Samuel Eilenberg

La suite spectrale. II : espaces fibrés

Séminaire Henri Cartan, tome 3 (1950-1951), exp. nº 9, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1950-1951__3__A9_0>

Séminaire H. CARTAN,

E.N.S., 1950/51 . Topologie algébrique.

LA SUITE SPECTRALE. II. ESPACES FIBRÉS.

(Exposé de Samuel EILENBERG, le 5.2.1951).

1.- Enoncé des résultats.

Soit X un espace fibré de fibre F , de base B , et soit τ la projection : $X \longrightarrow B$. Nous supposerons que B est un complexe simplicial fini ; on notera B^p le squelette p-dimensionnel de B , et on posera $X_p = \tau^{-1}(B^p)$. Alors

(1.1) $\emptyset = X_{-1} \subset X_0 \subset \ldots \subset X_p \subset \ldots \subset X_n = X \quad (n = \dim B)$.

Supposons donnée une théorie de l'homologie avec un groupe G comme groupe de coefficients ; alors la suite (1.1) détermine des groupes $E^k_{n,p}$ et des homomorphismes $d^k_{n,p}$ comme il a été expliqué dans l'exposé précédent (8). En particulier, pour $k = 1$,

(1.2) $$E^1_{p+q,p} = H_{p+q}(X_p , X_{p-1} ; G) ,$$

tandis que $d^1_{p+q,p} : E^1_{p+q,p} \longrightarrow E^1_{p-1+q,p-1}$ est l'opérateur bord du triple (X_p , X_{p-1}, X_{p-2}) .

Nous allons établir les résultats suivants :

(1.3) Le groupe $E^1_{p+q,p}$ est isomorphe à $C_p(B) \otimes H_q(F ; G)$, où $C_p(B)$ désigne le groupe des p-chaînes entières de B .

(1.4) Le groupe $H_q(F ; G)$ peut être regardé comme un système local de groupes sur B . Cela conduit à un opérateur bord $\partial : C_p(B) \otimes H_q(F ; G) \longrightarrow C_{p-1}(B) \otimes H_q(F ; G)$.

(1.5) Par l'isomorphisme (1.3) , l'opérateur $d^1_{p+q,p}$ se transforme dans l'opérateur ∂ de (1.4) .

Comme corollaire on obtient un isomorphisme

$$E^2_{p+q,p} \simeq H_p(B ; H_q(F ; G)) ,$$

où $H_q(F ; G)$ est regardé comme système de coefficients locaux sur B .

Il y a des résultats analogues pour la cohomologie, mais il semble qu'il y ait quelques difficultés à appliquer la présente méthode à l'étude de la structure multiplicative. Moyennant des précautions convenables concernant les théories d'homologie utilisées, les résultats sont aussi valables quand B est un complexe infini.

2.- Préliminaires concernant les produits en homologie.

Nous considérerons deux théories de l'homologie : $H_q(X, A)$ avec des coefficients entiers, et $H_q(X, A; G)$ avec des coefficients dans un groupe G. Nous supposerons en outre qu'on a donné des homomorphismes

$$\chi : \quad H_p(X, A) \otimes H_q(Y; G) \longrightarrow H_{p+q}((X, A) \times Y; G) \quad ,$$

où $(X, A) \times Y$ désigne $(X \times Y, A \times Y)$. L'homomorphisme χ sera supposé satisfaire aux axiomes suivants :

(2.1) Si $f : (X, A) \longrightarrow (X', A')$ et $g : Y \longrightarrow Y$, alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_p(X,A) \otimes H_q(Y;G) & \xrightarrow{\chi} & H_{p+q}((X,A) \times Y ; G) \\ \downarrow f_* \otimes g_* & & \downarrow (f \times g)_* \\ H_p(X',A') \otimes H_q(Y;G) & \xrightarrow{\chi} & H_{p+q}((X',A') \times Y ; G) \end{array}$$

est commutatif ;

(2.2) le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_p(X,A) \otimes H_q(Y;G) & \xrightarrow{\chi} & H_{p+q}((X,A) \times Y ; G) \\ \downarrow \partial \otimes i_* & & \downarrow \partial \\ H_{p-1}(A) \otimes H_q(Y;G) & \xrightarrow{\chi} & H_{p-1+q}(A \times Y ; G) \end{array}$$

est commutatif ;

(2.3) si P est un espace consistant en un point unique, si f est l'homéomorphisme $Y \longrightarrow P \times Y$ défini par $f(y) = (P,y)$, si $1 \in H_o(P) = Z$ est le générateur de $H_o(P)$, et $u \in H_q(Y)$, alors

$$\chi(1 \otimes u) = f_* u \quad .$$

On voit facilement que (2.1) et (2.2) peuvent aussi être formulés pour des triples (X, A, B).

Nous allons porter notre attention sur le cas où $(X, A) = (s, \dot{s})$ est composé d'un p-simplexe s et de son bord $\dot{s}$. Soit s' une $(p-1)$-face de s, et soit $c = \dot{s} - (s' - \dot{s}')$. Considérons le diagramme

$$H_p(s, \dot{s}) \xrightarrow{\partial} H_{p-1}(\dot{s}, c) \xrightarrow{j_*} H_{p-1}(s', \dot{s}') \quad ,$$

où ∂ et j_* sont des isomorphismes sur, et définissons

$[s : s'] = j_*^{-1}\partial : \quad H_p(s , \dot{s}) \longrightarrow H_{p-1}(s' , \dot{s})$. De la même manière, en se servant du diagramme

$$H_p((s,\dot{s}) \times Y;\ G) \xrightarrow{\partial} H_{p-1}((\dot{s},c) \times Y;\ G) \xleftarrow{(j\times i)_*} H_{p-1}((s',\dot{s}') \times Y;\ G) \quad ,$$

on obtient un isomorphisme $[s \times Y : s' \times Y] = \partial(j\times i)_*^{-1}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$(2.4)\qquad \begin{array}{ccc} H_p(s,\dot{s}) \otimes H_q(Y;G) & \xrightarrow{\chi} & H_{p+q}((s,\dot{s}) \times Y;\ G) \\ \Big\downarrow [s:s'] \otimes i_* & & \Big\downarrow [s\times Y : s'\times Y] \\ H_{p-1}(s',\dot{s}') \otimes H_q(Y;G) & \xrightarrow{\chi} & H_{p-1+q}((s',\dot{s}') \times Y;\ G) \end{array}$$

Prouvons maintenant que

(2.5) $\quad \chi : \ H_p(s,\dot{s}) \otimes H_q(Y;G) \longrightarrow H_{p+q}((s,\dot{s}) \times Y;\ G)$ est un isomorphisme.

En effet, pour $p = 0$, s est un point et $\dot{s} = \emptyset$, de sorte que (2.5) est dans ce cas une conséquence de (2.3). Pour $p > 0$ la proposition résulte de (2.4) par récurrence.

<u>Lemme</u> - Soit $\alpha : (s,\dot{s}) \longrightarrow (s_1,\dot{s}_1)$ une application simpliciale, s et s_1 étant des p-simplexes. Soit en outre $\gamma : (s,\dot{s}) \times Y \longrightarrow (s_1,\dot{s}_1) \times Y_1$ une application telle que $\gamma(x,y) = (\alpha(x) , \eta_x(y))$ où $\eta_x : Y \longrightarrow Y_1$. Alors les homomorphismes $\eta_{x*} : H_q(Y;G) \longrightarrow H_q(Y_1;G)$ sont tous identiques entre eux, et l'on a

$$(2.6)\qquad \gamma_*\chi(u \otimes v) = \chi(\alpha_* u \otimes \eta_{x*} v)$$

pour $u \in H_p(s,\dot{s})$, $v \in H_q(Y;G)$.

Démonstration : puisque s est connexe par arcs, les applications η_x sont toutes homotopes entre elles et par suite les η_{x*} sont tous les mêmes. Pour prouver (2.6) nous pouvons, compte tenu de (2.1) , nous borner au cas où $s = s_1$ et où α est l'identité. Si $p = 0$, $(s , \dot{s})$ se réduit à un simple point P , et l'on a $\gamma = i \times \eta$ où $i : P \longrightarrow P$ est l'application identique, et $\eta = \eta_P : Y \longrightarrow Y$. La relation (2.6) est alors une conséquence de (2.1). Si $p > 0$, choisissons une (p-1)-face s' de s et un point $x \in s'$. Soit γ' l'homéomorphisme de $(s', \dot{s}') \times Y$ sur lui-même défini par la restriction de γ . On vérifie aisément que

$$[s \times Y : \dot{s} \times Y]\,\gamma_* = \gamma'_*[s \times Y : \dot{s} \times Y] .$$

Ainsi, en supposant (2.6) vrai pour la dimension p-1 , on a

$$\begin{aligned}[s \times Y : \dot{s} \times Y]\, \gamma_* \chi(u \otimes v) &= \gamma_* [s \times Y : \dot{s} \times Y]\, \chi(u \otimes v) \\ &= \gamma'_* \chi([s,\dot{s}]\, u \otimes v) = \chi([s,\dot{s}]\, u \otimes \eta_{X*} v) \\ &= [s \times Y : \dot{s} \times Y]\, \chi(u \otimes \eta_{X*} v) \quad .\end{aligned}$$

(2.6) en résulte, puisque $[s \times Y : \dot{s} \times Y]$ est un isomorphisme.

3.- <u>Calcul de</u> $H_{p+q}(X_p \, , X_{p-1})$.

Soit s un p-simplexe de B , et soit φ_s un homéomorphisme de $(s \, , \dot{s}) \times F$ sur $(\overset{-1}{\tau} s \, , \overset{-1}{\tau} \dot{s})$ tel que $\tau \varphi_s(x \, , y) = x$ pour $x \in s$, $y \in F$. Si ψ_s est un autre tel homéomorphisme, $\overset{-1}{\varphi}_s \psi_s$ est un homéomorphisme de $(s \, , \dot{s}) \times F$ sur lui-même, qui satisfait aux conditions du Lemme (où α = l'identité). Cela donne naissance à un isomorphisme

$$(3.1) \qquad \langle \varphi_s \, , \psi_s \rangle \ : \ H_q(F \, ; G) \longrightarrow H_q(F \, ; G)$$

tel que

$$(3.2) \qquad \psi_{s*}\, \chi(u \otimes v) = \varphi_{s*}\, \chi(u \otimes \langle \varphi_s \, , \psi_s \rangle\, v)$$

pour $u \in H_p(s \, , \dot{s})$, $v \in H_q(F \, ; G)$.

Si ϑ_s est un troisième homomorphisme, il est clair que

$$(3.3) \qquad \langle \varphi_s \, , \psi_s \rangle \langle \psi_s \, , \vartheta_s \rangle = \langle \varphi_s \, , \vartheta_s \rangle \quad .$$

Soit $\Phi = \{\varphi_s\}$ une famille contenant un homéomorphisme φ_s pour chaque simplexe s de B . Si s est un p-simplexe, on a

$$(3.4) \qquad \varphi_{s*}\, \chi \ : \ H_p(s,\dot{s}) \otimes H_q(F;G) \approx H_{p+q}(\overset{-1}{\tau} s \, , \overset{-1}{\tau} \dot{s} \, ; G) \ .$$

Utilisons maintenant le fait que les homomorphismes

$$H_p(s,\dot{s}) \longrightarrow H_p(B^p \, , B^{p-1}) = C_p(B)$$

$$H_{p+q}(\overset{-1}{\tau} s \, , \overset{-1}{\tau} \dot{s}; G) \longrightarrow H_{p+q}(X_p \, , X_{p-1}; G) = E^1_{p+q,p}$$

définis par inclusion, sont des isomorphismes dans, et définissent une décomposition en somme directe des groupes écrits à droite. Ainsi (3.3) définit un isomorphisme

$$(3.5) \qquad \Phi^1 : \quad C_p(B) \otimes H_q(F \, ; G) \approx E^1_{p+q,p}$$

Si $\Psi = \{\psi_s\}$ est une autre famille d'homéomorphismes, alors il résulte de (3.2) que

$$(3.6) \qquad \Psi^{\#}(u \otimes v) = \Phi^{\#}(u \otimes \langle \varphi_s , \psi_s \rangle \; v) \quad .$$

4.- <u>Calcul de</u> d^1_p .

L'homomorphisme $d^1_{p+q,p} : E^1_{p+q,p} \longrightarrow E^1_{p-1+q,p-1}$ coïncide avec l'opérateur bord

$$\partial : H_{p+q}(X_p , X_{p-1}) \longrightarrow H_{p-1+q}(X_{p-1} , X_{p-2})$$

du triple $(X_p , X_{p-1} , X_{p-2})$.

Considérons un système $\Phi = \{\varphi_s\}$ d'homéomorphismes comme ci-dessus, et soit s' une face (de dimension quelconque) du simplexe s . Soit $\varphi'_{s'}$ la restriction de l'homéomorphisme φ_s à s' . Alors, grâce à l'isomorphisme (3.1) nous définissons

$$(4.1) \qquad \langle s,s', \Phi \rangle = \langle \varphi'_{s'} , \varphi_{s'} \rangle : H_q(F;G) \longrightarrow H_q(F;G) \quad .$$

Comme conséquence de (3.3) on a

$$(4.2) \qquad \langle s',s'', \Phi \rangle \; \langle s,s', \Phi \rangle = \langle s,s'', \Phi \rangle$$

pour toute face s'' de s . Ces relations montrent que le groupe $H_q(F;G)$ et les isomorphismes (4.1) définissent un <u>système local</u> de groupes sur le complexe B . L'opérateur bord ∂_Φ de ce système local a la forme

$$(4.3) \qquad \partial_\Phi (u \otimes v) = \sum ([s : s_i] u \otimes \langle s , s_i , \Phi \rangle v)$$

où $u \in H_p(s,\dot{s})$, s est un p-simplexe, et s_i parcourt l'ensemble des $(p-1)$-faces de s (ou de tous les $(p-1)$-simplexes de B) .

Le système local $\{H_q(F;G) , \langle s,s', \Phi \rangle\}$ dépend de la famille Φ . Néanmoins si Ψ est une autre telle famille, il suit facilement de (3.3) que

$$(4.4) \qquad \langle s,s', \Phi \rangle \quad \langle \varphi_s , \psi_s \rangle = \langle \varphi_{s'} , \psi_{s'} \rangle \; \langle s,s' , \Psi \rangle$$

ce qui montre que les systèmes locaux définis par Φ et Ψ sont équivalents.

Le but essentiel de ce paragraphe est de prouver

$$(4.5) \qquad \Phi^{\#} \partial_\Phi = \partial \Phi^{\#} \quad .$$

Cette relation affirme que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C_p(B) \otimes H_q(F ; G) & \xrightarrow{\Phi^{\#}} & E^1_{p+q,p} \\ \downarrow \partial_\Phi & & \downarrow d^1_{p+q,p} \\ C_{p-1}(B) \otimes H_q(F ; G) & \xrightarrow{\Phi^{\#}} & E^1_{p-1+q,p-1} \end{array}$$

Cela achèvera la démonstration des assertions énoncées au paragraphe 1 .

La démonstration de (4.5) se fait en plusieurs étapes. On prouve d'abord que si (4.5) est vrai pour le système Φ d'homéomorphismes, il l'est aussi pour tout autre système Ψ. En effet, en utilisant (3.6), (4.2) et (4.3) on a

$$\begin{aligned}
\partial \Psi^{\#}(u \otimes v) &= \partial \Phi^{\#}(u \otimes \langle \varphi_s , \psi_s \rangle v) \\
&= \sum \Phi^{\#}([s,s_i]\, u \otimes \langle s,s_i,\Phi \rangle \quad \langle \varphi_s , \psi_s \rangle v) \\
&= \sum \Phi^{\#}([s,s_i]\, u \otimes \langle \varphi_{s'} , \psi_{s'} \rangle \quad \langle s,s_i , \Psi \rangle \quad v) \\
&= \sum \Psi^{\#}([s,s_i]\, u \otimes \langle s,s_i, \Psi \rangle\, v) = \Psi^{\#} \partial_{\Psi}(u \otimes v) \quad .
\end{aligned}$$

Ensuite on observe que la relation (4.5) ne fait intervenir qu'un simplexe s et ses faces ; il suffit donc de considérer le cas où $B = s$ est un simplexe. On obtient alors une famille Φ en choisissant l'homéomorphisme φ_s et définissant tous les autres homéomorphismes $\varphi_{s'}$ comme restrictions de φ_s. Ceci réduit le problème au cas où $B = s$, $X = s \times F$, $\tau(x,y) = x$, la famille se composant des applications identiques. L'application $\Phi^{\#}$ se réduit alors à χ , et la relation (4.5) devient la relation de commutativité dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
H_p(s,\dot{s}) \otimes H_q(F;G) & \xrightarrow{\ \chi\ } & H_{p+q}((s,\dot{s}) \times F \; ; \; G) \\
\downarrow{\scriptstyle \partial \otimes i_*} & & \downarrow{\scriptstyle \partial} \\
H_{p-1}(\dot{s},s^{p-2}) \otimes H_q(F;G) & \xrightarrow{\ \chi\ } & H_{p-1+q}((\dot{s},s^{p-2}) \times F \; ; \; G)
\end{array}$$

où s^{p-2} est le squelette $(p-2)$-dimensionnel de s . Cela achève la démonstration de (4.5).

5.- Conditions de compatibilité.

Outre l'espace fibré $\{X , B , \tau , F\}$ considérons un espace fibré $\{\bar{X} , \bar{B} , \bar{\tau} , \bar{F}\}$. Une application homomorphique du premier dans le second est un couple d'applications continues $f : X \longrightarrow \bar{X}$ et $g : B \longrightarrow \bar{B}$, où g est simpliciale et $\bar{\tau} f = g \tau$. Puisque f applique chaque X_p dans $\bar{X}_p$, f définit des applications $f^k_{n,p} : E^k_{n,p} \longrightarrow \bar{E}^k_{n,p}$ telles que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
E^k_{n,p} & \xrightarrow{\ f^k_{n,p}\ } & \bar{E}^k_{n,p} \\
\downarrow{\scriptstyle d^k_{n,p}} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{d}^k_{n,p}} \\
E^k_{n-1,p-k} & \xrightarrow{\ f^k_{n-1,p-k}\ } & \bar{E}^k_{n-1,p-k}
\end{array}$$

Soient Φ et $\bar{\Phi}$ des systèmes d'applications coordonnées pour les deux espaces fibrés. Alors, pour $k = 1$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E^1_{p+q,p} & \xrightarrow[f^1_{p+q,p}]{} & \bar{E}^1_{p+q,p} \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_p(B) \otimes H_q(F;G) & \xrightarrow[h]{} & C_p(\bar{B}) \otimes H_q(\bar{F};G) \end{array}$$

où h déterminé par la condition de commutativité. Nous allons calculer h explicitement.

Soit s un p-simplexe de B et soit $\bar{s} = g(s)$. Si $\dim \bar{s} < \dim s$, on voit facilement que $h(u \otimes v) = 0$ pour $u \in H_p(s,s)$, $v \in H_q(F;G)$. Si $\dim \bar{s} = p$, g définit une application $g : (s,\dot{s}) \longrightarrow (\bar{s},\dot{\bar{s}})$ qui, avec l'application $\bar{\varphi}^{-1}_{\bar{s}} f \varphi_s : (s,\dot{s}) \times F \longrightarrow (\bar{s},\dot{\bar{s}}) \times \bar{F}$, satisfait aux conditions du Lemme (paragraphe 2). On en déduit un homomorphisme $\vartheta_s : H_q(F;G) \longrightarrow H_q(\bar{F};G)$ tel que

$$\Phi^{\#}(u \otimes v) = \bar{\Phi}^{\#}(gu \otimes \vartheta_s v) .$$

Ceci donne

$$(5.1) \qquad h(u \otimes v) = gu \otimes \vartheta_s v$$

pour $u \in H_p(s,\dot{s})$, $v \in H_q(F;G)$. Cette formule vaut aussi pour $\dim \bar{s} < p$, puisque $gu = 0$ dans ce cas.

6.- Une digression.

Revenons aux notations du paragraphe 3 de l'exposé 8, et supposons, outre (3.3) et (3.4), que l'on ait aussi

$$(6.1) \qquad E^1_{n,p} = H_n(A_p , A_{p-1}) = 0 \quad \text{pour } n < p \text{ ou } p < 0 .$$

Il s'ensuit que $E^k_{n,p} = 0$ pour $n < p$ ou $p < 0$. Par suite les homomorphismes

$$d^k_{n,o} : E^k_{n,o} \longrightarrow E^k_{n-1,-k} ; \qquad d^k_{n+1,n+k} : E^k_{n+1,n+k} \longrightarrow E^k_{n,n}$$

sont nuls. Ainsi tous les éléments de $E^k_{n,o}$ sont des cycles, et aucun élément $\neq 0$ de $E^k_{n,n}$ n'est un bord. Par suite $E^{k+1}_{n,o}$ est un groupe quotient $E^k_{n,o}$, tandis que $E^{k+1}_{n,n}$ est un sous-groupe de $E^k_{n,n}$. Puisque $E^k_{n,o} = E_{n,o}$ et $E^k_{n,n} = E_{n,n}$ pour k assez grand, on obtient des homomorphismes

$$(6.2) \qquad E^k_{n,o} \longrightarrow E_{n,o} \quad , \qquad E_{n,n} \longrightarrow E^k_{n,n}$$

dont le premier est <u>sur</u>, et le second est <u>biunivoque</u>.

Puisque $E_{n,p} \approx B_{n,p}/B_{n,p-1}$ est nul pour $n < p$ et pour $p < 0$, et que

$B_{n,p} = 0$ pour p petit et $B_{n,p} = H_n(A)$ pour p grand, il s'ensuit que

$$0 = B_{n,-1} \subset B_{n,o} \subset \dots \subset B_{n,n} = H_n(A) \quad ,$$

avec $B_{n,o} \approx E_{n,o}$ et $H_n(A)/B_{n,n-1} \approx E_{n,n}$.

Il en résulte des homomorphismes

$$(6.3) \qquad E_{n,o} \longrightarrow H_n(A) \longrightarrow E_{n,n}$$

dont le premier est biunivoque, et le second est sur. Compte tenu de (6.2), cela donne des homomorphismes

$$(6.4) \qquad E^k_{n,o} \longrightarrow H_n(A) \longrightarrow E^k_{n,n} \quad .$$

Dans le cas de l'espace fibré considéré dans cet exposé, on a $X_p = 0$ pour $p < 0$, et $X_p = X$ pour p grand. Ainsi les conditions (3.3) et (3.4) de l'exposé 8 sont satisfaites. En outre $E^1_{n,p} \approx C_p(B) \otimes H_{n-p}(F;G)$, qui est nul pour $p < 0$ ou $n < p$. Donc les conditions (6.1) sont remplies.

7.- Interprétation des homomorphismes $H_n(F) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(B)$.

Soit $\Phi = \{\varphi_s\}$ une famille d'applications coordonnées pour l'espace fibré $\{X , B , \tau , F\}$. Elle donne des isomorphismes

$$E^2_{n,p} \approx H_p(B ; H_{n-p}(F;G)) \quad .$$

Avec (6.4), on obtient des homomorphismes

$$(7.1) \qquad H_o(B; H_n(F;G)) \longrightarrow H_n(X;G) \longrightarrow H_n(B; H_o(F;G))$$

que nous proposons maintenant d'interpréter.

Soit P un sommet de B , et $Y = \overset{-1}{\tau}(P)$. Regardons Y comme espace fibré de base P , de fibre F , d'application coordonnée définie par Φ . Les applications d'inclusion $i : Y \longrightarrow X$, $j : P \longrightarrow B$ définissent alors une application de cet espace fibré dans l'espace fibré $\{X , B , \tau\}$. L'application $h : C_o(P) \otimes H_n(F;G) \longrightarrow C_o(B) \otimes H_n(F;G)$, calculée par la méthode du paragraphe 5 , n'est autre que celle induite par j , puisque, dans ce cas, l'application ϑ_s du paragraphe 5 est l'identité. Cela donne un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_n(F;G) \approx H_o(P;H_n(F;G)) & \longrightarrow & H_n(Y;G) \\ \downarrow i_* & & \downarrow j_* \\ H_o(B;H_n(F;G)) & \longrightarrow & H_n(X;G) \end{array}$$

où les applications horizontales sont les premières applications de (7.1) .

L'application horizontale $H_n(F;G) \longrightarrow H_n(Y;G)$ est l'application naturelle induite par les applications coordonnées.

Si B est <u>connexe</u>, l'homomorphisme j_* est indépendant du choix de P. On obtient alors un homomorphisme bien défini $\chi : H_n(F;G) \longrightarrow H_n(X;G)$, tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H_n(F;G) \arrow[rr, "\chi"] \arrow[dr, "j_*"'] & & H_n(X;G) \\
& H_o(B;\, H_n(F;G)) \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

Si en outre le système $H_n(F;G)$ est <u>simple</u> sur B, alors j_* est un isomorphisme sur. Ainsi la première application de (7.1) peut être identifiée à χ.

Pour interpréter d'une manière analogue la seconde application de (7.1), considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\tau"'] & B \arrow[d, "i"] \\
B \arrow[r] & B
\end{tikzcd}$$

et interprétons l'application verticale i comme une projection de B regardé comme espace fibré de base B et de fibre réduite à un point Q. Soit $f : F \longrightarrow Q$ et $f_* : H_o(F;G) \longrightarrow H_o(Q;G) = G$. L'application $h : C_n(B) \otimes H_o(F;G) \longrightarrow C_n(B) \otimes G$, calculée par la méthode du paragraphe 5, est alors celle induite par f_*. Cela donne naissance au diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H_n(X;G) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_*"] & H_n(B;\, H_o(F;G)) \arrow[d, "f_*"] \\
H_n(B;G) \arrow[r] & H_n(B;\, H_o(Q;G))
\end{tikzcd}$$

où les applications horizontales sont les secondes applications de (7.1). Si on identifie $H_o(Q;G)$ à G, la flèche horizontale du bas représente l'application identique. En effet, dans l'espace fibré $i : B \longrightarrow B$, on a

$$E^1_{n,p} = H_n(B^p, B^{p-1};G) = \begin{cases} C_n(B;G) & \text{si } p = n \\ 0 & \text{si } p \neq n . \end{cases}$$

Ainsi tous les opérateurs $d^k_{n,p}$ sont nuls pour $k > 1$, et

$$E_{n,p} = E^2_{n,p} = \begin{cases} H_n(B;G) & \text{si } n = p \\ 0 & \text{si } n \neq p . \end{cases}$$

Donc le diagramme se réduit à

$$\begin{tikzcd}
H_n(X;G) \arrow[rr] \arrow[dr, "\tau_*"'] & & H_n(B;\, H_o(F;G)) \arrow[dl, "f_*"] \\
& H_n(B;G) &
\end{tikzcd}$$

Si en outre F est connexe (relativement à la théorie de l'homologie $H(\ ;G)$), alors f_* est un isomorphisme, et dans ce cas la seconde application de (7.1) peut être identifiée à τ_*.
