F. Bruhat

Sous-variétés analytiques ; variétés principales

Séminaire Henri Cartan, tome 4 (1951-1952), exp. n° 12, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1951-1952__4__A12_0>

SOUS-VARIETES ANALYTIQUES ; VARIETES PRINCIPALES

(D'après un exposé de F. Bruhat le 3-III-52)

1. Définitions générales: Anneau $\mathcal{O}_A$: soit K un corps valué complet; A un sous-ensemble non vide de K^n. Si A est ouvert, la notion de fonction analytique dans A est classique: ces fonctions forment un anneau $\mathcal{O}_A$ et si B est un ouvert contenu dans A, il existe un homomorphisme canonique φ_{BA} de $\mathcal{O}_A$ dans $\mathcal{O}_B$, avec transitivité évidente.

Pour A quelconque, nous définirons l'anneau $\mathcal{O}_A$ des fonctions analytiques dans A comme étant la limite inductive des anneau $\mathcal{O}_U$ relatifs aux voisinages ouverts U de A, suivant les homomorphismes φ. Autrement dit, une fonction analytique dans A est définie par une fonction analytique sur un voisinage ouvert de A, modulo la relation d'équivalence "il existe un voisinage de A sur lequel f et g coïncident." Si $B \subset A$, on a un homomorphisme canonique φ_{BA} de $\mathcal{O}_A$ dans $\mathcal{O}_B$. (Pour A réduit à un point, on retrouve la notion de fonction analytique en un point, définie par un série convergente.)

Ensemble $\mathcal{P}_A$: A définit de même une relation d'équivalence entre parties de K^n: $V \sim V'$ s'il existe un voisinage U de A tel que $V \cap U = V' \cap U$: on notera $\mathcal{P}_A$ l'ensemble quotient de $\mathcal{P}(K^n)$ par cette relation d'équivalence: on peut définir dans $\mathcal{P}_A$ la relation d'inclusion, les opérations de réunion et d'intersection finies et de passage au complémentaire. Si $B \subset A$, on a une application canonique ψ_{BA} de $\mathcal{P}_A$ sur $\mathcal{P}_B$.

Sous-Variétés analytiques: on dira qu'un élément f de $\mathcal{O}_A$ s'annule sur un élément V de $\mathcal{P}_A$, s'il existe un voisinage ouvert U de A, une fonction f^0 holomorphe dans U et un sous-ensemble V^0 de U tels que f et V soient les images canoniques de f^0 et V^0 et que $f^0 = 0$ sur V^0. Etant donné $f \in \mathcal{O}_A$, il existe un plus grand sous-ensemble de $\mathcal{P}_A$ sur lequel f s'annule, appelé variété des zéros de f dans A et noté $V(f)$: c'est l'image de l'ensemble des zéros de f^0 dans U, qui est évidemment indépendante du choix de la fonction f^0 dans la classe d'équivalence définie par f. On peut définir de même la variété des zéros communs à p fonctions holomorphes (ou par intersection dans $\mathcal{P}_A$).

Si A est réduit à un point x, on appellera les éléments de $\mathcal{P}_x$ ainsi définis par une famille finie de fonctions de $\mathcal{O}$ "Variétés analytiques au point x." Pour A quelconque, une "variété analytique dans A" sera un élément V de $\mathcal{P}_A$ tel que pour tout point x de A, son image dans $\mathcal{P}_x$ soit une variété analytique au point x; exemple: la variété des zéros communs à une famille finie de fonctions de $\mathcal{O}_A$. (Un des problèmes de la théorie étant précisement de déterminer sous quelles conditions une variété arbitraire de A peut être ainsi définie par une famille finie (ou même infinie ...) de fonctions de $\mathcal{O}_A$.)

Si V_1 et V_2 sont des variétés analytiques dans A, $V_1 \cup V_2$ et $V_1 \cap V_2$ aussi: si V_1 et V_2 sont définies en x resp. par les familles (f_i) et (g_j), $V_1 \cap V_2$ est définie par la famille (f_i, g_j) et $V_1 \cup V_2$ par la famille $(f_i g_i)$. Une variété V sera dite "irréductible" dans A si elle n'est pas réunion de deux variétés V_1 et V_2 distinctes de V. (Dans tout ceci, les opérations $\cup$ et $\cap$ sont prises au sens de $\mathcal{P}_A$.)

2. Variétés analytiques en un point x: soit V une variété analytique au point x définie par p fonctions holomorphes $f_1, \ldots, f_p$: tout élément de l'idéal engendré dans $\mathcal{O}_x$ par les f_i s'annule sur V. Réciproquement étant donné un idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathcal{O}_x$, il définit une variété $V(\mathfrak{a})$, appelée variété de l'idéal $\mathfrak{a}$, telle que toute fonction de $\mathfrak{a}$ s'annule sur $V(\mathfrak{a})$: en effet $\mathcal{O}_x$ étant noethérien (exp. 11) $\mathfrak{a}$ admet une base finie soit $f_1, \ldots, f_p$: tout élément de $\mathfrak{a}$ s'annule sur la variété V des zéros communs aux f_i d'où on déduit facilement que V ne dépend que de A et non de la base choisie.

Inversement, un élément quelconque X de $\mathcal{P}_x$ définit un idéal $I(X)$, l'idéal des éléments de $\mathcal{O}_x$ qui s'annulent sur X: en particulier si M est une variété, nous appellerons $I(V)$ l'idéal de la variété V.

Premières propriétés des variétés: soit V une variété analytique au point x:

1) $V(I(V)) = V$: par définition même de $V(\mathfrak{a})$ on a $V \subset V(I(V))$ même si V est un élément quelconque de $\mathcal{F}_x$. Mais V étant une variété, les fonctions f_i que définissent V appartiennent à $I(V)$ et par suite $V(I(V)) \subset V$: cette relation caractérise donc les variétés analytiques.

2) $V_1 = V_2$ est par suite équivalent a $I(V_1) = I(V_2)$; $V_1 \subset V_2$ et $\neq V_2$ est équivalent à $I(V_2) \subset I(V_1)$ et $\neq I(V_1)$: d'où, $\mathcal{O}_x$ étant noethérien, le résultat suivant: une suite strictement décroissante de variétés (pour l'inclusion) est finie.

3) $V = V_1 \cup V_2$ est équivalent à $I(V) = I(V_1) \cap I(V_2)$: car si un élément de $\mathcal{O}$ s'annule sur V, il s'annule sur V_1 et V_2 et réciproquement.

On obtient ainsi des relations (d'ailleurs triviales) entre variétés et certains idéaux de $\mathcal{O}$: ces relations seraient évidemment fausses si on remplaçait V et $I(V)$ par $\mathfrak{a}$ et $V(\mathfrak{a})$; $\mathfrak{a}$ ètant un idéal quelconque: p. ex. $V(\mathfrak{a}^1) = V(\mathfrak{a})$ ...

Théorème 1: Toute variété analytique au point x est réunion finie de variétés irréductibles. Cette décomposition est unique, à condition qu'elle ne comporte pas de termes superflus, c'est-à-dire contenus dans un autre

Soit V une variété: si V n'est pas irréductible, $V = V_1 \cup V_2$ et si V_1 n'est pas irréductible, on décompose V_1, etc: l'opération doit s'arrêter d'après 2): on obtient une composante irréductible de V et on recommence sur ce qui reste: là encore on s'arrête au bout d'un nombre fini d'opérations ... d'où l'existence d'une décomposition après suppression éventuelle des termes superflus, $V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_p$.

Supposons qu'on ait une autre décomposition, $V = V'_1 \cup V'_2 \cup \ldots \cup V'_q$: on en déduit $V'_1 = (V_1 \cap V'_1) \cup (V_2 \cap V'_1) \cup \ldots \cup (V_p \cap V'_1)$; V'_1 étant irréductible, $V'_1 \subset V_i$ pour un i au moins; mais on montrerait de même que V_i

est contenu dans un V'_j au moins: d'où $V'_1 = V_i$, V'_1 n'étant contenu dans aucun V'_j pour $j \neq i$.

Théorème 2: la condition nécessaire et suffisante pour que V soit irréductible est que I(V) soit premier.

La condition est suffisante d'après 3). Elle est nécessaire car si I(V) n'est pas premier, il existe f et $g \notin I(V)$ tels que $fg \in I(V)$: on voit alors trivialement que $V = V(I(V) + (f)) \cup V(I(V) + (g))$.

3. Variétés principales en un point: on supposera désormais K algébriquement clos. On appellera variété principale au point x, la variété d'un ideal principal ou encore la variété des zéros d'une fonction holomorphe.

Théorème 3: Si f est irréductible (dans l'anneau factoriel $\mathcal{O}_x$), toute fonction g s'annulant sur V(f) est divisible par f. Autrement dit, l'idéal $I(V(f)) = (f)$.

Corollaire: une condition nécessaire et suffisante pour que V(f) soit irréductible est que f soit irréductible.

On peut choisir les axes de coordonnées (cf. exposé X) de sorte que f soit congru mod. les unités à un polynôme distingué en z: soit P. On a $V(f) = V(P)$ et P est irréductible: par suite, K étant parfait, P et $\partial P/\partial t$ sont sans facteurs communs en $\mathcal{O}$ donc leur résultant $\Delta \not\equiv 0$ dans un voisinage de $\mathcal{O}$. Soit alors $g = PQ + R$ l'identité de Weierstrass de division par P: R est un polynôme en z de degré $p - 1$ si p est le degre de P, et en dehors de $\Delta = 0$, R s'annule pour p valeurs distinctes de z: ses coefficients sont donc des fonctions analytiques et bornées en dehors de $\Delta = 0$, donc partout par prolongement analytique, et par suite $g = PQ$, d'où le théorème. Le corollaire résulte immédiatement du th. 2 et du fait que f irréductible est équivalent à (f) premier.

On peut alors apporter une précision au théorème 1:

Théorème 1 bis: Une variété principale est réunion finie de variétés principales irréductibles.

En effet on a $f = f_1^{d_1} f_2^{d_2} \cdots f_k^{d_n}$, les f_i étant irréductibles distinctes (cf. 11); on en déduit $V(f) = \bigcup V(f_i)$, les $V(f_i)$ étant irréductibles d'après le corollaire du th. 3.

Corollaire: Si $f = f_1^{d_1} f_2^{d_2} \cdots f_k^{d_n}$, $I(V(f)) = (f_1 f_2 \cdots f_k)$.

Car si $g = 0$ sur V, $g = 0$ sur les $V(f_i)$ et par suite f_i divise g: d'où le résultat (cf. exp. 11).

Application aux fonctions méromorphes: une fonction méromorphe en un point x est un élément du corps des quotients de $\mathcal{O}_x$: on peut le mettre sous la forme f/g, f et g étant sans facteurs communs: en tout point a voisin de x qui n'appartient pas à $V(f) \cap V(g)$, on peut lui assigner une valeur numérique (finie ou infinie). En un point de $V(f) \cap V(g)$, f/g est indéterminée: en effet, dire que f et g sont sans facteurs communs, c'est dire que $V(f) \cap V(g)$ ne contient pas de variété principale: par suite quelle que soit la constante λ, et le point a de $V(f) \cap V(g)$, la variété principale $f - \lambda g = 0$ au point a n'est pas contenue dans $V(f) \cap V(g)$: autrement dit, il existe des points arbitrairement voisins de a où $f/g = \lambda$.

Remarque: si K n'est pas algébriquement clos, la définition que nous avons donnée des variétés principales est souvent sans intérêt: par exemple pour les réels, toute variété est principale. Il faudrait introduire les variétés dont l'idéal est principal ....

4. Espace $\mathcal{E}$: On prend désormais pour K le corps $\mathbf{C}$ des complexes.

Soit B une variété à structure analytique complexe (au sens de l'exposé 1) de dimension n: toutes les définitions et résultats des paragraphes précédents s'étendent sans difficultés: A étant un sous-ensemble de B, on définit $\mathcal{O}_A$, $\mathcal{P}_A$, les "sous-variétés analytiques" dans A, au point x, etc....

En particulier, on appellera "sous-variété principale" dans A, un élément V de $\mathcal{P}_A$ dont l'image canonique dans $\mathcal{P}_x$ soit, pour tout point x de A, une variété principale en x (éventuellement vide). Si A est ouvert (ce que nous supposerons toujours par la suite), V est un sous-ensemble fermé de A: on peut alors définir aussi V comme un sous-ensemble fermé de A, tel que, pour tout point x de V, l'image de V dans $\mathcal{P}_x$ soit une variété principale en x.

On associe à B un espace $\mathcal{E}$ dont les points sont les couples formés d'un point a de B et d'une variété principale irréductible non vide α en a: on a une application canonique φ de $\mathcal{E}$ sur B, définie par $\varphi(a, \alpha) = a$. On va définir une topologie sur $\mathcal{E}$: soient A un ouvert de B, V une sous-variété principale dans A: V définit un sous-ensemble $\mathcal{E}(V)$ de $\mathcal{E}$, dont les points sont les couples (a, α), où $a \in V$ et où α est une composante irréductible de V en a: par définition, les ensembles $\mathcal{E}(V)$ ainsi définis formeront une base des ouverts pour la topologie de $\mathcal{E}$. On constate immédiatement que l'application φ de $\mathcal{E}$ sur B est continue. $\mathcal{E}(V)$ muni de la topologie induite par celle de $\mathcal{E}$, sera appellé "espace des paramètres" de V: φ applique $\mathcal{E}(V)$ sur V et l'image par φ d'un ouvert de $\mathcal{E}(V)$ est un ouvert de V (autrement dit, la restriction de φ à $\mathcal{E}(V)$ est une application continue ouverte de $\mathcal{E}(V)$ sur V).

L'ensemble $\varphi^{-1}(a)$ est discret pour tout point a de B: en effet soit (a, α) un point de $\varphi^{-1}(a)$ et soit $\overline{\alpha}$ une variété dans un voisinage ouvert U de a, dont l'image dans $\mathcal{P}_a$ soit α: $\mathcal{E}(\overline{\alpha})$ est un voisinage de (a, α) dans $\mathcal{E}$ et $\varphi^{-1}(a) \cap \mathcal{E}(\overline{\alpha}) = (a, \alpha)$ puisque α est irréductible en a: d'où le résultat. Mais l'application φ n'est pas localement biunivoque, car une variété peut être irréductible en un point sans l'être en tous les points voisins; cependant pour $a' \in U$, $\varphi^{-1}(a') \cap \mathcal{E}(\overline{\alpha})$ se compose d'un nombre fini de points.

Proposition 1: La topologie de $\mathcal{E}$ est séparée.

Il suffit de montrer que deux points distincts (a, α) et (a', α') admettent des voisinages disjoints: c'est évident si $a \neq a'$. Si $a = a'$

et $\alpha \neq \alpha'$, on peut choisir les coordonnées locales au voisinage de a de telle sorte que α et α' soient définies comme variétés des zéros de deux polynômes distingués en z, irréductibles, distincts. Le résultant de ces deux polynômes n'est pas identiquement nul au voisinage de a: il ne l'est donc pas au voisinage de tout point assez voisin de a: par suite, les variétés définies par ces deux polynômes dans un voisinage ouvert convenable de a n'ont de composante irréductible commune en aucun point de ce voisinage; leurs espaces de paramètres forment les voisinages disjoints cherchés.

Un raisonnement analogue montrerait que si V est une variété principale dans A, $\mathcal{E}(V)$ est fermé dans $\varphi^{-1}(A)$ (introduire les polynômes distingués définissant α et V au point a de A et leur résultant pour montrer que si $(a, \alpha) \notin \mathcal{E}(V)$, il y a un voisinage de (a, α) qui ne rencontre pas $\mathcal{E}(V)$).

Soient A un ouvert de B, V une variété principale dans A, $\mathcal{E}(V)$ son espace des paramètres: l'application φ, considérée comme application de $\mathcal{E}(V)$ dans A est propre (i.e., l'image réciproque d'un compact de A rencontre $\mathcal{E}(V)$ suivant un compact); en particulier, $\mathcal{E}$ est localement compact; démonstration: soient K un compact de A et Φ un ultrafiltre sur $\varphi^{-1}(K) \cap \mathcal{E}(V)$; $\varphi(\Phi)$ est un ultrafiltre sur K, qui converge vers un point a de K. $\varphi^{-1}(a) \cap \mathcal{E}(V)$ se compose d'un nombre fini de points, qui admettent des voisinages disjoints: l'un de ces voisinages appartient à Φ, qui par suite converge vers le point correspondant.

Réciproquement, soient E un ouvert de $\mathcal{E}$ et A un ouvert de B tels que $\varphi(E) \subset A$ et que l'application φ de E dans A soit propre: $\varphi(E)$ est une sous-variété principale dans A et E est l'espace des paramètres de $\varphi(E)$: démonstration: $\varphi(E)$ est fermé dans A: en effet, soit a adhérent à $\varphi(E)$ et $\mathcal{F}$ la base de filtre sur A formée par les voisinages compacts de a dans A; $\varphi^{-1}(\mathcal{F})$ est une base de filtre sur E (car $\varphi^{-1}(U) \neq \emptyset$ pour tout U de $\mathcal{F}$) formée d'ensembles compacts: par suite, $\varphi^{-1}(\mathcal{F})$ admet au moins un point adhérent x dans E; on a évidemment $\varphi(x) = a$, donc $a \in \varphi(E)$. Il suffit par suite de montrer que si $a \in \varphi(E)$, il existe un voisinage U de a, tel que $\varphi(E) \cap U$ soit une variété principale dans U. Or, $\varphi^{-1}(a)$, étant compact et discret, se compose d'un nombre fini de points (a, α_i), qui possèdent dans E des voisinages disjoints qu'on peut supposer être des espaces de paramètres $\mathcal{E}(\overline{\alpha}_i)$ de variétés α_i dans des ouverts U_i de A. $\varphi^{-1}(U)$ étant compact pour $U \in \mathcal{F}$, on peut trouver un voisinage ouvert W de a tel que $\varphi^{-1}(W) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{E}(\overline{\alpha}_i)$ (sinon on aurait un filtre Φ sur $\varphi^{-1}(U)$ auquel aucun des (a, α_i) ne serait adhérent et tel que $\varphi(\Phi)$ converge vers a, ce qui est impossible). Par suite, $\varphi(E) \cap W = \bigcup_1^n (\overline{\alpha}_i \cap W)$, ce qui achève la démonstration. On a donc le:

Théorème 4: *pour qu'un ouvert E de $\mathcal{E}$ soit l'espace des paramètres d'une sous-variété principale dans un ouvert A de B, il faut et il suffit que $\varphi(E) \subset A$ et que l'application φ de E dans A soit propre.*

Définition 1: on dit qu'une variété principale dans A est *réductible* dans A, si elle est réunion de deux sous-variétés *principales* V_1 et V_2 dans A, distinctes de V (cf. §1 et exposés ultérieurs).

Théorème 5: *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une variété principale V dans un ouvert A soit irréductible dans A, est que son espace des paramètres soit connexe.*

En effet si E_1 et E_2 sont deux ouverts disjoints non vides de $\mathcal{E}(V)$ tels que $\mathcal{E}(V) = E_1 \cup E_2$, φ est une application propre de E_1 (resp. E_2) dans A, $V = \varphi(E_1) \cup \varphi(E_2)$ et $\varphi(E_1)$ (resp. $\varphi(E_2)$) est distinct de V. Inversement, si V_1 est une variété principale contenue dans V et $\neq V$, $\mathcal{E}(V_1)$ est ouvert et fermé dans $\mathcal{E}(V)$ et $\neq \mathcal{E}(V)$.

Définition 2: on dira qu'un point (a, α) de $\mathcal{E}$ est *régulier* si on peut choisir les coordonnées locales dans B de telle sorte que α soit définie par une relation du premier degré entre les coordonnées. L'ensemble $\mathcal{E}^0$ des points réguliers est un ouvert de $\mathcal{E}$, évidemment muni d'une structure de variété analytique complexe de dimension n-1 (et est en particulier localement connexe).

Théorème 6: 1) $\mathcal{E}^0$ est partout dense dans $\mathcal{E}$.

2) $\mathcal{E} - \mathcal{E}^0$ est un ensemble de dimension topologique réelle $\leq 2n-4$.

3) Tout point de $\mathcal{E}$ possède un système fondamental de voisinages, dont l'intersection avec $\mathcal{E}^0$ est connexe: par suite $\mathcal{E}$ est localement connexe.

Soit (a, α) un point de $\mathcal{E}$, P un polynôme distingué en z, définissant α en a, A un voisinage suffisamment petit de a, U l'espace des paramètres de la variété $P = 0$ dans A: U est un voisinage de (a, α) et tous les points x de U tels que $\partial P/\partial z(\varphi(x)) \neq 0$ sont réguliers. Si π est la projection canonique de $\varphi(U)$ dans C^{n-1}, "parallèlement à O_z," les points non réguliers de U sont appliqués par $\pi \cdot \varphi$ dans la variété $D = 0$, D étant le résultant de P et $\partial P/\partial z$: on en déduit que $\mathcal{E}^0$ est partout dense dans $\mathcal{E}$ et, par récurrence, que la dimension topologique réelle d'une variété principale est 2n-2 et que $\mathcal{E} - \mathcal{E}^0$ est de dimension $\leq 2n-4$, ce qui démontre 1) et 2).

Pour démontrer 3), nous utiliserons le

Lemme: soit V une sous-variété principale dans un ouvert A de B. Quel que soit l'ouvert connexe $X \subset A$, $X - (X \cap V)$ est connexe.

V étant rare dans A, il suffit de démontrer le lemme pour X assez petit: on peut alors choisir les coordonnées locales dans X de telle sorte que $V \cap X$ soit dans X la variété des zéros d'un polynôme distingué en z de degré p: V a alors p points au plus dans $\pi^{-1}(x) \cap X$, pour $x \in C^{n-1}$; $\pi(X)$ étant connexe, on en déduit le lemme.

Reprenons le point (a, α) de $\mathcal{E}$ et le voisinage U de (a, α) introduit tout à l'heure: nous supposerons de plus que $A = \varphi(U)$ est connexe. On a vu (cf. exposé 11) qu'il existait un système fondamental de voisinages W de a, tels que tous les points (z, x) tels que $P(z, x) = 0$ et $x \in \pi(W)$, appartiennent à W; soit W un tel voisinage connexe et $U = \mathcal{E}(V \cap W)$. Pour montrer que $U \cap \mathcal{E}^0$ est connexe, il suffit de montrer que l'ensemble U' des points de U où $D\,\varphi \neq 0$ est connexe: or d'après le lemme, $\pi\circ\varphi(U')$ est connexe comme complémentaire de la variété $D = 0$ dans $\pi(W)$. D'autre part à un point de $\pi\circ\varphi(U')$ correspondent exactement p points de U', définis par les p racines de P; il suffit alors de montrer que l'on peut obtenir toutes les racines de $P = 0$ par prolongement analytique de l'une d'entre elles. Or on voit facilement que par prolongement analytique, on obtient en tout point de $\pi\circ\varphi(U')$ le même nombre soit p' de racines; les fonctions symétriques élémentaires de ces p' racines sont des fonctions holomorphes, bornées et uniformes sur le complémentaire de $D = 0$, donc partout dans $\pi(W)$; elles sont nulles à l'origine; par suite ces p' racines sont les racines d'un polynome distingué en z de degré p', qui divise P; P étant irréductible, on a $p' = p$.

$\mathcal{E}$ étant localement connexe, une composante connexe d'un ouvert de $\mathcal{E}$ est un ensemble ouvert (et aussi fermé): par suite, si V est une variété principale dans un ouvert A de B, la décomposition de $\mathcal{E}(V)$ en composantes connexes donnera (grâce à l'application φ qui est évidemment propre sur tout sous-ensemble fermé de $\mathcal{E}(V)$) une décomposition de V en réunion de variétés irréductibles dans A (on voit en particulier que la notion d'irréductibilité est indépendante de l'ouvert A dans lequel on plonge le sous-ensemble V, pourvu que V soit une variété dans A). Un compact K de A ne rencontre qu'une nombre fini de composantes irréductibles, car $\varphi^{-1}(K)$ étant compact ne rencontre qu'un nombre fini de composantes connexes. En particulier, si A est réunion dénombrable de compacts, V est réunion au plus dénombrable de variétés irréductibles (on peut démontrer en outre que V est réunion dénombrable de compacts).

Théorème 7: soient V une variété principale irréductible dans A ouvert, f une fonction holomorphe dans A, x un point de V: si l'image de f dans $\mathcal{O}_x$ s'annule sur une composante irréductible de V en x, alors f s'annule sur V tout entier.

f définit une fonction $f^0 = f \circ \varphi$ sur $\mathcal{E}(V)$ et f^0 est analytique sur $\mathcal{E}^0 \cap \mathcal{E}(V)$ (au sens fonction analytique sur une variété à structure analytique complexe). L'hypothèse faite sur f revient à dire que f^0 s'annule identiquement au voisinage d'un point de $\mathcal{E}(V)$, qui est connexe. Il suffit alors de démontrer ceci: soit $\mathcal{E}(V)$ l'espace des paramètres d'une variété V, f^0 une fonction continue sur $\mathcal{E}(V)$, holomorphe sur $\mathcal{E}(V) \cap \mathcal{E}^0$: l'ensemble E des points de $\mathcal{E}(V)$ au voisinage desquels f^0 est identiquement nulle est ouvert et fermé dans $\mathcal{E}(V)$. Il est évident que E est ouvert et que $E \cap \mathcal{E}^0$ est fermé dans $\mathcal{E}(V) \cap \mathcal{E}^0$ par prolongement analytique. Soit (a, α) un point adhérent à E: d'après le théorème 6, on peut trouver un voisinage U de (a, α) tel que $U \cap \mathcal{E}^0$ soit connexe et que f^0 soit identiquement nulle au voisinage d'un point de $U \cap \mathcal{E}^0$ donc dans tout $U \cap \mathcal{E}^0$. $\mathcal{E}^0$ étant dense dans $\mathcal{E}$, on en déduit que $f^0 = 0$ dans tout U et par suite que $(a, \alpha) \in E$, donc que E est ferme dans $\mathcal{E}(V)$.