, 14, p. 8). La loi de composition précédente définit un <u>homomorphisme de faisceaux</u>:

$$\mathcal{O}(E) \circ \mathcal{O}^q(E) \to \mathcal{O}^q(E)$$

(au sujet de la notion d'"homomorphisme de faisceaux," voir loc. cit., p. 5).

<u>Définition</u> 1. On dit qu'un faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathbf{C}$-modules, sur une variété analytique-complexe, est un <u>faisceau analytique</u>, si on s'est donné un homomorphisme de faisceaux $\mathcal{O}(E) \circ \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, tel que les applications $\mathcal{O}_x \otimes \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}_x$ définies par cet homomorphisme définissent sur $\mathcal{F}_x$ une structure de $\mathcal{O}_x$-module.

Le faisceau $\mathcal{O}^q(E)$ est un faisceau analytique. Voici un autre exemple important:

Faisceau des formes différentielles holomorphes: on a déjà défini les formes différentielles holomorphes sur une variété analytique-complexe E (cf. 1, pp. 12-13): ce sont les formes différentielles qui s'expriment avec les produits extérieurs des dz_k d'un système de coordonnées locales z_k, les coefficients étant holomorphes. Soit $\mathcal{F}_U$ le module des formes différentielles holomorphes dans un ouvert $U \subset E$; $\mathcal{F}_U$ est un module sur l'anneau $\mathcal{O}_U$. La limite inductive $\mathcal{F}_x$ des $\mathcal{F}_U$ relatifs aux U contenant x est un module sur l'anneau $\mathcal{O}_x$. Ceci définit bien un homomorphisme de faisceaux $\mathcal{O}(E) \circ \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, qui fait de $\mathcal{F}$ un faisceau analytique.

Définition 2. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux faisceaux analytiques sur E. Un homomorphisme de faisceaux φ: $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ s'appelle un homomorphisme analytique si la collection des homomorphismes φ_x définis par φ satisfait à la condition suivante: φ_x est un $\mathcal{O}_x$-homomorphisme de $\mathcal{F}_x$ dans $\mathcal{G}_x$.

On laisse au lecteur le soin de démontrer:

Proposition 1. Soit φ: $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un homomorphisme analytique de faisceaux analytiques. Soient $\mathcal{N}$ le noyau de φ (sous-faisceau de $\mathcal{F}$), $\mathcal{I}$ l'image de φ (sous-faisceau de $\mathcal{G}$), $\mathcal{C}$ le conoyau de φ (faisceau-quotient $\mathcal{G}/\mathcal{I}$). Tous ces faisceaux sont analytiques pour la structure induite ou la structure quotient.

3. Sous-faisceaux analytiques de $\mathcal{O}^q(E)$.

Les faisceaux analytiques seront étudiés, en général, dans les exposés 18 et 19. Dans la suite du présent exposé, on se borne aux sous-faisceaux analytiques du faisceau $\mathcal{O}^q(E)$. Un tel sous-faisceau attache à chaque point $x \in E$ un sous-$\mathcal{O}_x$-module $\mathcal{F}_x$ de $\mathcal{O}_x^q$. Pour qu'une collection de sous-modules $\mathcal{F}_x$ définisse un faisceau (qui sera alors analytique), il faut et il suffit que soit remplie la condition suivante:

(C) si $x \in U$ (U ouvert), et si $f \in \mathcal{O}_U^q$ définit au point x un élément du module $\mathcal{F}_x$, alors, pour tout point y assez voisin de x, l'élément $f_y \in \mathcal{O}_y^q$ défini par f appartient à $\mathcal{F}_y$.

(Ceci résulte aussitôt de la définition d'un faisceau.)

Il est évident que l'intersection de 2 sous-faisceaux analytiques de $\mathcal{O}^q(E)$ est un sous-faisceau analytique.

Exemples. 1) faisceau engendré par un module. Soit $\mathfrak{M}$ un sous-module de $\mathcal{O}^q_E$ (comme module sur l'anneau $\mathcal{O}_E$ des fonctions holomorphes dans E). Pour chaque point $x \in E$, l'image de $\mathfrak{M}$ dans $\mathcal{O}^q_x$ engendre, pour la structure de $\mathcal{O}_x$-module, un sous-module $\mathfrak{M}_x$. La collection de ces modules satisfait à la condition (C), donc définit un faisceau; on l'appelle le faisceau engendré par le module $\mathfrak{M}$.

2) Faisceau des relations entre des éléments de $\mathcal{O}^q_E$. Considérons une suite finie d'éléments $f_1, \dots, f_p$ de $\mathcal{O}^q_E$. A chaque point $x \in E$ associons les suites $(c_1, \dots, c_p)$ d'éléments de $\mathcal{O}_x$ tels que l'on ait $c_1 f_1 + \dots + c_p f_p = 0$ dans $\mathcal{O}^q_x$ (on a utilisé la même notation f_i pour un élément de $\mathcal{O}^q_E$ et pour son image canonique dans $\mathcal{O}^q_x$). Une telle suite peut être considérée comme un élément $c \in \mathcal{O}^p_x$; l'ensemble de ces suites est évidemment un sous- $\mathcal{O}_x$-module de $\mathcal{O}^p_x$. Nous le noterons $\mathcal{R}_x(f_1, \dots, f_p)$, et l'appellerons le module des relations entre $f_1, \dots, f_p$ au point x. Il est immédiat que la collection des modules $\mathcal{R}_x(f_1, \dots, f_p)$ satisfait à la condition (C): elle définit un faisceau analytique, noté $\mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)$, et appelé faisceau des relations entre $f_1, \dots, f_p$.

4. La notion de faisceau cohérent.

Définition 3. On dit qu'un sous-faisceau analytique $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}^q(E)$ est cohérent au point $x \in E$, s'il existe un voisinage ouvert U de x et un système fini d'éléments $u_i \in \mathcal{O}^q_U$ jouissant de la propriété suivante: pour tout point $y \in U$, le sous-module de $\mathcal{O}^q_y$ engendré par les u_i est précisément $\mathcal{F}_y$. On dit qu'un faisceau $\mathcal{F}$ est cohérent (tout court) s'il est cohérent en tout point de E.

Un faisceau cohérent en un point x l'est en tout point assez voisin de x, d'après la définition. D'autre part, le fait suivant est évident: si $\mathcal{F}$ est cohérent au point x, et si V est un ouvert quelconque contenant x, et (v_j) un système fini d'éléments de $\mathcal{O}^q_V$ qui $\mathcal{O}_x$-

engendre $\mathcal{F}_x$ dans $\mathcal{O}_x^q$, alors le système (v_j) $\mathcal{O}_y$-engendre $\mathcal{F}_y$ dans $\mathcal{O}_y^q$, pour tout point y assez voisin de x. Conséquence: si deux sous-faisceaux analytiques cohérents $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ de $\mathcal{O}^q(E)$ sont tels que $\mathcal{F}_x = \mathcal{G}_x$ en un point x, on a $\mathcal{F}_y = \mathcal{G}_y$ en tout point y assez voisin de x.

Proposition 2. Pour qu'un sous-faisceau analytique $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}^q(E)$ soit cohérent au point x, il faut et il suffit qu'il existe un ouvert U contenant x, et un sous-module $\mathfrak{M}$ de $\mathcal{O}_U^q$ (pour la structure de module sur l'anneau $\mathcal{O}_U$), tel que, pour tout point $y \in U$, le sous- $\mathcal{O}_y$-module de $\mathcal{O}_y^q$ engendré par l'image de $\mathfrak{M}$ dans $\mathcal{O}_y^q$ soit précisément $\mathcal{F}_y$. En d'autres termes, cette condition exprime que le faisceau induit par $\mathcal{F}$ sur l'ouvert U est "engendré" par un sous-module de $\mathcal{O}_U^q$.

La condition est trivialement nécéssaire. Réciproquement, supposons-la remplie; si le module générateur $\mathfrak{M}$ était de type fini, il serait trivial que le faisceau $\mathcal{F}$ est cohérent au point x, d'après la définition 3. En tout cas, on peut extraire du module $\mathfrak{M}$ un système fini d'éléments u_i qui engendrent $\mathcal{F}_x$ dans $\mathcal{O}_x^q$, puisque l'anneau $\mathcal{O}_x$ est noethérien (cf. 11). Il suffira de montrer l'existence d'un ouvert V contenant x et contenu dans U, tel que le sous-module $\mathfrak{M}_V$ engendré par $\mathfrak{M}$ dans $\mathcal{O}_V^q$ soit engendré par les u_i. Or ceci résulte du "complément au théorème 3," exposé 11 (page 6).

Une conséquence de la prop. 2 est celle-ci: tout faisceau engendré par un sous-module de $\mathcal{O}_E^q$ est coherent.

Proposition 3. Soit $\mathcal{F}$ un sous-faisceau analytique de $\mathcal{O}^q(E)$, et $\mathcal{G}$ un sous-faisceau analytique de $\mathcal{O}^r(E)$. S'il existe un homomorphisme analytique de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{G}$, et si $\mathcal{F}$ est cohérent, alors $\mathcal{G}$ est cohérent.

Rappelons qu'on dit que $\varphi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est un homomorphisme de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{G}$ si, pour tout point x, φ_x applique $\mathcal{F}_x$ sur $\mathcal{G}_x$. La proposition est donc évidente, si on se reporte à la définition 3.

5. Le théorème d'Oka.

Le théorème suivant, dont la première démonstration est due à Oka

(Bull. Soc. Math. de France, 78 (1950), p. 1-28), jouera un rôle fondamental dans la suite de ces exposés.

Théorème. Pour toute suite finie $(f_1, \ldots, f_p)$ d'éléments de $\mathcal{O}_E^q$, le faisceau des relations $\mathcal{R}(f_1, \ldots, f_p)$ est cohérent.

On va démontrer ce théorème par une double récurrence sur l'entier q et sur l'entier n (dimension de E). Pour des entiers n et q donnés, désignons par $th(n, q)$ l'énoncé précedent. Il est évident que $th(n, q)$ implique $th(n, q')$ pour tout $q' \leq q$. D'autre part, $th(0, q)$ est trivialement vrai. Pour établir le théorème, il suffira de prouver les deux assertions suivantes:

(a) pour $n > 0$ et $q > 1$, $th(n, q-1)$ entraîne $th(n, q)$;

(b) si, pour un $n > 0$, $th(n-1, q)$ est vrai pour tout q, alors $th(n, 1)$ est vrai.

Démonstration de (a). Soit E de dimension n, et soit la suite $(f_1, \ldots, f_p)$ d'éléments de $\mathcal{O}_E^q$. Chaque f_i est un système d'éléments $f_i^j \in \mathcal{O}_E$ $(1 \leq j \leq q)$. Soit $g_i \in \mathcal{O}_E^{q-1}$ ayant pour composantes f_i^j pour $1 \leq j \leq q-1$. Il est clair que le faisceau $\mathcal{R}(f_1, \ldots, f_p)$ est un sous-faisceau de $\mathcal{R}(g_1, \ldots, g_p)$. Ce dernier est cohérent d'après l'hypothèse de récurrence. Soit x un point de E; il existe un ouvert U contenant x et un nombre fini de $u_k \in \mathcal{O}_X^p$ qui, en chaque point $y \in U$, engendrent le module $\mathcal{R}_y(g_1, \ldots, g_p)$. Tout élément de $\mathcal{R}_y(g_1, \ldots, g_p)$ s'écrit donc (de plusieurs manières) sous la forme $\Sigma_k\, a_k u_k$, avec $a_k \in \mathcal{O}_y$. Considérons, en chaque point $y \in U$, le sous-module formé des suites (a_k) telles que $\Sigma_k\, a_k u_k \in \mathcal{R}_y(f_1, \ldots, f_p)$; ces sous-modules $\mathcal{F}_y$ définissent dans U un faisceau analytique $\mathcal{F}$. L'application $(a_k) \rightarrow \Sigma_k\, a_k u_k$ définit un homomorphisme analytique du faisceau $\mathcal{F}$ sur le faisceau induit par $\mathcal{R}_x(f_1, \ldots, f_p)$ dans U. Pour montrer que ce dernier est cohérent, il suffit, d'après la prop. 3, de prouver que $\mathcal{F}$ est cohérent. Or la relation $\Sigma_k\, a_k u_k \in \mathcal{R}_y(f_1, \ldots, f_p)$ équivaut à

$$\sum_i \Big(\sum_k a_k u_k^i \Big) f_i^q = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_k a_k \Big(\sum_i u_k^i f_i^q \Big) = 0.$$

Donc $\mathcal{F}$ est le faisceau des relations entre les fonctions $h_k = \Sigma_i\, u_k^i f_i^q$, et puisque th(n, 1) est vrai, $\mathcal{F}$ est cohérent.

<u>Démonstration de</u> (b). Le théorème étant supposé vrai pour $n-1$ variables (et pour tout entier q), prenons, dans l'espace C^n, une suite de p fonctions (scalaires) $f_1, \ldots, f_p$ holomorphes au voisinage de l'origine. En vertu du "lemme de préparation" (exposé X), on peut faire sur les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ une substitution linéaire telle que chacune des f_i non identiquement nulles soit équivalente (à l'origine) à un polynôme en $x_n = z$, à coefficients holomorphes en $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Pour établir (b), il suffit donc de montrer ceci: étant donnés p polynômes en z, à coefficients holomorphes au voisinage de l'origine dans C^{n-1}, le faisceau des relations entre ces polynômes est cohérent à l'origine $x_1 = 0, \ldots, x_{n-1} = 0$, $z = 0$. Or, admettons pour un instant le lemme:

<u>Lemme</u>. En tout point $(x_1, \ldots, x_{n-1}, z)$ tel que les coefficients des polynômes f_i soient holomorphes au point $(x_1, \ldots, x_{n-1})$, le module des relations entre les f_i est <u>engendré</u> par ceux des systèmes $(c_1, \ldots, c_p)$ de ce module pour lesquels les c_i sont des <u>polynômes en</u> z, de degré $\leq \alpha$, en désignant par α le plus grand des degrés des f_i.

Ce lemme etant admis provisoirement, les relations entre les f_i pour lesquelles les c_i sont des polynômes de degré $\leq \alpha$ constituent un faisceau analytique, au sens des fonctions des n-1 variabels $x_1, \ldots, x_{n-1}$; le module attaché à un point $(x_1, \ldots, x_{n-1}, z)$ est indépendant de z: il ne dépend que du point $(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Puisque th(n-1, q) est vrai pour tout q (d'après l'hypothèse de récurrence), ce faisceau est cohérent. Compte tenu du lemme, cela prouve que le faisceau de toutes les relations entre les f_i est cohérent.

Il reste maintenant à démontrer le lemme. Supposons que f_p soit l'un des polynômes de plus grand degré α. En chaque point a où les coefficients des f_i sont holomorphes, on a une décomposition

$$f_p = f'f'',$$

f' étant un polynôme distingue en $z - z_0$ (z_0 désigne la valeur de z au point a), et f'' étant $\neq 0$ au point a. Soient α' et α'' les degrés de f' et f'' (on a $\alpha' + \alpha'' = \alpha$). Soit alors une relation $\Sigma_i c_i f_i = 0$ à coefficients c_i holomorphes au point a. Appliquons le lemme de préparation aux coefficients c_i; on a, pour $i \leq p-1$,

$$c_i = f_p Q_i + R_i ,$$

Q_i étant holomorphe au point a, et R_i étant un polynôme en z de degré $\leq \alpha'-1$. Ces relations permettent l'écrire le système $(c_1, \ldots, c_p)$ comme une combinaison linéaire:

$$\begin{aligned}(c_1, \ldots, c_p) = (f_p, 0, \ldots, 0, -f_1)Q_1 + (0, f_p, 0, \ldots, -f_2)Q_2 + \cdots \\ + (0, \ldots, 0, f_p, -f_{p-1})Q_{p-1} + (R_1, \ldots, R_{p-1}, R_p) ,\end{aligned}$$

en posant $R_p = c_p + \sum_{i \leq p-1} f_i Q_i$. Les systèmes $(f_p, 0, \ldots, 0, -f_1), \ldots,$ $(0, \ldots, 0, f_p, -f_{p-1})$ appartiennent au module des relations entre les f_i, et sont formés de polynômes en z de degrés $\leq \alpha$. On va étudier le systeme $(R_1, \ldots, R_p)$. On a

$$\sum_{i \leq p-1} R_i f_i + (R_p f'')f' = 0 ;$$

Dans cette relation, $\Sigma_{i \leq p-1} R_i f_i$ est un polynôme en z; puisque f' est un polynôme distingué, cette relation n'est autre que l'identité de la division des polynômes (10, prop. 1), et par suite le quotient $R_p f''$ est un polynôme en z. Soit $g = 1/f''$, holomorphe au point a; on a

$$(R_1, \ldots, R_p) = (f''R_1, \ldots, f''R_p)g .$$

On va montrer que les $f''R_i$ sont des polynômes en z, de degrés $< \alpha$, ce qui établira le lemme. Pour $i \leq p-1$, c'est évident, puisque R_i est de degré $\leq \alpha'-1$, et f'' de degré α''. Pour $i = p$, la relation

$$\sum_{i \leq p} (f''R_i)f_i = 0$$

montre que le polynôme $(f''R_p)f_p$ est de degré $< 2\alpha$; comme f_p est de degré α exactement, le polynôme $f''R_p$ est de degré $< \alpha$.

Ceci achève la démonstration du lemme, et un même temps celle du théorème.

6. Premières conséquences du théorème d'Oka.

Corollaire 1. Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux sous-faisceaux analytiques cohérents de $\mathcal{O}_E^q$, leur intersection est un faisceau analytique cohérent.

On va montrer que si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont cohérents en un point x, $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est cohérent en x. Soit U un ouvert contenant x, (u_i) et (v_j) deux systèmes finis d'éléments de $\mathcal{O}_U^q$, engendrant respectivement $\mathcal{F}_y$ et $\mathcal{G}_y$ en chaque point $y \in U$. Considérons dans U le faisceau des relations $\mathcal{R}(u_i, v_j)$. Définissons un homomorphisme $\mathcal{R}(u_i, v_j) \to \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ comme suit: si des a_i et des b_j, holomorphes au point $y \in U$, satisfont à $\sum_i a_i u_i + \sum_j b_j v_j = 0$, on leur associe l'élément $\sum_i a_i u_i \in \mathcal{F}_y \cap \mathcal{G}_y$. Ceci définit bien un homomorphisme analytique de faisceaux, et c'est un homomorphisme de $\mathcal{R}(u_i, v_j)$ sur $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. D'après le théorème d'Oka, $\mathcal{R}(u_i, v_j)$ est un faisceau cohérent; la prop. 3 entraîne alors que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un faisceau cohérent.

Corollaire 2. Soit $\mathcal{M}$ un sous-module de $\mathcal{O}_E^q$, et soit x un point de E. Supposons donnée une fonction $g \in \mathcal{O}_E$ telle que les relations $f \in \mathcal{O}_x^q$ et $gf \in \mathcal{M}_x$ entraînent $f \in \mathcal{M}_x$ (on note $\mathcal{M}_x$ le sous-module de $\mathcal{O}_x^q$ engendré par $\mathcal{M}$). Alors il existe un voisinage ouvert U de x tel que, pour tout point $y \in U$, les relations $f \in \mathcal{O}_y^q$ et $gf \in \mathcal{M}_y$ entraînent $f \in \mathcal{M}_y$. (En effet, le faisceau $\mathcal{M} \cap (g\,\mathcal{O}^q)$ est cohérent ainsi que son sous-faisceau $g\,\mathcal{M}$; donc si ces deux faisceaux coïncident en un point, ils coïncident en tout point assez voisin.)

(On observera que la "proposition" utilisée dans 14, n° 3, et qui avait été admise sans démonstration, résulte immédiatement de ce corollaire 2.)

Démonstration du corollaire 2: le faisceau des $\mathcal{M}_y$ est cohérent (prop. 2); donc il existe un ouvert V contenant x et une famille finie d'éléments $u_k \in \mathcal{M}$, tels que $\mathcal{M}_y$ soit engendré par les u_k en tout point $y \in V$. L'élément $g \in \mathcal{O}_V$ permet de définir q éléments de $\mathcal{O}_V^q$:

$$g_1 = (g, 0, \ldots, 0),\ g_2 = (0, g, 0, \ldots, 0), \ldots, g_q = (0, \ldots, 0, g).$$

Alors, pour $f \in \mathcal{O}_y^q$, $gf = \Sigma_i f^i g_i$ (f^i désignant la i-ième composante scalaire de f). Considérons le faisceau des relations entre les u_k et les g_i, qui est cohérent d'après le théorème d'Oka. Il existe un ouvert U' contenant x (contenu dans V) et des systèmes (v_m^k, h_m^i) $(m = 1, \ldots)$ holomorphes dans U', qui, en chaque $y \in U'$, engendrent le module $\mathcal{R}_y(u_k, g_i)$. On a, pour tout m, la relation $\Sigma_k v_m^k u_k + \Sigma_i h_m^i g_i = 0$, qui implique que $h_m = (h_m^i) \in \mathcal{O}_x^q$ est telle que $gh_m \in \mathfrak{M}_x$. L'hypothèse de l'énoncé entraîne que $h_m \in \mathfrak{M}_x$; il s'ensuit que $h_m \in \mathfrak{M}_y$ pour tout point y d'un ouvert U contenant x. Cela étant, soit $y \in U$, et soit $f = (f^i) \in \mathcal{O}_y^q$ telle que $gf \in \mathfrak{M}_y$; cela veut dire qu'il existe des $w^k \in \mathcal{O}_y$ telles que $\Sigma_k w^k u_k + \Sigma_i f^i g_i = 0$. Donc le système (w^k, f^i) est combinaison linéaire (à coefficients dans $\mathcal{O}_y$) des systèmes (v_m^k, h_m^i). Cela implique que f est combinaison linéaire des h_m, et puisque $h_m \in \mathfrak{M}_y$, on a $f \in \mathfrak{M}_y$, ce qu'il fallait démontrer.